Corrigé – Discriminant et équations du second degré

Mathématiques – Première spécialité

Second degré · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Calculer le discriminant ★

Calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, puis donne le nombre de solutions de l'équation (sans la résoudre).

a) $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)$

$= 9 + 16$

$= 25$

$\Delta > 0$: l'équation a donc deux solutions.

b) $a = 2$, $b = 5$, $c = 4$.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 4$

$= 25 - 32$

$= -7$

$\Delta < 0$: l'équation n'a donc aucune solution réelle.

c) $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4)$

$= 16 - 16$

$= 0$

$\Delta = 0$: l'équation a donc une seule solution.

d) $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)$

$= 4 + 12$

$= 16$

$\Delta > 0$: l'équation a donc deux solutions.

e) $a = -2$, $b = -3$, $c = 5$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 5$

$= 9 + 40$

$= 49$

$\Delta > 0$: l'équation a donc deux solutions.

f) Il n'y a pas de terme en x : $b = 0$.

$a = 1$, $b = 0$, $c = -11$.

$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-11)$

$= 0 + 44$

$= 44$

$\Delta > 0$: l'équation a donc deux solutions.

g) *On range d'abord les termes :* $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
$a = 4$, $b = -12$, $c = 9$.
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9$
$= 144 - 144$
$= 0$
$\Delta = 0$: l'équation a donc une seule solution.

h) *On range d'abord les termes :* $5x^2 + 2x + 1 = 0$.
$a = 5$, $b = 2$, $c = 1$.
$\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times 1$
$= 4 - 20$
$= -16$
$\Delta < 0$: l'équation n'a donc aucune solution réelle.

Exercice 2 – Résoudre sans discriminant ★

Résous dans $\mathbb{R}$ sans calculer Δ : isole le carré, ou factorise puis utilise le produit nul.

a) $x^2 = 16$
$\iff x = -4$ ou $x = 4$ *(deux nombres ont pour carré* 16*)*
$S = \{-4\,;\,4\}$

b) $x^2 - 7 = 0$
$\iff x^2 = 7$ *(on ajoute* 7*)*
$\iff x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$
$S = \left\{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\right\}$

c) $3x^2 + 12 = 0$
$\iff 3x^2 = -12$ *(on retranche* 12*)*
$\iff x^2 = -4$ *(on divise par* 3*)*
Un carré n'est jamais négatif : aucune solution.
$S = \varnothing$

d) $x^2 = 5x$
$\iff x^2 - 5x = 0$ *(on ne divise pas par* x*)*
$\iff x\,(x - 5) = 0$ *(on factorise par* x*)*
$\iff x = 0$ ou $x = 5$ *(produit nul)*
$S = \{0\,;\,5\}$

e) $2x^2 + 7x = 0$
$\iff x\,(2x + 7) = 0$ *(on factorise par* x*)*
$\iff x = 0$ ou $2x + 7 = 0$ *(produit nul)*
$\iff x = 0$ ou $x = -\dfrac{7}{2}$
$S = \left\{-\dfrac{7}{2}\,;\,0\right\}$

f) $(x-3)^2 = 25$

$\iff x-3 = -5$ ou $x-3 = 5$ *(deux nombres ont pour carré 25)*

$\iff x = -2$ ou $x = 8$

$S = \{-2\,;\,8\}$

g) $4x^2 - 1 = 0$

$\iff (2x-1)(2x+1) = 0$ *($a^2-b^2=(a-b)(a+b)$)*

$\iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$ *(produit nul)*

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$

h) $(x+4)(3x-1) = 0$

$\iff x+4 = 0$ ou $3x-1 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = -4$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

$S = \left\{-4\,;\,\dfrac{1}{3}\right\}$

Exercice 3 – Résoudre avec le discriminant ★

Résous dans $\mathbb{R}$. Donne les solutions exactes, sous forme simplifiée.

a) $t^2 - t - 12 = 0$

$a = 1, b = -1, c = -12$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)$

$= 1 + 48$

$= 49$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) - 7}{2 \times 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) + 7}{2 \times 1} = \dfrac{8}{2} = 4$

$S = \{-3\,;\,4\}$

b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$a = 2, b = 3, c = -2$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2)$

$= 9 + 16$

$= 25$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 5}{2 \times 2} = \dfrac{-8}{4} = -2$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 5}{2 \times 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$

c) $-x^2+2x+8=0$

$a=-1, b=2, c=8.$

$\Delta = 2^2-4\times(-1)\times 8$

$\quad = 4+32$

$\quad = 36$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6.$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-6}{2\times(-1)} = \dfrac{-8}{-2} = 4$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+6}{2\times(-1)} = \dfrac{4}{-2} = -2$

$\quad S=\{-2\,;\,4\}$

d) $3x^2-2x+1=0$

$a=3, b=-2, c=1.$

$\Delta = (-2)^2-4\times 3\times 1$

$\quad = 4-12$

$\quad = -8$

$\Delta < 0$: le trinôme n'a pas de racine réelle.

