1. *Rappels de 4e : tester un nombre, résoudre une équation du premier degré*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : tester un nombre**

(a) Membre de gauche : $3 \times (-4) + 7 = -12 + 7 = -5$. Membre de droite : -5. Les deux membres sont égaux : -4 est solution.

(b) Membre de gauche : $(-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$ (attention, $(-2)^2 = 4$ et non -4). Membre de droite : $4 \times (-2) - 1 = -8 - 1 = -9$. $7 \neq -9$: -2 n'est pas solution.

(c) Pour $x = 1$: $4 \times 1 - 3 = 1$ et $2 \times 1 + 2 = 4$, différents. Pour $x = 2{,}5$: $4 \times 2{,}5 - 3 = 7$ et $2 \times 2{,}5 + 2 = 7$, égaux. Pour $x = 4$: $4 \times 4 - 3 = 13$ et $2 \times 4 + 2 = 10$, différents. Seul 2,5 est solution.

(d) Membre de gauche : $6 \times \frac{1}{3} - 1 = 2 - 1 = 1$. Membre de droite : $9 \times \frac{1}{3} - 2 = 3 - 2 = 1$. Les deux membres sont égaux : $\frac{1}{3}$ est solution.

(e) Léo a oublié les parenthèses du nombre négatif. Avec son calcul faux, il aurait trouvé $3 = 3$ et conclu à tort. Membre de gauche : $5 - 2 \times (-1) = 5 + 2 = 7$. Membre de droite : $3 \times (-1 + 2) = 3 \times 1 = 3$. $7 \neq 3$: -1 n'est pas solution.

(f) Par exemple $2x + 5 = -1$. Test : $2 \times (-3) + 5 = -6 + 5 = -1$, égal au membre de droite : -3 est bien solution.
(Toute équation qui vérifie ce test convient.)

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : résoudre une équation du premier degré**

(a) On divise les deux membres par 8 $\to x = 26 \div 8 = 3{,}25$ (et non $8 \div 26$). Vérification : $8 \times 3{,}25 = 26$ ✓. L'équation a pour solution 3,25.

(b) On ajoute 3 aux deux membres $\to 30 = 6x \to$ on divise par 6 $\to x = 5$. Vérification : $6 \times 5 - 3 = 27$ ✓. L'équation a pour solution 5.

(c) Le coefficient de x est -7. On soustrait 4 aux deux membres $\to -7x = -10 \to$ on divise par $-7 \to x = \frac{10}{7}$ (fraction irréductible ; 1,43 n'en est qu'une valeur approchée). Vérification : $4 - 7 \times \frac{10}{7} = 4 - 10 = -6$ ✓. L'équation a pour solution $\frac{10}{7}$.

Ex. 2 (suite)

(d) On soustrait $2x$ aux deux membres $\to 3x + 9 = -9 \to$ on soustrait 9 $\to 3x = -18 \to$ on divise par 3 $\to x = -6$. Vérification : $5 \times (-6) + 9 = -21$ et $2 \times (-6) - 9 = -21$ ✓. L'équation a pour solution -6.

(e) On soustrait $0{,}5x$ aux deux membres $\to x - 2 = 3{,}4 \to$ on ajoute 2 $\to x = 5{,}4$. Vérification : $1{,}5 \times 5{,}4 - 2 = 6{,}1$ et $0{,}5 \times 5{,}4 + 3{,}4 = 6{,}1$ ✓. L'équation a pour solution 5,4.

(f) Le plus grand coefficient est à droite : on soustrait $2x$ aux deux membres $\to -11 = 7x + 3 \to$ on soustrait 3 $\to -14 = 7x \to$ on divise par 7 $\to x = -2$. Vérification : $2 \times (-2) - 11 = -15$ et $9 \times (-2) + 3 = -15$ ✓. L'équation a pour solution -2.

(g) On multiplie les deux membres par $\frac{3}{2}$ (ou par 3, puis on divise par 2) $\to x = 8 \times \frac{3}{2} = 12$. Vérification : $\frac{2}{3} \times 12 = 8$ ✓. L'équation a pour solution 12.

Ex. 3 ★★☆ **Développer, réduire, puis résoudre**

(a) On développe $\to 4x - 12 = 7x + 3 \to$ on soustrait $4x \to -12 = 3x + 3 \to$ on soustrait 3 $\to -15 = 3x \to x = -5$. Vérification dans l'équation de départ : $4 \times (-5 - 3) = -32$ et $7 \times (-5) + 3 = -32$ ✓. L'équation a pour solution -5.

(b) Le signe $-$ devant la parenthèse change les deux signes $\to 6x - 2x + 5 = 4x + 5 \to 4x + 5 = 4x + 5$. On soustrait $4x$: il reste $5 = 5$, vrai quelle que soit la valeur de x. L'équation a une infinité de solutions : tous les nombres.

(c) On développe $\to 6x + 3 - 2 = 6x - 4 \to 6x + 1 = 6x - 4 \to$ on soustrait $6x \to 1 = -4$, faux quelle que soit la valeur de x. L'équation n'a aucune solution.

(d) On multiplie chaque terme par 6, multiple commun de 3 et 2, sans oublier le terme 1 $\to 2(x + 4) = 3x + 6 \to 2x + 8 = 3x + 6 \to$ on soustrait $2x$ et 6 $\to 2 = x$. Vérification : $\frac{2+4}{3} = 2$ et $\frac{2}{2} + 1 = 2$ ✓. L'équation a pour solution 2.

(e) On développe $\to 5x + 5 - 3x + 6 = 0 \to 2x + 11 = 0 \to 2x = -11 \to x = -11 \div 2 = -5{,}5$. Vérification : $5 \times (-4{,}5) - 3 \times (-7{,}5) = -22{,}5 + 22{,}5 = 0$ ✓. L'équation a pour solution $-5{,}5$.

Ex. 4 ★★☆ **Repérer et corriger les erreurs**

(a) Membre de gauche : $9 \times 5 - 7 = 38$. Membre de droite : $4 \times 5 + 8 = 28$. $38 \neq 28$: 5 n'est pas solution, Inès s'est trompée.

(b) Ligne 1 : « passer -7 de l'autre côté » veut dire ajouter 7 aux deux membres ; on obtient $9x = 4x + 8 + 7$, et non -7. Ligne 3 : de $5x = 1$, on divise par 5 : $x = 1 \div 5$, et non 5.

(c) On ajoute 7 aux deux membres $\rightarrow 9x = 4x + 15 \rightarrow$ on soustrait $4x \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 15 \div 5 = 3$. Vérification dans l'équation de départ : $9 \times 3 - 7 = 20$ et $4 \times 3 + 8 = 20$ ✓. L'équation a pour solution 3.

(d) Non. Test : $4 \times 30 = 120 \neq 34$. $4x$ signifie $4 \times x$: on divise les deux membres par $4 \rightarrow x = 34 \div 4 = 8{,}5$ (et non $34 - 4$ ni $4 \div 34$). Vérification : $4 \times 8{,}5 = 34$ ✓. L'équation a pour solution 8,5.

Ex. 5 ★★★ **Tester n'est pas résoudre**

(a) Membre de gauche : $3 \times (2 - 4) + 2 \times 2 = -6 + 4 = -2$. Membre de droite : $5 \times 2 - 12 = -2$. Les deux membres sont égaux : 2 est solution de (E).

(b) Membre de gauche : $3 \times (-3 - 4) + 2 \times (-3) = -21 - 6 = -27$. Membre de droite : $5 \times (-3) - 12 = -15 - 12 = -27$. Les deux membres sont égaux : -3 est aussi solution de (E).

(c) On développe et on réduit le membre de gauche : $3x - 12 + 2x = 5x - 12 \rightarrow 5x - 12 = 5x - 12$. On soustrait $5x$ aux deux membres : $-12 = -12$, une égalité toujours vraie. Tous les nombres sont solutions : (E) a une infinité de solutions. Chloé a tort : tester un nombre qui convient ne prouve pas qu'il n'y en a pas d'autre.

(d) Par exemple, $3(x - 4) + 2x = 5x - 10$. On réduit : $5x - 12 = 5x - 10$. On soustrait $5x$ aux deux membres : $-12 = -10$, ce qui est faux quelle que soit la valeur de x. Cette équation n'a aucune solution. Tout nombre autre que -12 convient.

Ex. 6 ★★★ **Deux programmes de calcul**

(a) Programme A : $8 - 3 \times (-2) = 8 + 6 = 14$. Programme B : $2 \times (-2 + 5) = 2 \times 3 = 6$.

(b) Avec x, le programme A donne $8 - 3x$. Le coefficient de x est -3 (le signe fait partie du coefficient). Noé a tort.

Ex. 6 (suite)

(c) On résout $8 - 3x = -5$. On soustrait 8 aux deux membres : $-3x = -13$. On divise par -3, avec son signe : $x = \frac{-13}{-3} = \frac{13}{3}$. Il faut choisir $\frac{13}{3}$. La division ne tombe pas juste : $\frac{13}{3} \approx 4{,}33$ n'est qu'une valeur approchée. D'ailleurs $8 - 3 \times 4{,}33 = -4{,}99$, pas -5.

(d) On résout $8 - 3x = 2(x + 5) \rightarrow 8 - 3x = 2x + 10$. On ajoute $3x$ aux deux membres : $8 = 5x + 10$. On soustrait 10 : $-2 = 5x$. On divise par 5 : $x = \frac{-2}{5} = -0{,}4$. Vérification : A donne $8 - 3 \times (-0{,}4) = 9{,}2$ et B donne $2 \times (-0{,}4 + 5) = 9{,}2$ ✓. Il faut choisir $-0{,}4$.

