1. Rappels de 3e : tester un nombre, équations simples

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : équations en une ou deux étapes**

(a) $x+9=4 \iff x=4-9 \iff x=-5$. $S=\{-5\}$.

(b) $4x+3=31 \iff 4x=31-3 \iff 4x=28 \iff x=\frac{28}{4} \iff x=7$. On divise par 4, on ne retranche pas 4. $S=\{7\}$.

(c) $-x=8 \iff x=-8$ (on multiplie les deux membres par -1). $S=\{-8\}$.

(d) $\frac{x}{4}=-3 \iff x=-3\times 4 \iff x=-12$. $S=\{-12\}$.

(e) $-6x=15 \iff x=\frac{15}{-6} \iff x=-\frac{5}{2}$. $S=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

(f) $13=x-6 \iff 13+6=x \iff x=19$. $S=\{19\}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : tester un nombre**

(a) Membre de gauche : $(-4)^2-4=16-4=12$. Membre de droite : $3\times(-4)=-12$. Comme $12\neq -12$, -4 n'est pas solution de (E).

(b) Non. Zoé a oublié les parenthèses : $(-1)^2=1$, alors que $-1^2=-1$. Membre de gauche : $(-1)^2-4=1-4=-3$. Membre de droite : $3\times(-1)=-3$. Les deux membres sont égaux, donc -1 est solution de (E).

(c) Membre de gauche : $4^2-4=16-4=12$. Membre de droite : $3\times 4=12$. Les deux membres sont égaux, donc 4 est solution de (E).

(d) Faux. -1 et 4 sont toutes les deux solutions de (E). Trouver une solution ne prouve pas que c'est la seule.

Ex. 3 ★★☆ **Repérer l'erreur**

(a) Erreur à la dernière ligne : Tom a retranché 6 au lieu de diviser par 6. $4x+7=1-2x \iff 4x+2x=1-7 \iff 6x=-6 \iff x=\frac{-6}{6}=-1$. $S=\{-1\}$.

(b) Erreur à la dernière ligne : de $-x=4$, on tire $x=-4$ (on multiplie par -1). $5-x=9 \iff -x=4 \iff x=-4$. $S=\{-4\}$.

(c) Erreur à la première ligne : en multipliant par 6, Hugo a oublié de multiplier le nombre seul 1. $\frac{x}{2}+1=\frac{x}{3} \iff 3x+6=2x \iff 3x-2x=-6 \iff x=-6$. $S=\{-6\}$.

Ex. 3 (suite)

(d) Pour $x=-6$: membre de gauche $\frac{-6}{2}+1=-3+1=-2$; membre de droite $\frac{-6}{3}=-2$. Les deux membres sont égaux, donc -6 est bien solution.

Ex. 4 ★★☆ **Deux tarifs à la piscine**

(a) Tarif A : $4{,}5x$ euros. Tarif B : $18+2{,}25x$ euros.

(b) $4{,}5x=18+2{,}25x \iff 4{,}5x-2{,}25x=18 \iff 2{,}25x=18 \iff x=\frac{18}{2{,}25}=8$. $S=\{8\}$.

(c) $4{,}5\times 8=36$ et $18+2{,}25\times 8=18+18=36$: les deux membres sont égaux. Pour 8 entrées, les deux tarifs coûtent le même prix : 36 €.

(d) $18+2{,}25x=42{,}75 \iff 2{,}25x=24{,}75 \iff x=\frac{24{,}75}{2{,}25}=11$. Vérification : $18+2{,}25\times 11=18+24{,}75=42{,}75$. Maëlle a fait 11 entrées.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux ? Justifie**

(a) Vrai. Ajouter une même expression aux deux membres donne une équation équivalente : $3-x=2x \iff 3-x+x=2x+x \iff 3=3x \iff x=1$. Vérification : $3-1=2$ et $2\times 1=2$.
Donc $S=\{1\}$.

(b) Faux. On multiplie les deux membres par -7 : $-\frac{x}{7}=2 \iff x=2\times(-7) \iff x=-14$. Vérification : $-\frac{-14}{7}=2$. Avec $x=-\frac{2}{7}$, on obtient $\frac{2}{49}\neq 2$.
Donc $S=\{-14\}$.

(c) Faux. On obtient $0\times x=0\times 4$, c'est-à-dire $0=0$, vrai pour tout réel : son ensemble des solutions est $S=\mathbb{R}$. Or $x=4$ a pour ensemble $S=\{4\}$. Contre-exemple : 1 est solution de la deuxième équation, pas de la première. On ne multiplie que par un nombre non nul.

(d) Faux. $9x=6 \iff x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. 0,67 n'est qu'une valeur approchée : $9\times 0{,}67=6{,}03\neq 6$. La solution exacte est $\frac{2}{3}$, donc $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

(e) Vrai. $2x-7=5 \iff 2x=12 \iff x=6$ et $x+4=10 \iff x=6$. Les deux équations ont le même ensemble de solutions $S=\{6\}$, donc elles sont équivalentes.

Ex. 6 ★★★ **Une équation, plusieurs solutions**

(a) Ligne x^2-2x : 8 ; 0 ; -1 ; 0 ; 3. Ligne $3x-6$: -12 ; -6 ; -3 ; 0 ; 3. Les deux membres sont égaux seulement pour $x=2$ ($0=0$) et $x=3$ ($3=3$) : dans le tableau, les solutions de (E) sont 2 et 3.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Membre de gauche : $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4} - \frac{20}{4} = \frac{5}{4}$. Membre de droite : $3 \times \frac{5}{2} - 6 = \frac{15}{2} - \frac{12}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$. Comme $\frac{5}{4} \neq \frac{6}{4}$, $\frac{5}{2}$ n'est pas solution de (E).

(c) Non. Le tableau ne teste que cinq nombres : il montre que 2 et 3 sont solutions, mais pas qu'il n'y en a pas d'autres. Pour connaître toutes les solutions, il faut résoudre (E).

(d) $(x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$. Et (E) $\iff x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$ (on retranche $3x - 6$ aux deux membres) $\iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0$.

(e) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$, donc $x = 2$ ou $x = 3$. La résolution prouve maintenant que (E) n'a pas d'autre solution : $S = \{2\,;\,3\}$.

Ex. 7 ★★★ **Le père et le fils**

(a) Dans x années, Rayan aura $14 + x$ ans et Karim aura $41 + x$ ans.

(b) $41 + x = 2(14 + x) \iff 41 + x = 28 + 2x \iff 41 - 28 = 2x - x \iff x = 13$. Vérification : $41 + 13 = 54$ et $2 \times (14 + 13) = 2 \times 27 = 54$. Dans 13 ans, Karim (54 ans) aura le double de l'âge de Rayan (27 ans).

(c) $41 + x = 4(14 + x) \iff 41 + x = 56 + 4x \iff 41 - 56 = 4x - x \iff -15 = 3x \iff x = -5$. La solution est négative : c'était dans le passé. Il y a 5 ans, Rayan avait 9 ans et Karim 36 ans, et $36 = 4 \times 9$.