$\quad S=\varnothing$

e) $9x^2-6x+1=0$

$a=9, b=-6, c=1.$

$\Delta = (-6)^2-4\times 9\times 1$

$\quad = 36-36$

$\quad = 0$

$\Delta = 0$: une seule racine, $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2\times 9} = \dfrac{1}{3}.$

$\quad S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

f) $x^2+2x-1=0$

$a=1, b=2, c=-1.$

$\Delta = 2^2-4\times 1\times(-1)$

$\quad = 4+4$

$\quad = 8$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2\times 1} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2\times 1} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$

$\quad S=\left\{-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\right\}$

g) $5x^2 - x - 1 = 0$

$a = 5,\ b = -1,\ c = -1.$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 5 \times (-1)$

$\quad = 1 + 20$

$\quad = 21$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{21}$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) - \sqrt{21}}{2 \times 5} = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{10}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) + \sqrt{21}}{2 \times 5} = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{10}$

$S = \left\{ \dfrac{1 - \sqrt{21}}{10} ; \dfrac{1 + \sqrt{21}}{10} \right\}$

h) $-2x^2 + 3x + 1 = 0$

$a = -2,\ b = 3,\ c = 1.$

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 1$

$\quad = 9 + 8$

$\quad = 17$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2 \times (-2)} = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2 \times (-2)} = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4}$

$S = \left\{ \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4} ; \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$

Exercice 4 – D'abord la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ★★

Résous dans $\mathbb{R}$: développe, mets tout dans le membre de gauche et réduis avant de calculer Δ.

a) $3x^2 = 7x + 6$

$\quad \iff 3x^2 - 7x - 6 = 0$ *(on retranche $7x + 6$)*

$a = 3,\ b = -7,\ c = -6.$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-6)$

$\quad = 49 + 72$

$\quad = 121$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7) - 11}{2 \times 3} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7) + 11}{2 \times 3} = \dfrac{18}{6} = 3$

$S = \left\{ -\dfrac{2}{3} ; 3 \right\}$

b) $x\left(x+3\right)=10$

$\iff x^2+3x=10$ *(on développe)*

$\iff x^2+3x-10=0$ *(on retranche* 10*)*

$a=1, b=3, c=-10$.

$\Delta=3^2-4\times1\times\left(-10\right)$

$=9+40$

$=49$

$\Delta>0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-7}{2\times1}=\dfrac{-10}{2}=-5$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+7}{2\times1}=\dfrac{4}{2}=2$

$S=\left\{-5\,;\,2\right\}$

c) $\left(2x-1\right)^2=x+2$

$\iff 4x^2-4x+1=x+2$ *(on développe)*

$\iff 4x^2-5x-1=0$ *(on retranche* $x+2$*)*

$a=4, b=-5, c=-1$.

$\Delta=\left(-5\right)^2-4\times4\times\left(-1\right)$

$=25+16$

$=41$

$\Delta>0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta}=\sqrt{41}$.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-\left(-5\right)-\sqrt{41}}{2\times4}=\dfrac{5-\sqrt{41}}{8}$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-\left(-5\right)+\sqrt{41}}{2\times4}=\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}$

$S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{41}}{8}\,;\,\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}\right\}$

d) $\left(x+1\right)\left(x-4\right)=2x-10$

$\iff x^2-3x-4=2x-10$ *(on développe)*

$\iff x^2-5x+6=0$ *(on retranche* $2x-10$*)*

$a=1, b=-5, c=6$.

$\Delta=\left(-5\right)^2-4\times1\times6$

$=25-24$

$=1$

$\Delta>0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-\left(-5\right)-1}{2\times1}=\dfrac{4}{2}=2$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-\left(-5\right)+1}{2\times1}=\dfrac{6}{2}=3$

$S=\left\{2\,;\,3\right\}$

e) $x^2 + 1 = 2(x - 3)$

$\iff x^2 + 1 = 2x - 6$ *(on développe)*

$\iff x^2 - 2x + 7 = 0$ *(on retranche $2x - 6$)*

$a = 1, b = -2, c = 7.$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 7$

$= 4 - 28$

$= -24$

$\Delta < 0$: le trinôme n'a pas de racine réelle.