Ex. 7 ★★★ **Salle d'escalade à Annecy**

(a) Tarif A : 19 € ; 47,50 € ; 95 €. Tarif B : $30 + 5{,}5 \times 2 = 41$ € ; 57,50 € ; 85 €.

(b) Le membre de gauche est le prix au tarif A, le membre de droite le prix au tarif B : $9{,}5x = 30 + 5{,}5x$.

(c) « Passer de l'autre côté », c'est soustraire $5{,}5x$ aux DEUX membres : $9{,}5x - 5{,}5x = 30 \rightarrow 4x = 30$. Max a ajouté $5{,}5x$ au lieu de le soustraire. On divise les deux membres par $4 \rightarrow x = 30 \div 4 = 7{,}5$ (et pas $4 \div 30$ ni $30 - 4$). Vérification : $9{,}5 \times 7{,}5 = 71{,}25$ et $30 + 5{,}5 \times 7{,}5 = 71{,}25$ ✓. L'équation a pour solution 7,5.

(d) Non : on ne fait pas 7,5 séances, les deux tarifs ne coûtent jamais le même prix. Pour 7 séances : A coûte 66,50 € et B coûte 68,50 €, donc A est moins cher. Pour 8 séances : A coûte 76 € et B coûte 74 €, donc B est moins cher. Le tarif A est plus avantageux jusqu'à 7 séances, le tarif B à partir de 8 séances.

(e) Pour 6 séances : $9{,}5 \times 6 = a + 5{,}5 \times 6 \rightarrow 57 = a + 33$. On soustrait 33 aux deux membres : $24 = a$. Vérification : $9{,}5 \times 6 = 57$ et $24 + 5{,}5 \times 6 = 57$ ✓. L'abonnement doit coûter 24 €.

2. *Développer et réduire avant de résoudre, équations avec des quotients*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : développer et réduire avant de résoudre**

(a) Le signe $-$ change tous les signes : $11 - 5x + 8 = 3x + 3 \rightarrow 19 - 5x = 3x + 3 \rightarrow$ on ajoute $5x$ et on soustrait 3 : $16 = 8x \rightarrow x = 2$. Vérification : $11 - (5 \times 2 - 8) = 9$ et $3 \times 2 + 3 = 9$ ✓. L'équation a pour solution 2.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Double distributivité (quatre produits) : $x^2 + 6x - 4x - 24 = x^2 - 2x + 1 \to x^2 + 2x - 24 = x^2 - 2x + 1 \to$ on soustrait x^2 : $2x - 24 = -2x + 1 \to 4x = 25 \to x = 6{,}25$. Vérification : $2{,}25 \times 12{,}25 = 27{,}5625$ et $6{,}25^2 - 2 \times 6{,}25 + 1 = 27{,}5625$ ✓. L'équation a pour solution 6,25.

(c) Attention au double produit : $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$, et non $x^2 + 49$. $x^2 + 14x + 49 = x^2 + 21 \to$ on soustrait x^2 : $14x + 49 = 21 \to 14x = -28 \to x = -2$. Vérification : $(-2 + 7)^2 = 25$ et $(-2)^2 + 21 = 25$ ✓. L'équation a pour solution -2.

(d) $6x - 2 - x + 5 = 5x + 3 \to 5x + 3 = 5x + 3$. Cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de x. L'équation a une infinité de solutions : tous les nombres.

(e) $2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 - 7 \to 2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 - 7 \to$ on soustrait $2x^2$: $5x - 3 = -7 \to 5x = -4 \to x = -0{,}8$. Vérification : $(-2{,}6) \times 2{,}2 = -5{,}72$ et $2 \times 0{,}64 - 7 = -5{,}72$ ✓. L'équation a pour solution $-0{,}8$.

(f) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$ et $x(x - 3) + 1 = x^2 - 3x + 1 \to x^2 - 9 = x^2 - 3x + 1 \to$ on soustrait x^2 : $-9 = -3x + 1 \to 3x = 10 \to x = \frac{10}{3}$. Vérification : $\frac{1}{3} \times \frac{19}{3} = \frac{19}{9}$ et $\frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9}$ ✓. L'équation a pour solution $\frac{10}{3}$.

(g) $5 - 2x - 3 = 4 - 4x + 2x \to 2 - 2x = 4 - 2x \to$ on ajoute $2x$: $2 = 4$, ce qui est faux. L'équation n'a aucune solution.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : équations avec des quotients**

(a) 18 est le plus petit multiple commun de 6 et de 9. On multiplie chaque terme par 18 : $3x + 2x = 270 \to 5x = 270 \to x = 54$. Vérification : $54 \div 6 + 54 \div 9 = 9 + 6 = 15$ ✓. L'équation a pour solution 54.

(b) On multiplie chaque terme par 5, sans oublier le 3 : $x + 15 = 5x \to 15 = 4x \to x = \frac{15}{4} = 3{,}75$. Vérification : $3{,}75 \div 5 + 3 = 0{,}75 + 3 = 3{,}75$ ✓. L'équation a pour solution $\frac{15}{4}$.

(c) On multiplie les deux membres par 12, avec les numérateurs entre parenthèses : $3(3x - 1) = 4(x + 2) \to 9x - 3 = 4x + 8 \to 5x = 11 \to x = \frac{11}{5} = 2{,}2$. Vérification : $(6{,}6 - 1) \div 4 = 1{,}4$ et $(2{,}2 + 2) \div 3 = 1{,}4$ ✓. L'équation a pour solution $\frac{11}{5}$.

(d) On multiplie chaque terme par 6 : $3x - 2(x - 1) = 12 \to 3x - 2x + 2 = 12 \to x + 2 = 12 \to x = 10$. Vérification : $10 \div 2 - 9 \div 3 = 5 - 3 = 2$ ✓. L'équation a pour solution 10.

Ex. 9 **(suite)**

(e) On multiplie chaque terme par 12, y compris le 1 : $2(2x + 5) = 3x - 12 \to 4x + 10 = 3x - 12 \to x = -22$. Vérification : $(-44 + 5) \div 6 = -6{,}5$ et $-22 \div 4 - 1 = -6{,}5$ ✓. L'équation a pour solution -22.

(f) On multiplie chaque terme par 12 : $30 - 4x = 3x \to$ on ajoute $4x$: $30 = 7x \to x = \frac{30}{7}$. Vérification : $\frac{5}{2} - \frac{10}{7} = \frac{15}{14}$ et $\frac{30}{7} \div 4 = \frac{15}{14}$ ✓. L'équation a pour solution $\frac{30}{7}$.

Ex. 10 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur d'un élève**

(a) Léna a oublié le double produit : $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$. $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 3x \to$ on soustrait x^2 : $12x + 36 = 3x \to 9x = -36 \to x = -4$. Vérification : $(-4 + 6)^2 = 4$ et $16 - 12 = 4$ ✓. L'équation a pour solution -4.

(b) Malo n'a pas multiplié le 5 par 4 : il faut multiplier chaque terme. $x + 20 = 2x \to x = 20$. Vérification : $20 \div 4 + 5 = 10$ et $20 \div 2 = 10$ ✓. L'équation a pour solution 20.

(c) Il reste un x^2 : ce n'est pas une équation du premier degré. Inès a divisé par x, qui peut valoir 0 : elle perd une solution. $x^2 - 7x = 0 \to x(x - 7) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x - 7 = 0$, soit $x = 7$. Vérification : $0 \times (-5) = 0 = 2 \times 0$ et $7 \times 2 = 14 = 2 \times 7$ ✓. L'équation a pour solutions 0 et 7.

(d) $(x - 4)(x + 2) = x^2 - 2x - 8$. Théo n'a changé que le premier signe : $-(x^2 - 2x - 8) = -x^2 + 2x + 8$. $3 - x^2 + 2x + 8 = 1 - x^2 \to$ on ajoute x^2 : $11 + 2x = 1 \to 2x = -10 \to x = -5$. Vérification : $3 - (-9) \times (-3) = -24$ et $1 - 25 = -24$ ✓. L'équation a pour solution -5.

Ex. 11 ★★☆ **Deux potagers de même aire**

(a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ (sans oublier le double produit $6x$). L'aire du potager de Yanis est $x^2 + 6x + 9$ m².

(b) $(x + 8)(x - 1) = x^2 - x + 8x - 8 = x^2 + 7x - 8$. L'aire du potager de Sofia est $x^2 + 7x - 8$ m².

(c) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 7x - 8 \to$ on soustrait x^2 : $6x + 9 = 7x - 8 \to 17 = x$. Vérification : $(17 + 3)^2 = 400$ et $25 \times 16 = 400$ ✓. Les deux potagers ont la même aire, 400 m², pour $x = 17$.

(d) Faux. Pour $x = 17$, le périmètre du potager de Yanis est $4 \times 20 = 80$ m et celui du potager de Sofia est $2 \times (25 + 16) = 82$ m. Même aire ne veut pas dire même périmètre.

Ex. 12 ★★★ **Deux programmes de calcul qui se croisent**

(a) Programme A : $3+2=5 \to 5^2=25 \to 25-4=21$.
Programme B : $3-3=0$ et $3+5=8 \to 0\times 8=0$.
Comme $21\neq 0$, Mia n'obtient pas le même résultat.

(b) $(x+2)^2=(x+2)(x+2)=x^2+2x+2x+4=x^2+4x+4$.
Donc le programme A donne $x^2+4x+4-4=x^2+4x$. Alex a oublié le double produit $4x$: il a tort. Par exemple, avec 3 on obtient 21, et non $3^2=9$.