(d) $(14 + x) + (41 + x) = 100 \iff 55 + 2x = 100 \iff 2x = 45 \iff x = \frac{45}{2}$. Vérification : $14 + 22{,}5 = 36{,}5$, $41 + 22{,}5 = 63{,}5$ et $36{,}5 + 63{,}5 = 100$. Dans $\frac{45}{2}$ années, soit 22 ans et demi, la somme de leurs âges sera égale à 100 ans.

2. *Équations équivalentes et premier degré*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : résoudre en ligne**

(a) $-4x = 18 \iff x = \frac{18}{-4} = -\frac{9}{2}$. On divise par -4, signe compris. $S = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$.

(b) $7x - 5 = 3x + 9 \iff 7x - 3x = 9 + 5 \iff 4x = 14 \iff x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$. $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Ex. 8 **(suite)**

(c) On multiplie les deux membres par $\frac{3}{2}$ (non nul) : $\frac{2}{3}x = -8 \iff x = -8 \times \frac{3}{2} = -12$. $S = \{-12\}$.

(d) $0{,}4x - 1 = 2{,}2 \iff 0{,}4x = 3{,}2 \iff x = \frac{3{,}2}{0{,}4} = 8$. $S = \{8\}$.

(e) $6 - x = 2x + 15 \iff 6 - 15 = 2x + x \iff -9 = 3x \iff x = -3$. $S = \{-3\}$.

(f) $5x = 2 \iff x = \frac{2}{5} = 0{,}4$. $S = \{0{,}4\}$.

Ex. 9 ★★☆ **Automatismes : développer ou chasser les dénominateurs**

(a) $-3x + 18 = 2x + 3 \iff 18 - 3 = 2x + 3x \iff 15 = 5x \iff x = 3$. $S = \{3\}$.

(b) $8x + 4 - 3x + 6 = 0 \iff 5x + 10 = 0 \iff 5x = -10 \iff x = -2$. $S = \{-2\}$.

(c) $x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + 7 \iff x - 6 = 7$ (on retranche x^2 aux deux membres) $\iff x = 13$. $S = \{13\}$.

(d) $2x^2 + 8x - x - 4 = 2x^2 + 2x \iff 7x - 4 = 2x \iff 5x = 4 \iff x = \frac{4}{5}$. $S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

(e) On multiplie par 4 (non nul) tous les termes : $3x - 8 = 2x \iff x = 8$. $S = \{8\}$.

(f) On multiplie par 6 : $2(2x - 1) = 3(x + 3) \iff 4x - 2 = 3x + 9 \iff x = 11$. $S = \{11\}$.

Ex. 10 ★★☆ **Erreurs d'élèves à corriger**

(a) Lina a fait passer $2x$ à gauche sans changer son signe : il faut retrancher $2x$ aux deux membres. $5x - 2x = -11 - 4 \iff 3x = -15 \iff x = -5$.
Donc $S = \{-5\}$.

(b) Tom a oublié le signe du coefficient : on divise par -5. $-5x = 20 \iff x = \frac{20}{-5} = -4$.
Donc $S = \{-4\}$.

(c) Inès s'est trompée de signe en développant : $-2 \times (-4) = +8$. $3 - 2x + 8 = 7 \iff 11 - 2x = 7 \iff -2x = -4 \iff x = 2$.
Donc $S = \{2\}$.

(d) Hugo n'a pas multiplié le terme -2 par 15. $5x - 30 = 3x \iff 2x = 30 \iff x = 15$. Vérification : $\frac{15}{3} - 2 = 3$ et $\frac{15}{5} = 3$.
Donc $S = \{15\}$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux sur les équations équivalentes**

(a) Faux. $3x-6=0 \iff x=2$, donc $S=\{2\}$. Mais $0\times(3x-6)=0$ est vraie pour tout réel : $S=\mathbb{R}$. Multiplier par 0 ne donne pas une équation équivalente.

(b) Vrai. On multiplie les deux membres par 2, qui n'est pas nul : $2\times\frac{x}{2}=x$ et $2\times(5-x)=10-2x$. Les deux équations ont donc le même ensemble de solutions, $S=\left\{\frac{10}{3}\right\}$ (car $3x=10$).

(c) Faux. $4\times\left(-\frac{3}{2}\right)+9=-6+9=3$ et $3-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=3+3=6$, or $3\neq 6$. En fait, $6x=-6\iff x=-1$, donc $S=\{-1\}$.

(d) Faux. $0{,}5x=2{,}7-1{,}2=1{,}5\iff x=\frac{1{,}5}{0{,}5}=3$: on divise par 0,5, on ne multiplie pas. Donc $S=\{3\}$.

Ex. 12 ★★★ **Problème : deux formules de location de vélos**

(a) $P_A=12+2{,}4t$ et $P_B=4t$ (en euros).

(b) On cherche t tel que $12+2{,}4t=4t\iff 12=4t-2{,}4t\iff 12=1{,}6t\iff t=\frac{12}{1{,}6}=7{,}5$. Donc $S=\{7{,}5\}$. Vérification : $12+2{,}4\times 7{,}5=12+18=30$ et $4\times 7{,}5=30$. Pour une location de 7 h 30 min, les deux formules coûtent le même prix : 30 €.

(c) $12+2{,}4t=33{,}6\iff 2{,}4t=33{,}6-12\iff 2{,}4t=21{,}6\iff t=\frac{21{,}6}{2{,}4}=9$. $S=\{9\}$. Vérification : $12+2{,}4\times 9=12+21{,}6=33{,}6$. La location de Malik a duré 9 heures.

(d) $4t=27\iff t=\frac{27}{4}=6{,}75$. $S=\{6{,}75\}$. Or 0,75 h $=0{,}75\times 60=45$ min. La location de Chloé a duré 6 h 45 min (vérification : $4\times 6{,}75=27$).

Ex. 13 ★★★ **Aires de rectangles : quand les x^2 s'éliminent**

(a) $\mathcal{A}(R_1)=(x+5)(x-3)=x^2-3x+5x-15=x^2+2x-15$ (en cm^2).

(b) $x^2+2x-15=x^2\iff 2x-15=0$ (on retranche x^2 aux deux membres) $\iff 2x=15\iff x=\frac{15}{2}=7{,}5$. $S=\{7{,}5\}$. Le carré et R_1 ont la même aire pour $x=7{,}5$ cm (contrôle : $12{,}5\times 4{,}5=56{,}25=7{,}5^2$).

Ex. 13 (suite)

(c) $x^2+2x-15=x^2+9\iff 2x-15=9\iff 2x=24\iff x=12$. $S=\{12\}$. Vérification : $17\times 9=153$ et $12^2+9=144+9=153$. L'aire de R_1 dépasse celle du carré de 9 cm^2 pour $x=12$ cm.

(d) $\mathcal{A}(R_2)=(x+1)(x-2)=x^2-2x+x-2=x^2-x-2$. $x^2+2x-15=x^2-x-2\iff 2x+x=-2+15\iff 3x=13\iff x=\frac{13}{3}$. $S=\left\{\frac{13}{3}\right\}$.