$S = \varnothing$

f) $\frac{1}{2}x^2 + x = \frac{3}{2}$

$\iff x^2 + 2x = 3$ *(on multiplie par 2)*

$\iff x^2 + 2x - 3 = 0$ *(on retranche 3)*

$a = 1, b = 2, c = -3.$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3)$

$= 4 + 12$

$= 16$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$.

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$

$S = \{-3\,;\,1\}$

Exercice 5 – Choisir la méthode la plus rapide ★★

Résous dans $\mathbb{R}$ par la méthode la plus rapide. N'utilise Δ que si rien de plus simple ne marche.

a) Produit nul : pas besoin de développer.

$(x - 2)(3x + 5) = 0$

$\iff x - 2 = 0$ ou $3x + 5 = 0$

$\iff x = 2$ ou $x = -\frac{5}{3}$

$S = \left\{-\frac{5}{3}\,;\,2\right\}$

b) Pas de terme constant : on factorise par x.

$5x^2 = 3x$

$\iff 5x^2 - 3x = 0$

$\iff x(5x - 3) = 0$ *(on factorise par x)*

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$ *(produit nul)*

$S = \left\{0\,;\,\frac{3}{5}\right\}$

c) On isole le carré.

$2(x+1)^2 - 32 = 0$

$\iff 2(x+1)^2 = 32$ *(on ajoute 32)*

$\iff (x+1)^2 = 16$ *(on divise par 2)*

$\iff x+1 = -4$ ou $x+1 = 4$

$\iff x = -5$ ou $x = 3$

$S = \{-5\,;\,3\}$

d) On reconnaît l'identité $a^2 + 2ab + b^2$.

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$\iff (x+3)^2 = 0$ *($(x+3)^2 = x^2+6x+9$)*

$\iff x+3 = 0$ *(un carré est nul si le nombre est nul)*

$S = \{-3\}$

e) Deux carrés égaux : on passe tout à gauche et on factorise avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$(x+2)^2 = (2x-1)^2$

$\iff (x+2)^2 - (2x-1)^2 = 0$

$\iff \big[(x+2) - (2x-1)\big]\big[(x+2) + (2x-1)\big] = 0$

$\iff (3-x)(3x+1) = 0$ *(on réduit chaque crochet)*

$\iff x = 3$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$ *(produit nul)*

$S = \left\{-\dfrac{1}{3}\,;\,3\right\}$

f) Ni carré isolé ni facteur commun : on calcule Δ.

$x^2 - x - 20 = 0$

$a = 1,\ b = -1,\ c = -20.$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20)$

$= 1 + 80$

$= 81$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) - 9}{2 \times 1} = \dfrac{-8}{2} = -4$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) + 9}{2 \times 1} = \dfrac{10}{2} = 5$

$S = \{-4\,;\,5\}$

Exercice 6 – Équations avec un quotient ★★

Résous dans $\mathbb{R}$. Commence par la valeur interdite.

a) Valeur interdite : -1, car le dénominateur $x+1$ s'annule pour $x=-1$.

On travaille avec $x \neq -1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-5}{x+1} &= 1 \\ &\iff x^2-5 = x+1 \quad \textit{(on multiplie par } x+1 \neq 0\textit{)} \\ &\iff x^2-x-6 = 0 \quad \textit{(on retranche } x+1\textit{)}\end{aligned}$$

$a=1,\ b=-1,\ c=-6$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2 - 4\times 1 \times (-6) \\ &= 1+24 \\ &= 25\end{aligned}$$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-5}{2\times 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+5}{2\times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$S = \{-2\,;\,3\}$$

Aucune des deux solutions n'est la valeur interdite -1 : on les garde.

b) Valeur interdite : 0, car le dénominateur x s'annule pour $x=0$.

On travaille avec $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x} &= x-1 \\ &\iff 2x+1 = x^2-x \quad \textit{(on multiplie par } x \neq 0\textit{)} \\ &\iff x^2-3x-1 = 0 \quad \textit{(on passe tout à droite, puis on échange les membres)}\end{aligned}$$

$a=1,\ b=-3,\ c=-1$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4\times 1 \times (-1) \\ &= 9+4 \\ &= 13\end{aligned}$$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$S = \left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}\,;\,\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

Aucune solution ne vaut 0 : on les garde.

c) Valeur interdite : 3, car le dénominateur $x-3$ s'annule pour $x=3$.

On travaille avec $x \neq 3$.

Un quotient est nul quand son numérateur est nul (et son dénominateur non nul).