(c) Programme B : $(x-3)(x+5)=x^2+5x-3x-15=x^2+2x-15$. On résout $x^2+4x=x^2+2x-15$. On soustrait x^2 aux deux membres : $4x=2x-15 \to$ on soustrait $2x$: $2x=-15 \to x=-\frac{15}{2}=-7{,}5$.
Vérification : A donne $(-7{,}5+2)^2-4=30{,}25-4=26{,}25$; B donne $(-10{,}5)\times(-2{,}5)=26{,}25$ ✓. Le nombre de départ cherché est $-7{,}5$.

(d) Test de 0 : A donne $(0+2)^2-4=0$ et $3\times 0=0$: 0 est solution. Lou l'a perdu en divisant par x (on ne divise jamais par x, qui peut valoir 0). Résolution : $(x+2)^2-4=3x \to x^2+4x=3x \to x^2+x=0 \to x(x+1)=0$.
Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x=0$ ou $x+1=0$, soit $x=-1$.
Vérification pour -1 : $(-1+2)^2-4=-3$ et $3\times(-1)=-3$ ✓. L'équation a pour solutions 0 et -1.

Ex. 13 ★★★ **L'argent d'anniversaire de Noé**

(a) Le billet coûte $\frac{x}{3}$ €, les livres $\frac{x}{5}$ € et il reste 28 €. Les dépenses plus le reste redonnent la somme reçue x : $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+28=x$.

(b) Le plus petit multiple commun de 3 et de 5 est 15. On multiplie CHAQUE terme par 15, y compris 28 et x : $15\times 28=420$. L'équation correcte est $5x+3x+420=15x$.

(c) $5x+3x+420=15x \to 8x+420=15x \to$ on soustrait $8x$: $420=7x \to x=60$. Vérification : $60\div 3=20$; $60\div 5=12$; $20+12+28=60$ ✓. Noé a reçu 60 €.

(d) On résout $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+30=x$. On multiplie chaque terme par 15 : $5x+3x+450=15x \to 450=7x \to x=\frac{450}{7}$. Or $\frac{450}{7}\approx 64{,}2857$ ne s'écrit pas avec un nombre entier de centimes : aucune somme d'argent ne convient. Ce n'est pas possible.

Ex. 14 ★★★ **Une, aucune ou une infinité de solutions ?**

(a) Membre de gauche : $2x^2+8x-3x-12-2x^2=5x-12$ (les $2x^2$ s'annulent). Membre de droite : $3x-3-x-7=2x-10$ (le signe $-$ change les deux signes). On résout : $5x-12=2x-10 \to 3x=2 \to x=\frac{2}{3}$.
Vérification : à gauche $\left(-\frac{5}{3}\right)\times\frac{14}{3}-\frac{8}{9}=-\frac{78}{9}=-\frac{26}{3}$; à droite $-1-\frac{23}{3}=-\frac{26}{3}$ ✓. L'équation a pour solution $\frac{2}{3}$.

(b) Le plus petit multiple commun de 3 et de 6 est 6. On multiplie chaque terme par 6 en gardant les numérateurs entre parenthèses : $2(x+2)-(2x-1)=5 \to 2x+4-2x+1=5 \to 5=5$. C'est toujours vrai : tout nombre est solution, l'équation a une infinité de solutions. Vérification avec 0 : $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ ✓.
(Sans parenthèses, on écrirait $-2x-1$ et on trouverait à tort $3=5$.)

(c) Test de $-3{,}6$: à gauche $(-8{,}6)^2=73{,}96$; à droite $(-2{,}6)\times(-14{,}6)=37{,}96$. Les membres sont différents : c'est faux. Résolution : $x^2-10x+25=x^2-11x+x-11 \to x^2-10x+25=x^2-10x-11 \to$ on soustrait x^2 et on ajoute $10x$: $25=-11$, ce qui est impossible. L'équation n'a aucune solution. Nora a oublié le double produit $-10x$.

(d) À gauche : $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$; à droite : $4x(x+1)+c=4x^2+4x+c$. On soustrait $4x^2$ et $4x$ aux deux membres : $1=c$. Si $c=1$, l'égalité est toujours vraie : une infinité de solutions. Si $c\neq 1$, elle est toujours fausse : aucune solution. Les x disparaissent toujours, donc on n'obtient jamais une seule solution : on ne peut pas choisir c pour que 4 soit la seule solution.

3. *Équation produit nul*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : résoudre une équation produit nul**

(a) Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x+6=0$ ou $x-9=0 \to x=-6$ ou $x=9$. L'équation a pour solutions -6 et 9.

(b) Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x=0$ ou $4x-14=0 \to x=0$ ou $4x=14 \to x=0$ ou $x=3{,}5$. L'équation a pour solutions 0 et 3,5
(n'oublie pas la solution 0).

Ex. 15 **(suite)**

(c) Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $3x + 2 = 0$ ou $7x - 5 = 0 \to 3x = -2$ ou $7x = 5 \to x = -\frac{2}{3}$ ou $x = \frac{5}{7}$. L'équation a pour solutions $-\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$.

(d) Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. Le facteur -5 n'est jamais nul, donc $x + 7 = 0 \to x = -7$. L'équation a une seule solution : -7.

(e) $(2x - 9)^2 = (2x - 9)(2x - 9)$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : les deux facteurs donnent $2x - 9 = 0 \to 2x = 9 \to x = 4{,}5$. L'équation a une seule solution : 4,5.

(f) Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x - 2 = 0$ ou $x + 8 = 0$ ou $5x + 4 = 0 \to x = 2$ ou $x = -8$ ou $5x = -4 \to x = 2$ ou $x = -8$ ou $x = -0{,}8$. L'équation a trois solutions : -8 ; $-0{,}8$; 2.

(g) On lit l'équation dans l'autre sens : $(1 - 4x)(x + 0{,}5) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $1 - 4x = 0$ ou $x + 0{,}5 = 0 \to 1 = 4x$ ou $x = -0{,}5 \to x = 0{,}25$ ou $x = -0{,}5$. L'équation a pour solutions $-0{,}5$ et 0,25.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Faux. La propriété du produit nul ne s'applique qu'avec « $= 0$ », et ici le second membre vaut 5. On teste les valeurs tirées de « $x - 4 = 5$ ou $x + 2 = 5$ », c'est-à-dire 9 et 3 : $(9 - 4) \times (9 + 2) = 5 \times 11 = 55 \neq 5$ et $(3 - 4) \times (3 + 2) = (-1) \times 5 = -5 \neq 5$. Aucune n'est solution.

(b) Faux. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x + 10 = 0$ ou $x - 1 = 0 \to x = -10$ ou $x = 1$. Test de 10 : $(10 + 10) \times (10 - 1) = 20 \times 9 = 180 \neq 0$. Les solutions sont -10 et 1.

(c) Faux. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. Le facteur 8 n'est jamais nul, donc $x - 2{,}5 = 0 \to x = 2{,}5$. Il y a une seule solution : 2,5.

(d) Vrai. Je teste 0 : $0 \times (6 \times 0 + 11) = 0 \times 11 = 0$. Le membre de gauche vaut bien 0, comme celui de droite.

(e) Vrai. $(5x + 3)^2 = (5x + 3)(5x + 3)$: un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul, et les deux facteurs donnent $5x + 3 = 0 \to 5x = -3 \to x = -0{,}6$. Une seule solution : $-0{,}6$.

Ex. 16 **(suite)**

(f) Faux. On écrit « ou » : x ne peut pas valoir 3 et -7 à la fois. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x - 3 = 0$ ou $x + 7 = 0 \to x = 3$ ou $x = -7$. L'équation a pour solutions -7 et 3.

Ex. 17 ★★☆ **Corriger les erreurs**

(a) Son développement est juste, mais en 3e on ne sait pas résoudre $2x^2 + 5x - 12 = 0$: il faut garder la forme produit. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $2x - 3 = 0$ ou $x + 4 = 0 \to 2x = 3$ ou $x = -4 \to x = 1{,}5$ ou $x = -4$. L'équation a pour solutions -4 et 1,5.

(b) Pour 16 : $(16 - 6) \times (16 + 1) = 10 \times 17 = 170 \neq 10$. Pour 9 : $(9 - 6) \times (9 + 1) = 3 \times 10 = 30 \neq 10$. Aucune des deux n'est solution : la propriété du produit nul ne s'applique qu'avec « $= 0$ », et ici le second membre vaut 10.

(c) On ne divise jamais par x : x peut valoir 0. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $3x - 12 = 0 \to x = 0$ ou $3x = 12 \to x = 0$ ou $x = 4$. Tom a oublié la solution 0 ; les solutions sont 0 et 4.

(d) Erreur de signe : $x + 5 = 0$ donne $x = -5$, pas 5. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x + 5 = 0$ ou $4x - 3 = 0 \to x = -5$ ou $4x = 3 \to x = -5$ ou $x = 0{,}75$. Vérification pour -5 : $(-5 + 5) \times (4 \times (-5) - 3) = 0 \times (-23) = 0$ ✓. Les solutions sont -5 et 0,75.

Ex. 18 ★★☆ **Équations à construire**

(a) Par exemple $(x + 2)(x - 7) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x + 2 = 0$ ou $x - 7 = 0 \to x = -2$ ou $x = 7$. Ce sont bien les deux solutions.