(e) $\frac{13}{3}\approx 4{,}33>3$: la valeur convient (les côtés $x-3$ et $x-2$ sont bien positifs). Vérification : $\left(\frac{13}{3}+5\right)\left(\frac{13}{3}-3\right)=\frac{28}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{112}{9}$ et $\left(\frac{13}{3}+1\right)\left(\frac{13}{3}-2\right)=\frac{16}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{112}{9}$. Les deux rectangles ont la même aire pour $x=\frac{13}{3}$ cm.

Ex. 14 ★★★ **Problème : la randonnée de Sacha**

(a) Aller : $\frac{d}{4}$ h ; retour : $\frac{d}{6}$ h.

(b) 30 min = 0,5 h, donc l'équation est $\frac{d}{4}+\frac{d}{6}+\frac{1}{2}=6$.

(c) On multiplie les deux membres par 12, nombre non nul : $\frac{d}{4}+\frac{d}{6}+\frac{1}{2}=6\iff 3d+2d+6=72\iff 5d=66\iff d=\frac{66}{5}=13{,}2$. $S=\{13{,}2\}$.

(d) $\frac{13{,}2}{4}=3{,}3$ et $\frac{13{,}2}{6}=2{,}2$, puis $3{,}3+2{,}2+0{,}5=6$: l'égalité est vraie. Le sentier mesure 13,2 km.

(e) $3d+2d+\frac{1}{2}=6\iff 5d=5{,}5\iff d=1{,}1$. Nora n'a pas multiplié tous les termes par 12 : $\frac{1}{2}$ devait devenir 6 et le membre de droite 6 devait devenir 72. Son équation n'est pas équivalente à celle de départ, et 1,1 n'est pas solution.

3. *Cas particuliers : aucune solution ou tous les réels*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : une solution, aucune ou toutes**

(a) $0\times x=7\iff 0=7$. C'est faux pour tout x : $S=\varnothing$.

(b) $4(x-3)=4x-12\iff 4x-12=4x-12\iff -12=-12$. C'est vrai pour tout x : $S=\mathbb{R}$.

(c) $5x+2=5x-9\iff 2=-9$ (on retranche $5x$). C'est faux : $S=\varnothing$.

(d) $3(x+2)-x=2(x+3)\iff 2x+6=2x+6\iff 6=6$. C'est vrai pour tout x : $S=\mathbb{R}$.

(e) $7x-3=2(x+1)+5x\iff 7x-3=7x+2\iff -3=2$. C'est faux : $S=\varnothing$.

(f) $2x+9=9-4x\iff 6x=0\iff x=0$. Donc $S=\{0\}$: il y a une solution, 0, et l'ensemble n'est pas vide.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : les x² s'éliminent**

(a) $x^2+12x+36=x^2+9x \iff 12x+36=9x \iff 3x=-36 \iff x=-12$. $S=\{-12\}$.

(b) $x^2-10x+25=x^2-15 \iff -10x=-40 \iff x=4$. $S=\{4\}$.

(c) $x^2+4x=x^2+4x+1 \iff 0=1$. C'est faux : $S=\varnothing$.

(d) $x^2-4+8=x^2+4 \iff x^2+4=x^2+4 \iff 4=4$. C'est vrai pour tout x : $S=\mathbb{R}$.

(e) $2x^2-6x+x-3=2x^2+x \iff -5x-3=x \iff -6x=3 \iff x=-\frac{1}{2}$. $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ex. 17 ★★☆ **Deux élèves, deux conclusions fausses**

(a) Pour $x=5$: $3(2\times 5-1)+4=27+4=31$ et $6\times 5+1=31$. Les deux membres sont égaux, donc 5 est solution.

(b) « $0=0$ » est vrai quelle que soit la valeur de x : cela ne signifie pas que la solution est 0. Tous les réels sont solutions : $S=\mathbb{R}$.

(c) Pour $x=0$: $2(4\times 0+1)=2$ et $8\times 0-5=-5$. Comme $2\neq -5$, 0 n'est pas solution.

(d) $2(4x+1)=8x-5 \iff 8x+2=8x-5 \iff 2=-5$. Cette égalité est fausse pour tout x : l'équation n'a aucune solution, $S=\varnothing$.

Ex. 18 ★★☆ **Discuter selon un paramètre**

(a) Pour $k=-1$: $3x=6 \iff x=2$. $S=\{2\}$.

(b) Pour $k=-4$: $0\times x=6 \iff 0=6$, ce qui est faux. $S=\varnothing$.

(c) Comme $k+4\neq 0$, on peut diviser par $k+4$: $x=\frac{6}{k+4}$. L'équation a une seule solution.

(d) 3 est solution si $(k+4)\times 3=6 \iff k+4=2 \iff k=-2$.
Donc 3 est solution de (E) pour $k=-2$.

(e) Pour $k=-4$: $0\times x=0 \iff 0=0$, vrai pour tout x : $S=\mathbb{R}$. Pour $k\neq -4$: $k+4\neq 0$, on divise par $k+4$: $x=1$, donc $S=\{1\}$.

Ex. 19 ★★★ **Trois formules d'escalade**

(a) Pour x séances, A coûte $20+4\times x$, soit $4x+20$ euros.

(b) $4x+20=4(x+5) \iff 4x+20=4x+20 \iff 0=0$. Cette égalité est vraie pour tout x, donc $S=\mathbb{R}$. A et B ont toujours le même prix : Nina a tort (deux écritures différentes peuvent désigner la même expression).

Ex. 19 (suite)

(c) $4x+20=2(2x+7)+3 \iff 4x+20=4x+17 \iff 20=17$, ce qui est faux quel que soit x. $S=\varnothing$: A et C n'ont jamais le même prix ; C coûte toujours 3 € de moins que A.

(d) $4x+20=2(3x+1) \iff 4x+20=6x+2 \iff 18=2x \iff x=9$. Vérification : $4\times 9+20=56$ et $2(3\times 9+1)=56$. Pour 9 séances, A et D coûtent toutes les deux 56 €.

(e) $2(2x+7)+3=2(3x+1) \iff 4x+17=6x+2 \iff 15=2x \iff x=7{,}5$. Or x est un nombre entier de séances : 7,5 ne convient pas. C et D n'ont jamais le même prix.

Ex. 20 ★★★ **Un paramètre des deux côtés**

(a) $mx-5=4x+m \iff mx-4x=m+5$ (on retranche $4x$ et on ajoute 5) $\iff (m-4)x=m+5$ (facteur commun x).
Donc $a=m-4$ et $b=m+5$.

(b) Pour $m=4$: $(4-4)x=4+5$, soit $0\times x=9$, c'est-à-dire $0=9$, ce qui est faux pour tout x.
Donc $S=\varnothing$. Sami a tort : 0 n'est pas solution ($4\times 0-5=-5$ alors que $4\times 0+4=4$).

(c) Si $m\neq 4$, le coefficient $m-4$ n'est pas nul, on peut diviser par $m-4$: $x=\frac{m+5}{m-4}$.
Donc $S=\left\{\frac{m+5}{m-4}\right\}$.

(d) 2 est solution si et seulement si $2m-5=4\times 2+m \iff 2m-5=8+m \iff m=13$. Vérification : $13\times 2-5=21$ et $4\times 2+13=21$. Pour $m=13$, 2 est solution de (E).