Numérateur : $x^2-4x+3=0$.

$a=1, b=-4, c=3$.

$\begin{aligned}\Delta &= (-4)^2 - 4\times 1\times 3\\ &= 16-12\\ &= 4\end{aligned}$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4)-2}{2\times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4)+2}{2\times 1} = \dfrac{6}{2} = 3$

3 *est la valeur interdite : on l'écarte.* Il reste la solution 1.

$S=\{1\}$

d) Valeur interdite : 0, car le dénominateur x s'annule pour $x=0$.

On travaille avec $x \neq 0$.

$\begin{aligned}x+\frac{4}{x} &= 5\\ &\iff x^2+4=5x \quad \textit{(on multiplie par } x\neq 0\textit{)}\\ &\iff x^2-5x+4=0 \quad \textit{(on retranche } 5x\textit{)}\end{aligned}$

$a=1, b=-5, c=4$.

$\begin{aligned}\Delta &= (-5)^2 - 4\times 1\times 4\\ &= 25-16\\ &= 9\end{aligned}$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-3}{2\times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+3}{2\times 1} = \dfrac{8}{2} = 4$

$S=\{1\,;\,4\}$

Aucune solution ne vaut 0 : on les garde.

e) Valeur interdite : 2, car le dénominateur $x-2$ s'annule pour $x=2$.

On travaille avec $x \neq 2$.

$$\frac{3}{x-2} = \frac{x}{2}$$
$$\iff 6 = x\,(x-2) \quad \textit{(produit en croix)}$$
$$\iff x^2 - 2x - 6 = 0 \quad \textit{(on développe et on passe tout à gauche)}$$

$a = 1,\ b = -2,\ c = -6.$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$
$$= 4 + 24$$
$$= 28$$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 2\sqrt{7}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{2} = 1 - \sqrt{7}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 2\sqrt{7}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{2} = 1 + \sqrt{7}$$
$$S = \left\{1 - \sqrt{7}\,;\, 1 + \sqrt{7}\right\}$$

Aucune solution ne vaut 2 : on les garde.

Exercice 7 – Changement d'inconnue ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$ en posant une nouvelle inconnue X.

a) On pose $X = x^2$: $x^4 = (x^2)^2 = X^2$.

L'équation devient :

$$X^2 + 3X - 4 = 0$$

$a = 1,\ b = 3,\ c = -4.$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4)$$
$$= 9 + 16$$
$$= 25$$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$.

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$
$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Retour à x : $X = x^2$ ne peut pas être négatif, on écarte $X = -4$.

$$x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$
$$S = \{-1\,;\,1\}$$

b) On pose $X = x^2$.

L'équation devient :

$2X^2 - 7X + 3 = 0$

$a = 2, b = -7, c = 3.$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 49 - 24$

$= 25$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5.$

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7) - 5}{2 \times 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7) + 5}{2 \times 2} = \dfrac{12}{4} = 3$

Retour à x : les deux valeurs de X sont positives.

$x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$x^2 = 3 \iff x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

$$S = \left\{ -\sqrt{3} \,;\, -\frac{\sqrt{2}}{2} \,;\, \frac{\sqrt{2}}{2} \,;\, \sqrt{3} \right\}$$

c) L'équation n'a de sens que pour $x \geqslant 0$.

On pose $X = \sqrt{x}$, avec $X \geqslant 0$: $x = X^2$.

L'équation devient :

$X^2 - 3X + 2 = 0$

$a = 1, b = -3, c = 2.$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 9 - 8$

$= 1$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1.$

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) - 1}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

$X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) + 1}{2 \times 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

Retour à x : $\sqrt{x} = 1 \iff x = 1$ et $\sqrt{x} = 2 \iff x = 4$ (les deux valeurs de X sont positives).

$$S = \{1 \,;\, 4\}$$

Exercice 8 – Une équation à paramètre ★★★

1. Pour $m = 5$: $x^2 + 5x + 4 = 0$.
   $a = 1, b = 5, c = 4$.
   $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4$
   $= 25 - 16$
   $= 9$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - 3}{2 \times 1} = \dfrac{-8}{2} = -4$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + 3}{2 \times 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$
   $S = \{-4\,;\,-1\}$

2. $a = 1, b = m, c = 4$: $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 4 = m^2 - 16$.
   Une seule solution quand $\Delta = 0$:
   $m^2 - 16 = 0$
   $\iff m^2 = 16$
   $\iff m = -4$ ou $m = 4$
   $S = \{-4\,;\,4\}$

   Pour $m = 4$: $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2} = -2$.
   Pour $m = -4$: $x_0 = -\dfrac{-4}{2} = 2$.