(b) Par exemple $(3x - 2)^2 = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : les deux facteurs donnent $3x - 2 = 0 \to 3x = 2 \to x = \frac{2}{3}$. Une seule solution. ($4(3x - 2) = 0$ convient aussi : le facteur 4 n'est jamais nul.)

(c) Pour $x = -1{,}5$: $2 \times (-1{,}5) = -3$, donc il faut écrire $2x + 3$. Pour $x = 4$, il faut écrire $x - 4$. On obtient $x(2x + 3)(x - 4) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $2x + 3 = 0$ ou $x - 4 = 0 \to x = 0$ ou $x = -1{,}5$ ou $x = 4$. Trois facteurs, trois solutions.

Ex. 18 **(suite)**

(d) Soit a le nombre cherché. Il faut que $a \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 3 = 0 \to -\frac{3}{4}a = -3 \to a = 4$. On obtient $(x-5)(4x+3) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x - 5 = 0$ ou $4x + 3 = 0 \to x = 5$ ou $4x = -3 \to x = 5$ ou $x = -\frac{3}{4}$. Le nombre manquant est 4.

Ex. 19 ★★★ **Une expression, trois équations**

(a) $E = (9x^2 + 12x + 4) - (x^2 + 8x + 16) \to E = 9x^2 + 12x + 4 - x^2 - 8x - 16 \to E = 8x^2 + 4x - 12$.

(b) Avec $a = 3x + 2$ et $b = x + 4$: $E = \big((3x+2) - (x+4)\big)\big((3x+2) + (x+4)\big) \to E = (3x + 2 - x - 4)(3x + 2 + x + 4) \to E = (2x-2)(4x+6)$.

(c) Je prends la forme factorisée. Avec $8x^2 + 4x - 12 = 0$, on ne sait pas résoudre en 3e. $(2x-2)(4x+6) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $2x - 2 = 0$ ou $4x + 6 = 0 \to 2x = 2$ ou $4x = -6 \to x = 1$ ou $x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$. Vérification pour 1 : $(2 \times 1 - 2) \times (4 \times 1 + 6) = 0 \times 10 = 0$ ✓.
L'équation a pour solutions 1 et $-\frac{3}{2}$.

(d) Je prends la forme développée : le -12 disparaît. $8x^2 + 4x - 12 = -12 \to 8x^2 + 4x = 0 \to 4x(2x+1) = 0$. On factorise, on ne divise pas par x : sinon on perdrait la solution 0. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $4x = 0$ ou $2x + 1 = 0 \to x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Vérification pour 0 : $E = 2^2 - 4^2 = 4 - 16 = -12$ ✓. L'équation a pour solutions 0 et $-\frac{1}{2}$.

(e) Premier facteur : $2x - 2 = 4 \to 2x = 6 \to x = 3$. Pour $x = 3$: $E = (3 \times 3 + 2)^2 - (3+4)^2 = 121 - 49 = 72$, et $72 \neq 4$. Maël a tort : la propriété du produit nul ne s'applique qu'avec « $= 0$ ». Un produit égal à 4 ne veut pas dire qu'un facteur vaut 4.

Ex. 20 ★★★ **Deux programmes de calcul qui donnent 0**

(a) $2 + 4 = 6 \to 2 - 7 = -5 \to 6 \times (-5) = -30 \to 3 \times (-30) = -90$. Le programme A donne -90.

(b) Le résultat est $3(x+4)(x-7)$. On garde cette forme produit. En développant, on obtiendrait $3x^2 - 9x - 84$: on ne saurait plus résoudre l'équation en 3e.

(c) $3(x+4)(x-7) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. Le facteur 3 n'est jamais nul, donc $x + 4 = 0$ ou $x - 7 = 0 \to x = -4$ ou $x = 7$. Attention au signe : $x + 4 = 0$ donne -4, pas 4. Vérification pour -4 : $3 \times 0 \times (-11) = 0$ ✓. Il faut choisir -4 ou 7.

Ex. 20 **(suite)**

(d) Non. Aucun nombre n'annule les deux facteurs à la fois : pour -4, on a $x - 7 = -11$, et pour 7, on a $x + 4 = 11$. Il suffit qu'UN facteur soit nul. On écrit « $x + 4 = 0$ ou $x - 7 = 0$ », avec « ou » et pas « et ». Chacun des deux nombres donne 0.

(e) Le résultat de B est $x(5x-2)^2$, c'est-à-dire $x(5x-2)(5x-2)$. $x(5x-2)^2 = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $5x - 2 = 0$. Les deux derniers facteurs donnent la même équation. $5x - 2 = 0 \to 5x = 2 \to x = \frac{2}{5} = 0{,}4$. N'oublie pas la solution 0. Il faut choisir 0 ou $\frac{2}{5}$.

Ex. 21 ★★★ **Les boîtes de Lou**

(a) Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x - 4 = 0$ ou $2x - 11 = 0 \to x = 0$ ou $x = 4$ ou $2x = 11 \to x = 0$ ou $x = 4$ ou $x = \frac{11}{2} = 5{,}5$. Il y a trois facteurs, donc trois solutions : 0, 4 et $\frac{11}{2}$.

(b) Pour $x = 0$: les dimensions sont 0, -4 et -11. Pour $x = 4$: 4, 0 et -3. Pour $x = 5{,}5$: 5,5, 1,5 et 0. À chaque fois, une dimension est nulle ou négative : la boîte n'existe pas. Le volume nul est une solution mathématique, mais pas une vraie boîte.

(c) Non. $x(x-4)(2x-11) = x(x-4)(x+1) \to x(x-4)(2x-11) - x(x-4)(x+1) = 0 \to x(x-4)\big((2x-11) - (x+1)\big) = 0 \to x(x-4)(x-12) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x = 4$ ou $x = 12$. En divisant par $x(x-4)$, qui peut valoir 0, Rayan a perdu les solutions 0 et 4. L'équation a pour solutions 0, 4 et 12.

(d) Pour 0 et 4, une dimension est nulle : il n'y a pas de boîte. Pour $x = 12$, A mesure 12 cm, 8 cm et 13 cm, et B mesure 12 cm, 8 cm et 13 cm. Volume : $12 \times 8 \times 13 = 1\,248$ cm³ pour chacune. Les deux boîtes ont le même volume, 1 248 cm³, pour $x = 12$.

4. *Factoriser pour se ramener à un produit nul*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : factoriser par un facteur commun**

(a) $x^2 - 9x = 0 \to x(x-9) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x - 9 = 0$, donc $x = 9$. Attention : si on divise par x, on perd la solution 0. L'équation a pour solutions 0 et 9.

Ex. 22 **(suite)**

(b) $5x(x+3)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $5x=0$ ou $x+3=0$ $\to x=0$ ou $x=-3$. L'équation a pour solutions 0 et -3.

(c) $6x^2-4x=0 \to 2x(3x-2)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $2x=0$ ou $3x-2=0 \to x=0$ ou $x=\frac{2}{3}$. L'équation a pour solutions 0 et $\frac{2}{3}$.

(d) On ramène tout dans le premier membre : $3x^2-2x-4x=0 \to 3x^2-6x=0 \to 3x(x-2)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $3x=0$ ou $x-2=0$. L'équation a pour solutions 0 et 2.

(e) $x(0{,}2x+1)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x=0$ ou $0{,}2x+1=0 \to 0{,}2x=-1 \to x=-5$. L'équation a pour solutions 0 et -5.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : différence de deux carrés**

(a) $x^2-7^2=0 \to (x+7)(x-7)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x+7=0$ ou $x-7=0$. L'équation a pour solutions -7 et 7.

(b) On ramène tout dans un membre : $4x^2-81=0 \to (2x)^2-9^2=0 \to (2x+9)(2x-9)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $2x=-9$ ou $2x=9$. L'équation a pour solutions $-4{,}5$ et $4{,}5$.

(c) $(x-4)^2-5^2=0 \to (x-4+5)(x-4-5)=0 \to (x+1)(x-9)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x+1=0$ ou $x-9=0$. L'équation a pour solutions -1 et 9.

(d) $(3x+1)^2-2^2=0 \to (3x+1+2)(3x+1-2)=0 \to (3x+3)(3x-1)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $3x=-3$ ou $3x=1$. L'équation a pour solutions -1 et $\frac{1}{3}$.

(e) x^2+36 est une somme : elle ne se factorise pas avec a^2-b^2. Un carré est toujours positif ou nul, donc $x^2+36 \geqslant 36$: il ne peut jamais valoir 0. L'équation n'a aucune solution.

Ex. 24 ★★☆ **Une parenthèse commune**

(a) $(x-6)[(4x+1)-(x+7)]=0 \to (x-6)(4x+1-x-7)=0 \to (x-6)(3x-6)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x-6=0$ ou $3x-6=0$. L'équation a pour solutions 6 et 2.

(b) On ramène tout dans un membre : $(2x+5)(x-1)-(2x+5)(3x+7)=0 \to (2x+5)(x-1-3x-7)=0$ $\to (2x+5)(-2x-8)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $2x=-5$ ou $-2x=8$. L'équation a pour solutions $-2{,}5$ et -4.

(c) $(x+3)[(x+3)+(2x-9)]=0 \to (x+3)(3x-6)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x+3=0$ ou $3x-6=0$. L'équation a pour solutions -3 et 2. Contrôle : $(x+3)^2+(x+3)(2x-9)=x^2+6x+9+2x^2-3x-27=3x^2+3x-18$, et $(x+3)(3x-6)=3x^2-6x+9x-18=3x^2+3x-18$. Les deux écritures sont égales.