(e) 1 est solution si et seulement si $m\times 1-5=4\times 1+m \iff m-5=m+4 \iff -5=4$, ce qui est faux pour tout m. Aucune valeur de m ne convient : l'affirmation est fausse.

Ex. 21 ★★★ **Un carré et deux rectangles**

(a) Aire du carré : $(x+3)^2=x^2+6x+9$. Aire de R_1 : $(x+1)(x+5)=x^2+5x+x+5=x^2+6x+5$.

(b) $x^2+6x+9=x^2+6x+5 \iff 9=5$ (on retranche x^2+6x), ce qui est faux pour tout x. $S=\varnothing$: l'affirmation est fausse ; l'aire du carré dépasse toujours celle de R_1 de 4 cm².

Ex. 21 (suite)

(c) $4(x+3) = 2(x+1+x+5) \iff 4x+12 = 2(2x+6) \iff 4x+12 = 4x+12 \iff 0 = 0$, vrai pour tout x : $S = \mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$, le carré et R_1 ont le même périmètre.

(d) $x^2+6x+9 = x(x+8) \iff x^2+6x+9 = x^2+8x \iff 9 = 2x \iff x = 4{,}5$ (les x^2 s'éliminent). Vérification : $7{,}5^2 = 56{,}25$ et $4{,}5 \times 12{,}5 = 56{,}25$. Pour $x = 4{,}5$ cm, les deux aires valent 56,25 cm².

4. *Équation produit nul, se ramener à un produit en factorisant*

Ex. 22 ★☆☆ **Produits déjà factorisés**

(a) $2x+7 = 0$ ou $x-5 = 0 \iff x = -\frac{7}{2}$ ou $x = 5$. $S = \left\{-\frac{7}{2}\,;\,5\right\}$.

(b) $x = 0$ ou $3x+4 = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$. N'oublie pas la solution 0 ! $S = \left\{-\frac{4}{3}\,;\,0\right\}$.

(c) $-4 \neq 0$: ce facteur ne s'annule jamais. Donc $x+3 = 0$ ou $2x-9 = 0 \iff x = -3$ ou $x = \frac{9}{2}$. $S = \left\{-3\,;\,\frac{9}{2}\right\}$.

(d) $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) = 0 \iff 5x-2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}$. Une seule solution : $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

(e) $6-x = 0$ ou $3x+12 = 0 \iff x = 6$ ou $x = -4$. $S = \{-4\,;\,6\}$.

(f) $\frac{x}{2}+1 = 0$ ou $7-2x = 0 \iff x = -2$ ou $x = \frac{7}{2}$. $S = \left\{-2\,;\,\frac{7}{2}\right\}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Factoriser puis résoudre**

(a) $5x^2+8x = 0 \iff x(5x+8) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{8}{5}$. Ne divise pas par x : tu perdrais 0. $S = \left\{-\frac{8}{5}\,;\,0\right\}$.

(b) $(7x-5)(7x+5) = 0 \iff x = \frac{5}{7}$ ou $x = -\frac{5}{7}$. $S = \left\{-\frac{5}{7}\,;\,\frac{5}{7}\right\}$.

(c) $(x+5)^2 = 0 \iff x+5 = 0 \iff x = -5$. $S = \{-5\}$.

(d) $(x-4-9)(x-4+9) = 0 \iff (x-13)(x+5) = 0 \iff x = 13$ ou $x = -5$. $S = \{-5\,;\,13\}$.

(e) $(x+2)(3x+7) = 0 \iff x = -2$ ou $x = -\frac{7}{3}$. $S = \left\{-\frac{7}{3}\,;\,-2\right\}$.

(f) $(4x-3)^2 = 0 \iff 4x-3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$. $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux. Le second membre n'est pas nul, la règle du produit nul ne s'applique pas. Contre-exemple : $x = 8$ vérifie $x-2 = 6$, mais $(8-2)(8+3) = 6 \times 11 = 66 \neq 6$.

Ex. 24 (suite)

(b) Faux. 0 est aussi solution : $0^2 = 0$ et $-3 \times 0 = 0$. Il faut écrire $x^2+3x = 0 \iff x(x+3) = 0$, donc $S = \{-3\,;\,0\}$.

(c) Faux. Il suffit qu'un facteur soit nul : c'est « ou ». Aucun nombre ne vérifie les deux à la fois. $x+6 = 0$ ou $5x-4 = 0 \iff x = -6$ ou $x = \frac{4}{5}$, donc $S = \left\{-6\,;\,\frac{4}{5}\right\}$.

(d) Faux. Pour $x = \frac{1}{2}$: $(2 \times \frac{1}{2}+1)^2 = 2^2 = 4 \neq 0$. En fait $2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$: une seule solution, $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) Le signe $-$ devant la parenthèse change tous les signes : $-(2x-5) = -2x+5$ et non $-2x-5$.

(b) $(3x-1)(x+4-2x+5) = 0 \iff (3x-1)(-x+9) = 0 \iff x = \frac{1}{3}$ ou $x = 9$. Les solutions sont $\frac{1}{3}$ et 9 : $S = \left\{\frac{1}{3}\,;\,9\right\}$.

(c) A^2-B^2 avec $A = 2x+3$ et $B = x-5$: $(2x+3-x+5)(2x+3+x-5) = 0 \iff (x+8)(3x-2) = 0 \iff x = -8$ ou $x = \frac{2}{3}$. Donc $S = \left\{-8\,;\,\frac{2}{3}\right\}$.

(d) $(x+2)(4x-1)-3(x+2) = 0 \iff (x+2)(4x-4) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 1$. Diviser par $x+2$ aurait fait perdre -2. Donc $S = \{-2\,;\,1\}$.

Ex. 26 ★★★ **Le carré agrandi**

(a) Le nouveau carré a pour côté $x+3$, donc pour aire $(x+3)^2$. L'aire de départ est x^2. L'énoncé se traduit par : $(x+3)^2 = 4x^2$.

(b) $(x+3)^2 = 4x^2 \iff (x+3)^2-4x^2 = 0$. Or $4x^2 = (2x)^2$: l'équation équivaut à $A^2-B^2 = 0$ avec $A = x+3$ et $B = 2x$.

(c) On reconnaît A^2-B^2 avec $A = x+3$ et $B = 2x$: $(x+3)^2-(2x)^2 = (x+3-2x)(x+3+2x) = (-x+3)(3x+3)$. Donc $(-x+3)(3x+3) = 0 \iff -x+3 = 0$ ou $3x+3 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$. $S = \{-1\,;\,3\}$.

(d) Un côté est positif, donc on rejette -1 : $x = 3$. Vérification : le nouveau côté mesure 6 cm, son aire vaut 36 cm², et $4 \times 3^2 = 36$. Le carré de départ a un côté de 3 cm.

(e) Non. $(x+3)^2-(3x)^2 = 0 \iff (x+3-3x)(x+3+3x) = 0 \iff (-2x+3)(4x+3) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{4}$. Noé oublie le cas $x+3 = -3x$: il perd la solution $-\frac{3}{4}$. $S = \left\{-\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right\}$.