3. 3 est solution si $3^2 + 3m + 4 = 0$:
   $9 + 3m + 4 = 0$
   $\iff 3m = -13$ *($9 + 4 = 13$)*
   $\iff m = -\dfrac{13}{3}$ *(on divise par 3)*
   $S = \left\{-\dfrac{13}{3}\right\}$

   L'équation devient $x^2 - \dfrac{13}{3}x + 4 = 0$, soit, en multipliant par 3 : $3x^2 - 13x + 12 = 0$.
   $a = 3, b = -13, c = 12$.
   $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 3 \times 12$
   $= 169 - 144$
   $= 25$
   $\Delta > 0$: deux racines.
   On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-13) - 5}{2 \times 3} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-13) + 5}{2 \times 3} = \dfrac{18}{6} = 3$
   On retrouve bien 3 ; l'autre solution est $\dfrac{4}{3}$.

4. *Si $m = 2$, le terme en x^2 disparaît : ce n'est plus une équation du second degré.*

   Pour $m = 2$: $4x + 1 = 0$, une seule solution $x = -\dfrac{1}{4}$.

   Pour $m \neq 2$: $\Delta = 4^2 - 4(m-2) \times 1 = 24 - 4m$, et une seule solution quand $\Delta = 0$:

   $24 - 4m = 0$

   $\iff 4m = 24$

   $\iff m = 6$ *(on divise par 4)*

   $S = \{6\}$

   Pour $m = 6$: $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2 = 0$, solution $-\dfrac{1}{2}$.

   Conclusion : (F_m) a une seule solution pour $m = 2$ et pour $m = 6$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque résolution d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $b = -6$ *s'écrit entre parenthèses :* $(-6)^2 = 36$*, un carré est positif.*

$x^2 - 6x + 3 = 0$

$a = 1, b = -6, c = 3.$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 3$

$= 36 - 12$

$= 24$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - 2\sqrt{6}}{2 \times 1} = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{2} = 3 - \sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + 2\sqrt{6}}{2 \times 1} = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{2} = 3 + \sqrt{6}$$

$S = \left\{3 - \sqrt{6}\,;\, 3 + \sqrt{6}\right\}$

b) *On a divisé par x : on a perdu la solution 0.*

$2x^2 = 6x$

$\iff 2x^2 - 6x = 0$

$\iff 2x\,(x - 3) = 0$ *(on factorise par $2x$)*

$\iff x = 0$ ou $x = 3$ *(produit nul)*

$S = \{0\,;\, 3\}$

c) $(-7)^2 = 49$ *aussi : il y a deux solutions.*

$x^2 = 49$

$\iff x = -7$ ou $x = 7$

$S = \{-7\,;\, 7\}$

d) $b = -1$, *donc* $-b = 1$ *et non* -1.

$3x^2 - x - 4 = 0$

$a = 3$, $b = -1$, $c = -4$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4)$

$\quad = 1 + 48$

$\quad = 49$

$\Delta > 0$: deux racines.

On calcule $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - 7}{2 \times 3} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + 7}{2 \times 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$S = \left\{ -1\,;\, \frac{4}{3} \right\}$$

e) *On divise* ***tout*** *le numérateur par* 2*, les deux termes.*

$$\frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{2\left(2 + \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{5}$$

f) -1 *annule le dénominateur : c'est une valeur interdite.*

Valeur interdite : $x = -1$.

Le numérateur est nul pour $x = -1$ ou $x = 1$; on écarte -1.

$S = \{1\}$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Le discriminant de $3x^2 - 5x - 2$ vaut :

Réponse C : 49

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$; 1 oublie le signe de c, -1 et -49 écrivent $-5^2 = -25$.

2. L'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$ a :

Réponse A : aucune solution réelle

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$.

3. Les solutions de $x^2 - 2x - 2 = 0$ sont :

Réponse D : $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$

$\Delta = 4 + 8 = 12$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, et $\dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$.

4. L'ensemble des solutions de $3x^2 = 12x$ est :

Réponse B : $\{0\,;\,4\}$

$3x^2 - 12x = 0 \iff 3x(x - 4) = 0$: on ne divise pas par x.

5. L'équation $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$ a pour ensemble de solutions :

Réponse D : $\{-2\}$

Le numérateur s'annule en -2 et en 2, mais 2 est la valeur interdite.

6. L'équation $x^2 - 6x + m = 0$ a une seule solution pour :

Réponse A : $m = 9$

$\Delta = 36 - 4m = 0 \iff m = 9$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).