(d) $3x-12=3(x-4)$, donc l'équation s'écrit $3(x-4)(x+2)-(x-4)(2x+9)=0 \to (x-4)[3(x+2)-(2x+9)]=0 \to (x-4)(3x+6-2x-9)=0 \to (x-4)(x-3)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x-4=0$ ou $x-3=0$. Vérification pour 3 : $(-3)\times 5-(-1)\times 15=-15+15=0$. L'équation a pour solutions 4 et 3.

Ex. 25 ★★☆ **Vrai ou faux sur les produits nuls**

(a) Faux. $x^2-2{,}5x=0 \to x(x-2{,}5)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x=0$ ou $x=2{,}5$. L'équation a deux solutions, 0 et 2,5. L'affirmation oublie 0 : c'est ce qui arrive quand on divise par x.

(b) Faux. $(x+3)(x-3)=x^2-9$, et non x^2+9. Une somme x^2+9 ne se factorise pas avec a^2-b^2. De plus $x^2+9 \geqslant 9$, donc l'équation n'a aucune solution.

(c) Faux. Le second membre vaut 3, pas 0 : on ne peut pas appliquer la propriété du produit nul. Test avec 2 : $(2-2)(2+5)=0\times 7=0$, et $0\neq 3$, donc 2 n'est pas solution. Même chose avec -5 : $(-7)\times 0=0\neq 3$.

(d) Vrai. On ramène tout dans un membre : $x^2-5x-36+5x=0 \to x^2-36=0 \to (x+6)(x-6)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x=-6$ ou $x=6$. Les solutions -6 et 6 sont opposées.

Ex. 26 ★★★ **Les quatre erreurs de Malik**

(a) Erreur : diviser par x suppose que $x \neq 0$, et on perd la solution 0. Résolution correcte : $5x^2 = 3x \to 5x^2 - 3x = 0 \to x(5x-3) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $5x - 3 = 0$, soit $x = \frac{3}{5}$. Vérification : $5 \times 0^2 = 0 = 3 \times 0$. L'équation a pour solutions 0 et $\frac{3}{5}$.

(b) Erreur : simplifier par $(3x-4)$ revient à diviser par une expression qui peut être nulle, et on perd une solution. Résolution correcte : $(3x-4)(x+6) - (3x-4)(2x-1) = 0 \to (3x-4)[(x+6)-(2x-1)] = 0 \to (3x-4)(x+6-2x+1) = 0 \to (3x-4)(-x+7) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $3x - 4 = 0$ ou $-x + 7 = 0$, soit $x = \frac{4}{3}$ ou $x = 7$. Vérification pour $\frac{4}{3}$: $3 \times \frac{4}{3} - 4 = 0$, donc les deux membres valent 0. L'équation a pour solutions $\frac{4}{3}$ et 7.

(c) Erreur : un nombre dont le carré vaut 16 peut être 4 ou -4. Malik oublie le cas $2x - 3 = -4$. Résolution correcte : $(2x-3)^2 - 4^2 = 0 \to (2x-3+4)(2x-3-4) = 0 \to (2x+1)(2x-7) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $2x + 1 = 0$ ou $2x - 7 = 0$, soit $x = -0{,}5$ ou $x = 3{,}5$. Vérification pour $-0{,}5$: $(2 \times (-0{,}5) - 3)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$. L'équation a pour solutions $-0{,}5$ et $3{,}5$.

(d) Erreur : le signe $-$ placé devant la seconde parenthèse change tous les signes, donc $-(2x-3) = -2x + 3$, et non $-2x - 3$. Résolution correcte : $(x+1)[(x-7)-(2x-3)] = 0 \to (x+1)(x-7-2x+3) = 0 \to (x+1)(-x-4) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x + 1 = 0$ ou $-x - 4 = 0$, soit $x = -1$ ou $x = -4$. Contrôle : pour -10, le premier membre vaut -54, donc -10 n'est pas solution. L'équation a pour solutions -1 et -4.

Ex. 27 ★★★ **Choisir la bonne forme d'une expression**

(a) $E = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 - 49 \to E = 9x^2 + 12x + 4 - 49 \to E = 9x^2 + 12x - 45$.

(b) $E = (3x+2)^2 - 7^2 \to E = (3x+2+7)(3x+2-7) \to E = (3x+9)(3x-5)$. Contrôle : $(3x+9)(3x-5) = 9x^2 - 15x + 27x - 45 = 9x^2 + 12x - 45$. On retrouve bien le résultat de la question précédente.

Ex. 27 **(suite)**

(c) On utilise la forme factorisée : $(3x+9)(3x-5) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $3x + 9 = 0$ ou $3x - 5 = 0 \to x = -3$ ou $x = \frac{5}{3}$. Vérification : $(3 \times (-3) + 2)^2 - 49 = 49 - 49 = 0$. L'équation a pour solutions -3 et $\frac{5}{3}$.

(d) La forme développée est la plus adaptée, car le terme -45 apparaît dans les deux membres et s'élimine : $9x^2 + 12x - 45 = -45 \to 9x^2 + 12x = 0 \to 3x(3x+4) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $3x = 0$ ou $3x + 4 = 0 \to x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$. Attention : diviser par x ferait perdre la solution 0. Vérification : $(3 \times 0 + 2)^2 - 49 = -45$. L'équation a pour solutions 0 et $-\frac{4}{3}$.

Ex. 28 ★★★ **Deux programmes de calcul**

(a) Avec -2 : programme A, $(-2+3)^2 - 64 = 1 - 64 = -63$; programme B, $(-2-5) \times (-2) = 14$. Avec x : le programme A donne $(x+3)^2 - 64$ et le programme B donne $x(x-5)$.

(b) On résout $(x+3)^2 - 64 = 0 \to (x+3)^2 - 8^2 = 0 \to (x+3+8)(x+3-8) = 0 \to (x+11)(x-5) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x + 11 = 0$ ou $x - 5 = 0 \to x = -11$ ou $x = 5$. Vérification : $(-11+3)^2 - 64 = 64 - 64 = 0$. Il faut choisir -11 ou 5.

(c) Faux. On résout $x(x-5) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x - 5 = 0$. Le programme B donne aussi 0 si l'on choisit 0, car $0 \times (0-5) = 0$. Léo a oublié la solution 0.

(d) On ramène tout dans un membre : $(x+3)^2 - 64 - x(x-5) = 0 \to (x+11)(x-5) - x(x-5) = 0 \to (x-5)[(x+11) - x] = 0 \to 11(x-5) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : le facteur 11 n'est jamais nul, donc $x - 5 = 0$, soit $x = 5$. Contrôle en développant : $x^2 + 6x - 55 = x^2 - 5x \to 11x = 55 \to x = 5$. Seul le nombre 5 donne le même résultat avec les deux programmes (ce résultat est 0).

5. *Résoudre $x^2 = a$ par le calcul et graphiquement*

Ex. 29 ★☆☆ **Résoudre directement**

(a) $81 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x = \sqrt{81} = 9$ ou $x = -9$. L'équation a pour solutions 9 et -9.

(b) $-64 < 0$ et un carré n'est jamais négatif. -8 ne convient pas, car $(-8)^2 = 64$. L'équation n'a aucune solution.

(c) $1{,}44 > 0$, donc $x = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ ou $x = -1{,}2$. L'équation a pour solutions 1,2 et $-1{,}2$.

(d) $x^2 - 17 = 0 \to x^2 = 17$. $17 > 0$, donc $x = \sqrt{17}$ ou $x = -\sqrt{17}$. Valeurs approchées : $\sqrt{17} \approx 4{,}12$ et $-\sqrt{17} \approx -4{,}12$. L'équation a pour solutions $\sqrt{17}$ et $-\sqrt{17}$.

(e) J'isole x^2 : $49x^2 = 4 \to x^2 = \frac{4}{49}$. $\frac{4}{49} > 0$, donc $x = \sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$ ou $x = -\frac{2}{7}$. Vérification : $49 \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 = 49 \times \frac{4}{49} = 4$. L'équation a pour solutions $\frac{2}{7}$ et $-\frac{2}{7}$.

(f) J'isole d'abord x^2 : $2x^2 + 7 = 57 \to 2x^2 = 50 \to x^2 = 25$. $25 > 0$, donc $x = 5$ ou $x = -5$. Attention : $\sqrt{25}$ vaut seulement 5, mais l'équation a deux solutions. L'équation a pour solutions 5 et -5.

(g) $x^2 + 9 = 9 \to x^2 = 0$. Le seul nombre dont le carré vaut 0 est 0. L'équation a une seule solution : 0.

Ex. 30 ★☆☆ **Carrés et racines : vrai ou faux ?**

(a) Faux. $50^2 = 2\,500$ et non 100. On a $\sqrt{100} = 10$ (et pas $100 \div 2$). L'équation a pour solutions 10 et -10.

(b) Faux. $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, alors que $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$. On ne peut pas séparer la racine d'une somme.

(c) Faux. Dans -3^2, seul 3 est au carré : $-3^2 = -9$. C'est $(-3)^2$ qui vaut 9.

(d) Faux. $(-13)^2 = 169$ et non -169. Un carré n'est jamais négatif : l'équation $x^2 = -169$ n'a aucune solution.

(e) Faux. 14 est bien une solution, car $(14 - 3)^2 = 11^2 = 121$. Mais $x - 3 = 11$ ou $x - 3 = -11 \to x = 14$ ou $x = -8$. Vérification : $(-8 - 3)^2 = (-11)^2 = 121$. L'équation a deux solutions : 14 et -8.