Ex. 27 ★★★ **Choisir la bonne forme**

(a) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ et $(x+4)(2x-1) = 2x^2 + 7x - 4$.
Donc $E(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 2x^2 - 7x + 4 = 2x^2 - 11x + 5$.

(b) Le facteur commun est $(2x-1)$: $E(x) = (2x-1)\left[(2x-1) - (x+4)\right] = (2x-1)(2x-1-x-4) = (2x-1)(x-5)$.

(c) $E(x) = 0 \iff (2x-1)(x-5) = 0 \iff 2x - 1 = 0$ ou $x - 5 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = 5$. $S = \left\{\frac{1}{2}\,;\,5\right\}$.

(d) La forme factorisée ne sert pas, car le second membre n'est pas nul. Je prends la forme développée : $2x^2 - 11x + 5 = 5 \iff 2x^2 - 11x = 0 \iff x(2x-11) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{11}{2}$. $S = \left\{0\,;\,\frac{11}{2}\right\}$.

(e) $2x^2 - 11x + 5 = 2x^2 \iff -11x + 5 = 0 \iff x = \frac{5}{11}$. Les x^2 s'éliminent. L'équation a une seule solution : $S = \left\{\frac{5}{11}\right\}$.

Ex. 28 ★★★ **Une équation avec un paramètre**

(a) $(x+2)(3x-6) = 0 \iff x + 2 = 0$ ou $3x - 6 = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$. $S = \{-2\,;\,2\}$.

(b) (E) s'écrit $(x+2)(0 \times x - 6) = 0$, soit $-6(x+2) = 0$. Le facteur -6 est non nul, donc c'est $x + 2$ qui doit être nul : $x = -2$. $S = \{-2\}$.

(c) 4 est solution $\iff (4+2)(4k-6) = 0 \iff 6(4k-6) = 0 \iff 4k - 6 = 0 \iff k = \frac{3}{2}$.
Donc 4 est solution seulement pour $k = \frac{3}{2}$.

(d) Si $k = 0$, on a vu que $S = \{-2\}$: une seule solution. Si $k \neq 0$, alors $kx - 6 = 0 \iff x = \frac{6}{k}$ (on divise par k, qui est non nul). Les solutions sont -2 et $\frac{6}{k}$. Il n'y en a qu'une si $\frac{6}{k} = -2$, c'est-à-dire $k = -3$. Dans ce cas, (E) s'écrit $-3(x+2)^2 = 0$ et $S = \{-2\}$. Conclusion : (E) a une seule solution pour $k = -3$ ou $k = 0$.

5. *Équation quotient et valeurs interdites*

Ex. 29 ★☆☆ **Valeurs interdites et ensemble de définition**

(a) $x - 7 = 0 \iff x = 7$. Valeur interdite : 7. Ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{7\}$.

(b) $3x + 12 = 0 \iff 3x = -12 \iff x = -4$. Valeur interdite : -4. Ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

(c) Comme $x^2 \geqslant 0$, on a $x^2 + 1 \geqslant 1$: le dénominateur ne s'annule jamais. Il n'y a aucune valeur interdite. Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

Ex. 29 (suite)

(d) $x^2 - 9 = 0 \iff (x-3)(x+3) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -3$. Deux valeurs interdites : -3 et 3. Ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,3\}$.

(e) $(2x-5)(x+1) = 0 \iff 2x - 5 = 0$ ou $x + 1 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$ ou $x = -1$. Valeurs interdites : -1 et $\frac{5}{2}$. Ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,\frac{5}{2}\}$.

(f) $x^2 - 6x = 0 \iff x(x-6) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 6$. Valeurs interdites : 0 et 6. Ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{0\,;\,6\}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Quotient nul**

(a) Valeur interdite : -6. Pour $x \neq -6$:
$2x - 9 = 0 \iff x = \frac{9}{2}$. Comme $\frac{9}{2} \neq -6$, $S = \{\frac{9}{2}\}$.

(b) $2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$: valeur interdite $-\frac{1}{2}$. Pour $x \neq -\frac{1}{2}$: $7 - x = 0 \iff x = 7$. $S = \{7\}$.

(c) Valeur interdite : 4. Pour $x \neq 4$: $x^2 - 16 = 0 \iff (x-4)(x+4) = 0 \iff x = 4$ ou $x = -4$. Or 4 est interdite : on la rejette. $S = \{-4\}$.

(d) Valeur interdite : -3. Pour $x \neq -3$: $4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (2x-1)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} \neq -3$, $S = \{\frac{1}{2}\}$.

(e) $x^2 - 25 = (x-5)(x+5) = 0 \iff x = 5$ ou $x = -5$: deux valeurs interdites. Pour $x \neq \pm 5$:
$2x + 10 = 0 \iff x = -5$, valeur interdite, rejetée.
$S = \varnothing$.

(f) Valeur interdite : -2. Pour $x \neq -2$: $(x-1)(x+7) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -7$. Aucune des deux n'est interdite : $S = \{-7\,;\,1\}$.

Ex. 31 ★★☆ **Quotient égal à un nombre**

(a) Valeur interdite : -5. Pour $x \neq -5$: $3x - 1 = 2(x+5) \iff 3x - 1 = 2x + 10 \iff x = 11$. Contrôle : $\frac{32}{16} = 2$.
Donc $S = \{11\}$.

(b) Valeur interdite : 2. Pour $x \neq 2$: $4x + 1 = -3(2-x) \iff 4x + 1 = -6 + 3x \iff x = -7$. Contrôle : $\frac{-27}{9} = -3$.
Donc $S = \{-7\}$.

(c) Valeur interdite : 2. Pour $x \neq 2$: $x + 6 = 1 \times (x-2) \iff x + 6 = x - 2 \iff 6 = -2$, ce qui est faux. L'équation n'a aucune solution : $S = \varnothing$.

(d) Valeur interdite : 3. Pour $x \neq 3$: $2x - 6 = 2(x-3) \iff 2x - 6 = 2x - 6$, ce qui est toujours vrai. Tout réel différent de 3 est donc solution : $S = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ex. 32 ★★☆ **Erreurs d'élèves et vrai ou faux**

(a) Non. 0 est une valeur interdite. Pour $x \neq 0$, on peut simplifier : $x+3=3 \iff x=0$. Mais 0 est interdite, on la rejette. Noé a simplifié par x sans condition : en réalité $S=\varnothing$.

(b) Inès a oublié les parenthèses : $3\times(x+1)=3x+3$. Valeur interdite : -1. Pour $x\neq -1$: $x-4=3(x+1) \iff x-4=3x+3 \iff -2x=7 \iff x=-\frac{7}{2}$. Contrôle : $\frac{-15/2}{-5/2}=3$.
Donc $S=\{-\frac{7}{2}\}$.

(c) Faux. $x^2\geqslant 0$ donc $x^2+4\geqslant 4$: le dénominateur ne s'annule jamais, il n'y a aucune valeur interdite.
$x+2=0 \iff x=-2$, donc $S=\{-2\}$.

(d) Valeur interdite : -1. Pour $x\neq -1$: $x^2-1=-2(x+1) \iff x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x=-1$. Or -1 est interdite : on la rejette. L'équation n'a pas de solution : $S=\varnothing$.

Ex. 33 ★★★ **Factoriser, rejeter, justifier**

(a) $x^2-49=(x-7)(x+7)$ et $x^2+7x=x(x+7)$. On a $x(x+7)=0 \iff x=0$ ou $x=-7$. Les valeurs interdites sont -7 et 0 : Q est défini sur $\mathbb{R}\setminus\{-7\,;\,0\}$.

(b) Pour $x\neq -7$ et $x\neq 0$: $Q(x)=0 \iff x^2-49=0 \iff (x-7)(x+7)=0 \iff x=7$ ou $x=-7$. On rejette -7, car c'est une valeur interdite (« $\frac{0}{0}$ » n'existe pas).
Contrôle : $Q(7)=\frac{0}{98}=0$.
Donc $S=\{7\}$.

(c) Faux. Pour $x\neq -7$ et $x\neq 0$, on a bien $Q(x)=\frac{(x-7)(x+7)}{x(x+7)}=\frac{x-7}{x}$. Mais $Q(-7)$ vaut « $\frac{0}{0}$ » et n'existe pas : -7 reste une valeur interdite. On ne simplifie par $x+7$ qu'à condition que $x\neq -7$.

(d) Pour $x\neq -7$ et $x\neq 0$: $Q(x)=2 \iff \frac{x-7}{x}=2 \iff x-7=2x \iff x=-7$. Or -7 est une valeur interdite : on la rejette. L'équation n'a aucune solution : $S=\varnothing$.

(e) Pour $x\neq -7$ et $x\neq 0$: $Q(x)=-6 \iff \frac{x-7}{x}=-6 \iff x-7=-6x \iff 7x=7 \iff x=1$. Comme 1 n'est pas interdite, on la garde. Contrôle dans l'équation de départ : $Q(1)=\frac{1-49}{1+7}=\frac{-48}{8}=-6$.
Donc $S=\{1\}$.

Ex. 34 ★★★ **Le prix moyen d'une séance d'escalade**

(a) Le dénominateur x s'annule pour $x=0$: la valeur interdite est 0. $M(5)=\frac{60+4\times 5}{5}=\frac{80}{5}=16$ et $M(15)=\frac{60+4\times 15}{15}=\frac{120}{15}=8$. Le prix moyen est de 16 € pour 5 séances et de 8 € pour 15 séances.

Ex. 34 (suite)

(b) Pour $x\neq 0$: $\frac{60+4x}{x}=6{,}5 \iff 60+4x=6{,}5x \iff 60=2{,}5x \iff x=24$. Comme $24\neq 0$, on garde cette solution. Contrôle : $\frac{60+96}{24}=\frac{156}{24}=6{,}5$. Il faut faire 24 séances.

(c) Pour $x\neq 0$: $\frac{60+4x}{x}=4 \iff 60+4x=4x \iff 60=0$, ce qui est impossible.
Donc $S=\varnothing$. C'est faux : à cause de l'adhésion, le prix moyen ne vaut jamais 4 €, quel que soit le nombre de séances.

(d) On résout $M(x)=9$. Pour $x\neq 0$: $60+4x=9x \iff 60=5x \iff x=12$. Contrôle : $\frac{60+48}{12}=\frac{108}{12}=9$. Les deux formules ont le même prix moyen pour 12 séances.

(e) Pour $x\neq 0$: $60+4x=3x \iff x=-60$, donc $S=\{-60\}$. Cette solution ne convient pas, car un nombre de séances ne peut pas être négatif. Le prix moyen ne peut donc jamais valoir 3 €.

Ex. 35 ★★★ **Une équation quotient avec un paramètre**

(a) Le dénominateur s'annule pour $x=1$: la valeur interdite est 1. Pour $x\neq 1$: $\frac{x+4}{x-1}=3 \iff x+4=3(x-1) \iff x+4=3x-3 \iff 7=2x \iff x=\frac{7}{2}$. Comme $\frac{7}{2}\neq 1$, on garde cette solution. Contrôle : $\frac{7/2+4}{7/2-1}=\frac{15/2}{5/2}=3$.
Donc $S=\{\frac{7}{2}\}$.

(b) Pour $x\neq 1$: $\frac{x+4}{x-1}=1 \iff x+4=1\times(x-1) \iff x+4=x-1 \iff 4=-1$, ce qui est impossible.
Donc $S=\varnothing$.

(c) Pour $x\neq 1$: $\frac{x+4}{x-1}=k \iff x+4=k(x-1) \iff x+4=kx-k \iff k+4=kx-x \iff (k-1)x=k+4$.

(d) Si $k\neq 1$, alors $k-1\neq 0$ et $x=\frac{k+4}{k-1}$. De plus, $\frac{k+4}{k-1}=1 \iff k+4=k-1 \iff 4=-1$, ce qui est impossible. C'est donc faux : la solution n'est jamais égale à la valeur interdite. On garde toujours $S=\{\frac{k+4}{k-1}\}$.

(e) Le nombre 6 est solution si et seulement si $k=\frac{6+4}{6-1}=\frac{10}{5}=2$. Contrôle avec la question précédente : pour $k=2$, $x=\frac{2+4}{2-1}=6$. Il faut donc prendre $k=2$.

6. *Équation $x^2=a$*

Ex. 36 ★☆☆ **Carré égal à un nombre**

(a) $64>0$, donc $x=-8$ ou $x=8$. $S=\{-8\,;\,8\}$.

(b) Un carré est positif ou nul, il ne peut pas valoir -9 (et -3 ne convient pas : $(-3)^2=9$). $S=\varnothing$.

Ex. 36 (suite)

(c) $3x^2 = 54 \iff x^2 = 18 \iff x = -\sqrt{18}$ ou $x = \sqrt{18}$. Or $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$. $S = \{-3\sqrt{2}\,;\, 3\sqrt{2}\}$.

(d) $24 > 0$, donc $x = -\sqrt{24}$ ou $x = \sqrt{24}$. Or $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$. $S = \{-2\sqrt{6}\,;\, 2\sqrt{6}\}$.

(e) $2x^2 + 3 = 245 \iff 2x^2 = 242 \iff x^2 = 121 \iff x = -11$ ou $x = 11$. $S = \{-11\,;\, 11\}$.

(f) Seul 0 a pour carré 0. $S = \{0\}$.

(g) $4x^2 - 1 = 0 \iff 4x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$. $S = \{-\frac{1}{2}\,;\, \frac{1}{2}\}$.

(h) $7 - x^2 = -93 \iff -x^2 = -100 \iff x^2 = 100 \iff x = -10$ ou $x = 10$. $S = \{-10\,;\, 10\}$.

Ex. 37 ★☆☆ **Carré d'une expression**

(a) $(x-3)^2 = 25 \iff x - 3 = -5$ ou $x - 3 = 5 \iff x = -2$ ou $x = 8$. $S = \{-2\,;\, 8\}$.

(b) Un carré est positif ou nul, il ne peut pas valoir -4. $S = \varnothing$.

(c) $(x+4)^2 = 0 \iff x + 4 = 0 \iff x = -4$. $S = \{-4\}$.

(d) $(2x+1)^2 = 49 \iff 2x + 1 = -7$ ou $2x + 1 = 7 \iff 2x = -8$ ou $2x = 6 \iff x = -4$ ou $x = 3$. $S = \{-4\,;\, 3\}$.