(f) Faux. $3{,}32^2 = 11{,}022\,4 \neq 11$. On écrit $\sqrt{11} \approx 3{,}32$: c'est une valeur approchée, pas la valeur exacte.

(g) Faux. $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$. Comme $49 < 60 < 64$, on a $7 < \sqrt{60} < 8$.

Ex. 31 ★★☆ **Lire un graphique, puis confirmer par le calcul**

(a) Ce sont les abscisses des points d'intersection : ce sont donc des solutions approchées de $x^2 = 6$. Ce ne sont pas des valeurs exactes, car $2{,}4^2 = 5{,}76 \neq 6$. Une lecture graphique ne donne que des valeurs approchées.

(b) $6 > 0$, donc $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$. Valeurs approchées : $\sqrt{6} \approx 2{,}45$ et $-\sqrt{6} \approx -2{,}45$. Cela confirme la lecture graphique. L'équation a pour solutions $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.

(c) La droite ne coupe pas la parabole, donc il n'y a aucune solution. Par le calcul : $-3 < 0$ et un carré n'est jamais négatif. L'équation $x^2 = -3$ n'a aucune solution.

(d) J'isole d'abord x^2 : $5x^2 - 8 = 72 \to 5x^2 = 80 \to x^2 = 16$. Nina doit tracer la droite d'équation $y = 16$. $16 > 0$, donc $x = 4$ ou $x = -4$. Vérification : $5 \times 4^2 - 8 = 80 - 8 = 72$ et $5 \times (-4)^2 - 8 = 72$. L'équation a pour solutions 4 et -4.

Ex. 32 ★★☆ **Le potager et le bassin d'Inès**

(a) Le nouveau côté mesure $x + 2$ mètres. L'aire d'un carré est égale au carré de son côté, donc $(x + 2)^2 = 56{,}25$.

(b) Le nombre $x + 2$ a pour carré 56,25.
Donc $x + 2 = 7{,}5$ ou $x + 2 = -7{,}5$, car $\sqrt{56{,}25} = 7{,}5$.
$\to x = 5{,}5$ ou $x = -9{,}5$. L'équation a pour solutions 5,5 et $-9{,}5$.

(c) Une longueur est positive, donc la solution $-9{,}5$ ne convient pas. Vérification : $(5{,}5 + 2)^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$. Le potager de départ a un côté de 5,5 m.

(d) $\pi \times r^2 = 12 \to r^2 = \frac{12}{\pi}$. Un rayon est positif, donc je garde seulement la solution positive : $r = \sqrt{\frac{12}{\pi}}$ (valeur exacte). Valeur approchée : $r \approx 1{,}95$ m. Le rayon du bassin mesure environ 1,95 m.

Ex. 33 ★★☆ **La copie de Malo**

(a) Réponse incomplète. Malo a bien isolé x^2, mais il a oublié une solution : $\sqrt{9}$ désigne seulement le nombre positif 3, alors que l'équation $x^2 = 9$ a deux solutions.
$4x^2 + 11 = 47 \to 4x^2 = 36 \to x^2 = 9$. Comme $9 > 0$: $x = 3$ ou $x = -3$. Vérification : $4 \times 3^2 + 11 = 47$ et $4 \times (-3)^2 + 11 = 36 + 11 = 47$. L'équation a pour solutions 3 et -3.

(b) Faux : Malo a confondu $x^2 = 36$ avec $2x = 36$.
D'ailleurs $18^2 = 324$, et pas 36. Comme $36 > 0$: $x = \sqrt{36} = 6$ ou $x = -6$. Vérification : $6^2 = 36$ et $(-6)^2 = 36$. L'équation a pour solutions 6 et -6.

Ex. 33 **(suite)**

(c) Faux : $-5^2 = -(5^2) = -25$, mais quand on remplace x par -5, on calcule $(-5)^2 = 25$, et pas -25. $x^2 + 31 = 6 \to x^2 = 6 - 31 \to x^2 = -25$. Un carré n'est jamais négatif : l'équation n'a aucune solution.

(d) Faux : quand $a = 0$, il y a une solution. $7x^2 = 0 \to x^2 = 0 \to x = 0$. Vérification : $7 \times 0^2 = 0$. L'équation a une seule solution : 0.

Ex. 34 ★★★ **La terrasse de Lou à Annecy**

(a) $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$. Comme $36 < 42 < 49$, on a $6 < \sqrt{42} < 7$.

(b) $c^2 = 42$. Comme $42 > 0$: $c = \sqrt{42}$ ou $c = -\sqrt{42}$. Une longueur est positive, donc je garde la solution positive. Le côté de la terrasse mesure $\sqrt{42}$ m, soit environ 6,48 m
(cohérent avec l'encadrement entre 6 et 7).

(c) Non : $6{,}48^2 = 41{,}9904$, et pas 42.
Donc 6,48 n'est pas la valeur exacte, c'est une valeur approchée. Il faut écrire $c = \sqrt{42}$ m ou $c \approx 6{,}48$ m.

(d) $C^2 = 84$. Comme $84 > 0$: $C = \sqrt{84}$ ou $C = -\sqrt{84}$. Une longueur est positive, donc je garde la solution positive : $C = \sqrt{84}$ m, soit environ 9,17 m. Le côté n'a pas doublé : si le côté doublait, l'aire serait $(2c)^2 = 4c^2 = 4 \times 42 = 168$ m², et pas 84 m².

(e) Non : la racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées. D'ailleurs $5{,}6^2 = 31{,}36$, et pas 16. $d^2 = 5{,}76 + 10{,}24 \to d^2 = 16 \to d = 4$ ou $d = -4$. Une longueur est positive, donc je garde 4. La guirlande mesure 4 m.

Ex. 35 ★★★ **Le programme de calcul de Yanis**

(a) $x \to x - 4 \to (x-4)^2 \to 3(x-4)^2$. Le résultat est $3(x-4)^2$.

(b) $3(x-4)^2 = 75 \to (x-4)^2 = 25$. Comme $25 > 0$: $x - 4 = 5$ ou $x - 4 = -5 \to x = 9$ ou $x = -1$. Vérification : $3 \times (9-4)^2 = 3 \times 25 = 75$ et $3 \times (-1-4)^2 = 3 \times 25 = 75$. Il faut choisir 9 ou -1.

(c) $3(x-4)^2 = 0 \to (x-4)^2 = 0 \to x - 4 = 0 \to x = 4$. Vérification : $3 \times (4-4)^2 = 0$. Un seul nombre permet d'obtenir 0 : le nombre 4.

(d) $3(x-4)^2 = -12 \to (x-4)^2 = -4$. Un carré n'est jamais négatif : l'équation n'a aucune solution. On ne peut pas obtenir -12.

Ex. 35 **(suite)**

(e) $3(x-4)^2 = 21 \to (x-4)^2 = 7$. Le graphique donne environ $-2{,}6$ et 2,6 : ce sont des valeurs approchées des nombres dont le carré vaut 7, donc des valeurs possibles de $x - 4$, pas de x. D'ailleurs $3 \times (2{,}6 - 4)^2 = 5{,}88$, et pas 21. $x - 4 = \sqrt{7}$ ou $x - 4 = -\sqrt{7} \to x = 4 + \sqrt{7}$ ou $x = 4 - \sqrt{7}$. Il faut choisir $4 + \sqrt{7} \approx 6{,}65$ ou $4 - \sqrt{7} \approx 1{,}35$.

6. *Inéquations du premier degré (complément)*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : résoudre une inéquation**

(a) On soustrait 7 aux deux membres, le sens ne change pas : $x > 3 - 7 \to x > -4$. Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à -4.

(b) On divise par 4, qui est positif, donc le sens ne change pas : $x \leqslant \frac{18}{4} \to x \leqslant \frac{9}{2}$, soit $x \leqslant 4{,}5$.

(c) On divise par -5, qui est négatif, donc on change le sens : $x > \frac{30}{-5} \to x > -6$.

(d) On ajoute 9 : $21 \geqslant 3x \to$ on divise par 3, positif : $7 \geqslant x$, c'est-à-dire $x \leqslant 7$.

(e) On soustrait 6 : $-2x \geqslant -5 \to$ on divise par -2, négatif, et on change le sens : $x \leqslant \frac{5}{2}$, soit $x \leqslant 2{,}5$.

(f) On multiplie par $-\frac{4}{3}$, négatif, et on change le sens : $x < 6 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \to x < -8$.

(g) On soustrait 1,2 : $0{,}5x \leqslant 1{,}5 \to$ on divise par 0,5, positif : $x \leqslant 3$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : la borne et la droite graduée**

(a) On calcule le membre de gauche : $2 \times (-3) + 5 = -1$. « $-1 \geqslant -1$ » est vrai.
Donc -3 est solution.

(b) Pour $x = -3$, le membre de gauche vaut $2 \times (-3) + 5 = -1$. « $-1 > -1$ » est faux.
Donc -3 n'est pas solution : l'inégalité est stricte.

(c) Non. D'abord, une inéquation a en général une infinité de solutions : $x - 2 < 5 \to x < 7$, donc ce sont tous les nombres strictement inférieurs à 7. Ensuite, 7 n'en fait pas partie : $7 - 2 = 5$, et « $5 < 5$ » est faux.

(d) $3x - 4 \leqslant 2 \to 3x \leqslant 6 \to x \leqslant 2$. On colorie la partie à gauche de 2. Le crochet en 2 est tourné vers la gauche, vers la partie coloriée, car 2 est solution.