(e) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$. $(x+5)^2 = 20 \iff x + 5 = -2\sqrt{5}$ ou $x + 5 = 2\sqrt{5} \iff x = -5 - 2\sqrt{5}$ ou $x = -5 + 2\sqrt{5}$. $S = \{-5 - 2\sqrt{5}\,;\, -5 + 2\sqrt{5}\}$.

(f) $(x-6)^2 - 36 = 0 \iff (x-6)^2 = 36 \iff x - 6 = -6$ ou $x - 6 = 6 \iff x = 0$ ou $x = 12$. $S = \{0\,;\, 12\}$.

Ex. 38 ★★☆ **Repérer l'erreur**

(a) Non. $9^2 = 81$, mais $(-9)^2 = 81$ aussi : Léa oublie la solution négative. $S = \{-9\,;\, 9\}$.

(b) Non. $18^2 = 324 \neq 36$: il ne faut pas diviser par 2. $x^2 = 36 \iff x = -6$ ou $x = 6$. $S = \{-6\,;\, 6\}$.

(c) Non. On ne peut pas diviser par x, qui peut être nul. $x^2 = 3x \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$. $S = \{0\,;\, 3\}$: Inès a perdu la solution 0.

(d) Non. $(-5)^2 = 25 \neq -25$. Un carré est positif ou nul, il ne peut pas valoir -25. $S = \varnothing$.

Ex. 39 ★★☆ **La terrasse de Mila**

(a) Le nouveau côté mesure $x + 3$ m, donc l'aire vaut $(x+3)^2$. L'équation est $(x+3)^2 = 50$.

(b) $(5+3)^2 = 8^2 = 64 \neq 50$.
Donc le côté initial ne mesure pas 5 m.

Ex. 39 (suite)

(c) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. $(x+3)^2 = 50 \iff x + 3 = -5\sqrt{2}$ ou $x + 3 = 5\sqrt{2} \iff x = -3 - 5\sqrt{2}$ ou $x = -3 + 5\sqrt{2}$.
$S = \{-3 - 5\sqrt{2}\,;\, -3 + 5\sqrt{2}\}$.

(d) Une longueur est positive : on rejette $-3 - 5\sqrt{2}$, qui est négatif. $x = -3 + 5\sqrt{2} \approx 4{,}07$. Le côté initial de la terrasse mesure environ 4,07 m.

Ex. 40 ★★★ **Discussion selon un paramètre**

(a) $x^2 + 5 = 53 \iff x^2 = 48$. Comme $48 > 0$, $x = -\sqrt{48}$ ou $x = \sqrt{48}$. Or $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$.
$S = \{-4\sqrt{3}\,;\, 4\sqrt{3}\}$.

(b) Non. Pour isoler x^2, on retranche 5 aux deux membres : $x^2 + 5 = 21 \iff x^2 = 16$. Sacha a ajouté 5 au lieu de le retrancher. $x^2 = 16 \iff x = -4$ ou $x = 4$.
$S = \{-4\,;\, 4\}$.

(c) Pour $k = 5$: $x^2 + 5 = 5 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$, une seule solution : $S = \{0\}$. Pour $k = -2$: $x^2 + 5 = -2 \iff x^2 = -7$. Un carré est positif ou nul, il ne peut pas valoir -7. $S = \varnothing$.

(d) (E) $\iff x^2 = k - 5$. Si $k > 5$, alors $k - 5 > 0$: deux solutions opposées $-\sqrt{k-5}$ et $\sqrt{k-5}$. Si $k = 5$: une seule solution, 0. Si $k < 5$, alors $k - 5 < 0$: aucune solution.

(e) 7 est solution si et seulement si $7^2 + 5 = k$, c'est-à-dire $k = 54$. Alors (E) $\iff x^2 = 49 \iff x = -7$ ou $x = 7$. L'autre solution est -7.

Ex. 41 ★★★ **Choisir la bonne méthode**

(a) Ce n'est pas une équation $(x+c)^2 = a$: le second membre contient x. $(x-1)^2 = (2x+3)^2 \iff (x-1)^2 - (2x+3)^2 = 0 \iff [(x-1) - (2x+3)] \times [(x-1) + (2x+3)] = 0 \iff (-x-4)(3x+2) = 0 \iff x = -4$ ou $x = -\frac{2}{3}$. $S = \{-4\,;\, -\frac{2}{3}\}$.

(b) $3(x-2)^2 + 1 = 37 \iff 3(x-2)^2 = 36 \iff (x-2)^2 = 12$. Comme $12 > 0$ et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$: $x - 2 = -2\sqrt{3}$ ou $x - 2 = 2\sqrt{3}$, donc $x = 2 - 2\sqrt{3}$ ou $x = 2 + 2\sqrt{3}$.
$S = \{2 - 2\sqrt{3}\,;\, 2 + 2\sqrt{3}\}$.

(c) $2(x^2+1) = 2x^2 + 2$. $2x^2 + 5 = 2x^2 + 2 \iff 5 = 2$ (en retranchant $2x^2$ aux deux membres). C'est impossible : $S = \varnothing$.

(d) $5x^2 - 3 = 2x^2 - 3 \iff 3x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$. Il n'y a qu'une seule solution : $S = \{0\}$.

Ex. 42 ★★★ **Le jardin de Yanis**

(a) Aire du jardin : $x \times 2x = 2x^2$. Aire du bassin : $3^2 = 9$. Aire de la pelouse : $2x^2 - 9$. L'équation est $2x^2 - 9 = 135$.

(b) $2x^2 - 9 = 135 \iff 2x^2 = 144 \iff x^2 = 72$. Comme $72 > 0$ et $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$: $x = -6\sqrt{2}$ ou $x = 6\sqrt{2}$. $S = \{-6\sqrt{2}\,;\, 6\sqrt{2}\}$.

(c) x est une longueur, donc $x > 0$: on rejette $-6\sqrt{2}$. De plus, $6\sqrt{2} \approx 8{,}49 > 3$: le bassin tient bien dans le jardin.
Donc $x = 6\sqrt{2}$.

(d) Largeur : $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ m. Longueur : $2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \approx 16{,}97$ m. Le jardin de Yanis mesure environ 8,49 m sur 16,97 m.

(e) $2x^2 - 9 = 5 \iff 2x^2 = 14 \iff x^2 = 7$. La seule solution positive est $\sqrt{7} \approx 2{,}65$. Or $\sqrt{7} < 3$ car $7 < 9$: un bassin de 3 m de côté ne tient pas dans un jardin de cette largeur. Ben a raison.

7. *Mettre un problème en équation*

Ex. 43 ★☆☆ **Traduire une phrase par une équation**

(a) $2x + 7 = 31 \iff 2x = 24 \iff x = 12$. $S = \{12\}$.

(b) Deux fois moins que 40, c'est $\frac{40}{2} = 20$.
$x + 3 = 20 \iff x = 17$. $S = \{17\}$.

(c) $3x = x + 18 \iff 2x = 18 \iff x = 9$. $S = \{9\}$.

(d) Les deux entiers suivants sont $x + 1$ et $x + 2$. $x + (x + 1) + (x + 2) = 87 \iff 3x + 3 = 87 \iff 3x = 84 \iff x = 28$. $S = \{28\}$: les entiers sont 28, 29 et 30.

(e) $0{,}15x = 12 \iff x = \frac{12}{0{,}15} = 80$. $S = \{80\}$.

(f) $4x - 5 = 2x + 3 \iff 2x = 8 \iff x = 4$. $S = \{4\}$.

Ex. 44 ★☆☆ **Nommer l'inconnue et écrire l'équation**

(a) ℓ : largeur en cm. La longueur vaut 2ℓ. $2(\ell + 2\ell) = 54$ (solution : $\ell = 9$).

(b) p : prix initial en €. Payer 30 % de moins, c'est payer 70 % du prix : $0{,}7p = 42$
(solution : $p = 60$).

(c) a : âge d'Inès en années. Tom a $a + 5$ ans : $a + (a + 5) = 31$
(solution : $a = 13$).

(d) c : côté en cm. $c^2 = 49$ avec $c > 0$
(solution : $c = 7$).

Ex. 44 (suite)

(e) s : part de Sam en g. Noé reçoit $\frac{s}{2}$: $s + \frac{s}{2} = 960$ (solution : $s = 640$).

(f) v : vitesse en km/h. Attention, 2 h 30 min = 2,5 h et non 2,3 h : $2{,}5v = 55$
(solution : $v = 22$).

Ex. 45 ★★☆ **Un carré agrandi**

(a) Le nouveau carré a pour côté $x + 4$ cm, donc son aire est $(x + 4)^2$ cm². Elle vaut 81 cm², d'où $(x + 4)^2 = 81$.

(b) $(x + 4)^2 = 81 \iff x + 4 = 9$ ou $x + 4 = -9 \iff x = 5$ ou $x = -13$. $S = \{-13\,;\, 5\}$.

(c) Une longueur est positive, donc on rejette -13. Il reste $x = 5$.

(d) $5 + 4 = 9$ et $9^2 = 81$: l'aire vaut bien 81 cm². Le carré de départ a un côté de 5 cm.

Ex. 46 ★★☆ **Deux tarifs égaux : l'erreur de Maëlle**

(a) Elle a inversé les rôles : 25 € se paient une seule fois, et c'est 4 € qui sont payés à chaque séance. Soit n le nombre de séances dans le mois. L'équation correcte est $25 + 4n = 9n$.

(b) $25x + 4 = 9x \iff 16x = -4 \iff x = -\frac{1}{4}$. Un nombre de séances est un entier positif : $-\frac{1}{4}$ n'a pas de sens, ce qui signale l'erreur de traduction.

(c) $25 + 4n = 9n \iff 25 = 5n \iff n = 5$. Les deux tarifs sont égaux pour 5 séances dans le mois.

(d) Tarif A : $25 + 4 \times 5 = 45$ €. Tarif B : $9 \times 5 = 45$ €. Les deux prix sont bien égaux, à 45 €.

Ex. 47 ★★★ **Le cadre d'une photo**

(a) x est en cm et $x > 0$. Le cadre ajoute x de chaque côté, donc $2x$ en tout dans chaque direction. Le grand rectangle mesure $12 + 2x$ cm sur $8 + 2x$ cm.

(b) L'aire du grand rectangle vaut $(12 + 2x)(8 + 2x)$, d'où l'équation $(12 + 2x)(8 + 2x) = 140$. On développe : $96 + 24x + 16x + 4x^2 = 140 \iff 4x^2 + 40x - 44 = 0$
$\iff x^2 + 10x - 11 = 0$
(on divise par 4, qui n'est pas nul).

(c) $(x - 1)(x + 11) = x^2 + 11x - x - 11 = x^2 + 10x - 11$. Donc $x^2 + 10x - 11 = 0 \iff (x - 1)(x + 11) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x + 11 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -11$.
$S = \{-11\,;\, 1\}$.

Ex. 47 **(suite)**

(d) Une largeur ne peut pas être négative, donc on rejette -11. Il reste $x = 1$. Vérification dans l'énoncé : le grand rectangle mesure 14 cm sur 10 cm et $14 \times 10 = 140$ cm^2. Le cadre a une largeur de 1 cm.

Ex. 48 ★★★ **Le prix de la sortie scolaire**

(a) n est le nombre d'élèves qui participent : c'est un entier naturel non nul. Chaque élève paie sa part du car, $\frac{600}{n}$ €, plus son entrée, 12 €, soit $\frac{600}{n} + 12$ euros.

(b) Valeur interdite : 0. Pour $n \neq 0$: $\frac{600}{n} + 12 = 27 \iff \frac{600}{n} = 15 \iff 600 = 15n \iff n = 40$. $40 \neq 0$, donc $S = \{40\}$.

(c) Avec 40 élèves, le prix total vaut $600 + 12 \times 40 = 1\,080$ €, et $1\,080 \div 40 = 27$ €. Il y avait 40 élèves à la sortie.

(d) Elle a tort. $\frac{600}{n} + 12 = 25 \iff \frac{600}{n} = 13 \iff n = \frac{600}{13} \approx 46{,}15$. Ce n'est pas un entier : un nombre d'élèves doit être entier, donc on rejette cette solution. Aucun nombre d'élèves ne donne exactement 25 €.

(e) La mairie paie $0{,}25 \times 600 = 150$ €, donc il reste $600 - 150 = 450$ € pour le car. Pour $n \neq 0$: $\frac{450}{n} + 12 = 21 \iff \frac{450}{n} = 9 \iff n = 50$. Vérification : $(450 + 12 \times 50) \div 50 = 1\,050 \div 50 = 21$. Il faut 50 élèves.

Ex. 49 ★★★ **Les âges d'une famille**

(a) Soit x l'âge de Hugo, en années. Rose a 3 ans de plus : $x + 3$. Hugo a quatre fois moins d'années que Karim, donc Karim a quatre fois l'âge de Hugo : $4x$.

(b) $x + (x + 3) + 4x = 63 \iff 6x + 3 = 63 \iff 6x = 60 \iff x = 10$. Hugo a 10 ans, Rose 13 ans et Karim 40 ans. Vérification : $13 = 10 + 3$, $40 \div 4 = 10$ et $10 + 13 + 40 = 63$.

(c) Léon a mis le « double » du mauvais côté : c'est l'âge de Karim qui doit valoir deux fois celui de Rose. L'équation correcte est : âge de Karim $+ t = 2 \times$ (âge de Rose $+ t$).

(d) $40 + t = 2(13 + t) \iff 40 + t = 26 + 2t \iff 40 - 26 = 2t - t \iff t = 14$. Vérification : dans 14 ans, Karim aura 54 ans, Rose 27 ans, et $2 \times 27 = 54$. Dans 14 ans, Karim aura le double de l'âge de Rose.

(e) $2(40 + t) = 13 + t \iff 80 + 2t = 13 + t \iff t = -67$. Une durée « dans t années » ne peut pas être négative : il faudrait remonter 67 ans en arrière, avant la naissance de Karim. Ce résultat n'a pas de sens, donc la mise en équation de Léon est fausse.