Ex. 37 **(suite)**

(e) $-x+1<2 \to -x<1 \to$ on multiplie par -1, négatif, et on change le sens : $x>-1$. On colorie la partie à droite de -1. Le crochet en -1 est tourné vers la gauche, vers l'extérieur, car -1 n'est pas solution.

(f) La partie coloriée est à gauche de 1, donc ce sont les nombres inférieurs à 1. Le crochet est tourné vers l'extérieur, donc 1 est exclu. C'est $x<1$.

Ex. 38 ★★☆ **Erreurs d'élèves sur les inéquations**

(a) Hugo divise par -4, qui est négatif, sans changer le sens. Correction : $-4x \geqslant 28 \to x \leqslant -7$. Vérification de la borne : $7-4\times(-7)=35$, et « $35 \geqslant 35$ » est vrai.

(b) Non. Soustraire un même nombre aux deux membres ne change pas le sens. $x+6<-4 \to x<-10$. Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à -10.

(c) On soustrait $5x$: $-2>3x+13 \to$ on soustrait 13 : $-15>3x \to$ on divise par 3, positif : $-5>x$, c'est-à-dire $x<-5$.

(d) Nora a mal développé : $2(3-x)=6-2x$. Correction : $6-2x<10 \to -2x<4 \to$ on divise par -2, négatif, et on change le sens : $x>-2$.

Ex. 39 ★★☆ **Deux tarifs à la piscine**

(a) Tarif A : $8x$. Tarif B : $40+3{,}5x$. Pour 5 séances : $8\times 5=40$ € avec A et $40+3{,}5\times 5=57{,}50$ € avec B.

(b) $8x\leqslant 100 \to x\leqslant 12{,}5$. Le nombre de séances est entier, donc on arrondit vers le bas : on peut faire au plus 12 séances.

(c) $40+3{,}5x\leqslant 100 \to 3{,}5x\leqslant 60 \to x\leqslant \frac{120}{7}$, avec $\frac{120}{7}\approx 17{,}14$. On arrondit vers le bas : on peut faire au plus 17 séances.

(d) $40+3{,}5x<8x \to 40<4{,}5x \to x>\frac{80}{9}$, avec $\frac{80}{9}\approx 8{,}89$. On arrondit vers le haut : le tarif B est moins cher à partir de 9 séances. Il faut donc au moins 9 séances.

Ex. 40 ★★★ **Deux programmes de calcul à comparer**

(a) Programme A : $-1+3=2 \to 2^2=4 \to 4-(-1)^2=4-1=3$. Programme B : $-4\times(-1)=4 \to 4+29=33$. Avec -1, A donne 3 et B donne 33.

(b) Le programme A donne $(x+3)^2-x^2$. $\to (x+3)^2-x^2=x^2+6x+9-x^2 \to =6x+9$. Le terme en x^2 disparaît : le programme A donne bien $6x+9$.

Ex. 40 **(suite)**

(c) Le programme B donne $-4x+29$. On résout $-4x+29>15$. $\to$ On soustrait 29, le sens ne change pas : $-4x>-14$. $\to$ On divise par -4, un nombre négatif, donc on change le sens : $x<3{,}5$. Test de la borne : $-4\times 3{,}5+29=15$, et « $15>15$ » est faux, donc 3,5 n'est pas solution. Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à 3,5. Sur la droite, on colorie la partie à gauche de 3,5 ; le crochet en 3,5 est tourné vers l'extérieur (vers la droite) car 3,5 est exclu.

(d) On résout $6x+9\geqslant -4x+29$. $\to$ On ajoute $4x$ aux deux membres : $10x+9\geqslant 29$. $\to$ On soustrait 9 : $10x\geqslant 20$. $\to$ On divise par 10, positif, le sens ne change pas : $x\geqslant 2$. Test de la borne : A donne $6\times 2+9=21$ et B donne $-4\times 2+29=21$; « $21\geqslant 21$ » est vrai, donc 2 est solution. Les nombres qui conviennent sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 2.

(e) Non, Léa a tort. Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 2 : il y en a une infinité. Par exemple avec 5 : A donne $6\times 5+9=39$, B donne $-4\times 5+29=9$, et $39\geqslant 9$.
Donc 2 et 5 conviennent tous les deux.

Ex. 41 ★★★ **Inès économise, Noah dépense**

(a) Après x semaines, Inès a $85+12x$ euros et Noah a $260-15x$ euros.

(b) On résout $85+12x\geqslant 300$. $\to$ On soustrait 85 : $12x\geqslant 215$. $\to$ On divise par 12, positif : $x\geqslant \frac{215}{12}$, soit $x\approx 17{,}92$. Comme x est entier, on arrondit vers le haut. Vérification : après 17 semaines, $85+12\times 17=289$ € (pas assez) ; après 18 semaines, $85+12\times 18=301$ €. Inès pourra acheter la trottinette à partir de 18 semaines.

(c) On résout $260-15x\geqslant 45$. $\to$ On soustrait 260 : $-15x\geqslant -215$. $\to$ On divise par -15, négatif, donc on change le sens : $x\leqslant \frac{43}{3}$, soit $x\approx 14{,}33$. Comme x est entier, on arrondit vers le bas. Vérification : après 14 semaines, $260-15\times 14=50$ € ; après 15 semaines, $260-15\times 15=35$ €, c'est trop peu. Noah peut continuer pendant au plus 14 semaines.

(d) Mathis divise par -15, un nombre négatif, sans changer le sens. Correction : $260-15x<100 \to -15x<-160 \to x>\frac{32}{3}$, soit $x\approx 10{,}67$. Comme x est entier, on arrondit donc vers le haut, et non « au plus ».
Vérification : après 10 semaines, $260-15\times 10=110$ € ; après 11 semaines, $260-15\times 11=95$ €. Noah aura moins de 100 € à partir de 11 semaines.

Ex. 41 **(suite)**

(e) On résout $85 + 12x > 260 - 15x$. $\rightarrow$ On ajoute $15x$ aux deux membres : $85 + 27x > 260$. $\rightarrow$ On soustrait 85 : $27x > 175$. $\rightarrow$ On divise par 27, positif : $x > \frac{175}{27}$, soit $x \approx 6{,}48$. Vérification : après 6 semaines, Inès a 157 € et Noah 170 € ; après 7 semaines, Inès a 169 € et Noah 155 €. Inès aura plus d'argent que Noah à partir de 7 semaines.

Ex. 42 ★★★ **Vrai ou faux : cinq inéquations piégées**

(a) Faux. On ajoute 2,5 aux deux membres, et ajouter ne change pas le sens : $x \geqslant -6 + 2{,}5 \rightarrow x \geqslant -3{,}5$. Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à $-3{,}5$. Contre-exemple : 0 est solution car $0 - 2{,}5 = -2{,}5$ et $-2{,}5 \geqslant -6$, mais 0 n'est pas inférieur à $-3{,}5$.

(b) Faux. On teste -5 : $3 - 2 \times (-5) = 3 + 10 = 13$, et « $13 < 13$ » est faux. En résolvant : $-2x < 10 \rightarrow$ on divise par -2, négatif, on change le sens : $x > -5$. La borne -5 est exclue.

(c) Faux. On multiplie chaque terme par 6, positif, donc le sens ne change pas : $2x - 3(x - 1) > 12$. $\rightarrow 2x - 3x + 3 > 12$ (le signe $-$ devant la parenthèse change les signes). $\rightarrow -x + 3 > 12 \rightarrow -x > 9$. $\rightarrow$ On multiplie par -1, négatif, on change le sens : $x < -9$. Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à -9. Contre-exemple : 0 est supérieur à -9, mais $\frac{0}{3} - \frac{0-1}{2} = \frac{1}{2}$, et « $\frac{1}{2} > 2$ » est faux.

(d) Vrai. On développe : $2x + 10 \leqslant 2x + 7$. $\rightarrow$ On soustrait $2x$ aux deux membres : $10 \leqslant 7$. Cette inégalité est fausse quel que soit x : l'inéquation n'a aucune solution.

(e) Vrai. On développe le membre de gauche : $x^2 - 6x + 9 \geqslant x^2 - 6x$. $\rightarrow$ On soustrait $x^2 - 6x$ aux deux membres : $9 \geqslant 0$. Cette inégalité est vraie quel que soit x : tous les nombres sont solutions, il y en a une infinité.

7. *Mettre un problème en équation, exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Traduire une phrase par une équation**

(a) Soit x le plus petit des trois nombres. Les trois nombres sont x, $x + 1$ et $x + 2$. $x + (x + 1) + (x + 2) = 87 \rightarrow 3x + 3 = 87 \rightarrow 3x = 84 \rightarrow x = 28$. Vérification : $28 + 29 + 30 = 87$ ✓. Les trois nombres sont 28, 29 et 30.

(b) Soit x le nombre cherché. $51 = 3(x + 4) \rightarrow 51 = 3x + 12 \rightarrow 39 = 3x \rightarrow x = 13$. Vérification : $3 \times (13 + 4) = 3 \times 17 = 51$ ✓. Le nombre cherché est 13.

Ex. 43 **(suite)**

(c) Soit x le nombre cherché. $\frac{x}{4} + 3 = \frac{x}{3}$. On multiplie chaque terme par 12 : $3x + 36 = 4x \rightarrow 36 = x$. Vérification : $36 \div 4 + 3 = 12$ et $36 \div 3 = 12$ ✓. Le nombre cherché est 36.

(d) Soit x la durée de course, en minutes. Il faut la même unité dans les deux membres : 1,5 h = 90 min (et non 1,5). $x + 20 = 90 \rightarrow x = 70$. Vérification : $70 + 20 = 90$ min = 1,5 h ✓. Inès a couru 70 minutes.

(e) Soit x le prix d'un cahier, en euros. $3x + 1{,}5 = 2x + 4{,}2 \rightarrow x + 1{,}5 = 4{,}2 \rightarrow x = 2{,}7$. Vérification : $3 \times 2{,}7 + 1{,}5 = 9{,}6$ et $2 \times 2{,}7 + 4{,}2 = 9{,}6$ ✓. Un cahier coûte 2,70 €.

Ex. 44 ★☆☆ **La solution a-t-elle un sens ?**

(a) Soit x le nombre de tables. $4x + 6 = 16 \rightarrow 4x = 10 \rightarrow x = 2{,}5$. Un nombre de tables doit être entier : 2,5 tables n'a pas de sens. L'énoncé contient une erreur, ou le problème n'a pas de solution.

(b) Soit x l'âge de Zoé, en années. Dans 5 ans, elle aura $x + 5$ ans. Il y a 3 ans, elle avait $x - 3$ ans. $x + 5 = 2(x - 3) \rightarrow x + 5 = 2x - 6 \rightarrow 11 = x$. Vérification : $11 + 5 = 16$ et $2 \times (11 - 3) = 16$ ✓. La solution a un sens : Zoé a 11 ans.

(c) Soit x le nombre cherché. $3x = (x - 2) + 4 \rightarrow 3x = x + 2 \rightarrow$ on soustrait x : $2x = 2 \rightarrow x = 1$. La largeur vaudrait alors $1 - 2 = -1$ cm. Une longueur ne peut pas être négative : il faut $x - 2 > 0$. La solution n'a pas de sens : ce rectangle n'existe pas.

(d) $4(x - 3) = 10 \rightarrow 4x - 12 = 10 \rightarrow 4x = 22 \rightarrow x = 5{,}5$. Le côté mesure alors $5{,}5 - 3 = 2{,}5$ cm. C'est positif : la solution a un sens. Une longueur peut être décimale, contrairement à un nombre de personnes. Vérification : $4 \times 2{,}5 = 10$ cm ✓.

Ex. 45 ★★☆ **Deux programmes de calcul**

(a) Programme A : $-1 + 4 = 3$, puis $3^2 = 9$. Programme B : $(-1)^2 = 1$, puis $1 + 30 = 31$. A donne 9 et B donne 31.

(b) Non. On résout $(x + 4)^2 = 49$. Les nombres dont le carré vaut 49 sont 7 et -7.
Donc $x + 4 = 7$ ou $x + 4 = -7 \rightarrow x = 3$ ou $x = -11$.
Vérification : $(3 + 4)^2 = 49$ et $(-11 + 4)^2 = (-7)^2 = 49$ ✓. Sami a oublié -11 : les nombres possibles sont 3 et -11.

Ex. 45 **(suite)**

(c) Équation : $(x+4)^2 = x^2+30 \to x^2+8x+16 = x^2+30$. On soustrait x^2 : $8x+16 = 30 \to 8x = 14 \to x = 1{,}75$. Vérification : A donne $5{,}75 \times 5{,}75 = 33{,}0625$ et B donne $1{,}75 \times 1{,}75 + 30 = 33{,}0625$ ✓. Il faut choisir 1,75.

Ex. 46 ★★☆ **Choisir un tarif à la piscine**

(a) Tarif A : 26 € ; 65 € ; 97,50 €. Tarif B : $30+16 = 46$ € ; $30+40 = 70$ € ; $30+60 = 90$ €.

(b) Tarif A : $6{,}5x$. Tarif B : $30+4x$.

(c) $6{,}5x = 30+4x \to 2{,}5x = 30 \to x = 12$. Vérification : $6{,}5 \times 12 = 78$ et $30+4\times12 = 78$ ✓. Pour 12 séances, les deux tarifs coûtent 78 €.

(d) Tarif A : $6{,}5x = 100$ donne $x \approx 15{,}4$. Le nombre de séances doit être entier : 15 séances au plus (97,50 €). Tarif B : $30+4x = 100 \to 4x = 70 \to x = 17{,}5$. Ce n'est pas entier : 17 séances au plus ($30+68 = 98$ €). Jade doit choisir le tarif B. Elle pourra faire 17 séances.

Ex. 47 ★★★ **Le double et le triple de l'âge**

(a) Dans 4 ans : Malik aura $11+4 = 15$ ans et Karim aura $38+4 = 42$ ans. Il y a 2 ans : Malik avait $11-2 = 9$ ans et Karim avait $38-2 = 36$ ans. Or $4 \times 9 = 36$. Donc oui : il y a 2 ans, Karim avait le quadruple de l'âge de Malik.

(b) Soit x le nombre d'années. Dans x ans, Malik aura $(11+x)$ ans et Karim aura $(38+x)$ ans. Attention : on ajoute x aux deux âges, car le temps passe pour tout le monde.

(c) Soit x le nombre d'années. On écrit l'âge de Karim de deux façons : $38+x = 2(11+x) \to 38+x = 22+2x \to$ on soustrait x et 22 : $16 = x$. Vérification : dans 16 ans, Malik aura 27 ans et Karim 54 ans, et $2 \times 27 = 54$ ✓. Dans 16 ans, Karim aura le double de l'âge de Malik.

(d) Il y a y ans, Malik avait $(11-y)$ ans et Karim $(38-y)$ ans. Équation : $38-y = 3(11-y) \to 38-y = 33-3y \to$ on ajoute $3y$: $38+2y = 33 \to 2y = -5 \to y = -2{,}5$. Un nombre d'années écoulées ne peut pas être négatif : cette solution n'a pas de sens pour « il y a ». Malik a tort. En fait, cela se produira dans 2,5 ans : Malik aura 13,5 ans, Karim 40,5 ans, et $3 \times 13{,}5 = 40{,}5$ ✓.

Ex. 48 ★★★ **Un carré et un rectangle**

(a) Pour $x = 4$: l'aire du carré vaut $4 \times 4 = 16$ cm². Le rectangle mesure 9 cm sur 1 cm, donc son aire vaut $9 \times 1 = 9$ cm². C'est le carré qui a la plus grande aire.

(b) Une longueur est toujours positive. La largeur $x-3$ doit donc être strictement positive, d'où $x > 3$. On a alors aussi $x > 0$ et $x+5 > 0$.

(c) Tom a oublié les produits $5 \times x$ et $x \times (-3)$ en développant. On a $(x+5)(x-3) = x^2-3x+5x-15 = x^2+2x-15$. Équation : $x^2 = x^2+2x-15 \to$ on soustrait x^2 : $0 = 2x-15 \to 2x = 15 \to x = 7{,}5$. On a bien $7{,}5 > 3$. Vérification : $7{,}5 \times 7{,}5 = 56{,}25$ et $12{,}5 \times 4{,}5 = 56{,}25$ ✓. Pour un côté de 7,5 cm, les deux figures ont la même aire : 56,25 cm².

(d) Le périmètre du carré vaut $4x$. Celui du rectangle vaut $2(x+5+x-3) = 2(2x+2) = 4x+4$. Équation : $4x = 4x+4 \to$ on soustrait $4x$: $0 = 4$, ce qui est impossible. L'équation n'a aucune solution : les deux périmètres ne sont jamais égaux (celui du rectangle a toujours 4 cm de plus).

(e) Équation : $(x+5)(x-3) = x^2-11 \to x^2+2x-15 = x^2-11 \to$ on soustrait x^2 : $2x-15 = -11 \to 2x = 4 \to x = 2$. Mais alors la largeur vaudrait $2-3 = -1$ cm, ce qui est impossible (et $2 < 3$). L'équation a pour solution 2, mais le problème n'a pas de solution : on ne peut pas construire un tel rectangle.

Ex. 49 ★★★ **Un programme de calcul à démasquer**

(a) Avec 2 : $2+3 = 5$, puis $5^2 = 25$, puis $25-2^2 = 25-4 = 21$. Avec -5 : $-5+3 = -2$, puis $(-2)^2 = 4$, puis $4-(-5)^2 = 4-25 = -21$. Les résultats sont 21 et -21.

(b) Léna a élevé le nombre choisi au carré puis ajouté 3, au lieu d'ajouter 3 puis d'élever le résultat au carré. Or le carré du résultat n'est pas le résultat du carré : $(2+3)^2 = 25$ alors que $2^2+3 = 7$. Le bon résultat est 21.

(c) Non, Hugo a tort : avec 2, on trouve 21 et pas 9. Il a oublié le double produit : $(x+3)^2 = x^2+6x+9$. Donc $(x+3)^2-x^2 = x^2+6x+9-x^2 = 6x+9$. Le résultat est $6x+9$.

(d) Équation : $6x+9 = 20 \to 6x = 11 \to x = \frac{11}{6}$. Vérification : $\frac{11}{6}+3 = \frac{29}{6}$, et $\left(\frac{29}{6}\right)^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{841-121}{36} = \frac{720}{36} = 20$ ✓. Il faut choisir $\frac{11}{6}$.

Ex. 49 **(suite)**

(e) Équation : $6x + 9 = x \to$ on soustrait x : $5x + 9 = 0 \to 5x = -9 \to x = -\frac{9}{5} = -1{,}8$. Vérification dans le programme : $-1{,}8 + 3 = 1{,}2$, puis $1{,}2^2 = 1{,}44$, puis $1{,}44 - 3{,}24 = -1{,}8$ ✓. Oui : en choisissant $-1{,}8$, le programme redonne le nombre choisi.