Corrigé – Produit nul, $x^2 = a$

Mathématiques – Troisième

Équations · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Équation produit nul ★

Résous. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

a) $(x-6)(x+1)=0$

$\iff x-6=0$ ou $x+1=0$ *(produit nul)*

$\iff x=6$ ou $x=-1$

Les solutions sont -1 et 6.

b) $(x+8)(3x-9)=0$

$\iff x+8=0$ ou $3x-9=0$ *(produit nul)*

$\iff x=-8$ ou $3x=9$

$\iff x=-8$ ou $x=3$ *(on divise par 3)*

Les solutions sont -8 et 3.

c) $x(x+12)=0$

$\iff x=0$ ou $x+12=0$ *(produit nul)*

$\iff x=0$ ou $x=-12$

Les solutions sont -12 et 0.

d) $(5x+2)(x-7)=0$

$\iff 5x+2=0$ ou $x-7=0$ *(produit nul)*

$\iff 5x=-2$ ou $x=7$

$\iff x=-0{,}4$ ou $x=7$ *(on divise par 5)*

Les solutions sont $-0{,}4$ et 7.

e) $7x(2x-1)=0$

$\iff 7x=0$ ou $2x-1=0$ *(produit nul)*

$\iff x=0$ ou $2x=1$

$\iff x=0$ ou $x=0{,}5$ *(on divise par 2)*

Les solutions sont 0 et $0{,}5$.

f) $(x+3)^2=0$

$\iff x+3=0$ *($(x+3)^2=(x+3)(x+3)$: les deux facteurs sont égaux)*

$\iff x=-3$

La solution est -3.

g) $-3(x+4)(x-2)=0$

$\iff x+4=0$ ou $x-2=0$ *(-3 n'est jamais nul : seuls les deux autres facteurs comptent)*

$\iff x=-4$ ou $x=2$

Les solutions sont -4 et 2.

h) $(x-1)(x+5)(2x-3)=0$

$\iff x-1=0$ ou $x+5=0$ ou $2x-3=0$ *(produit nul, avec trois facteurs)*

$\iff x=1$ ou $x=-5$ ou $x=1{,}5$

Les solutions sont -5, 1 et 1,5.

Exercice 2 – Équations $x^2=a$ ★

Résous. *Combien de solutions ?*

a) $x^2=144$

$\iff x=\sqrt{144}$ ou $x=-\sqrt{144}$ *($144>0$: deux solutions)*

$\iff x=12$ ou $x=-12$

Les solutions sont -12 et 12.

b) $x^2=0$

$\iff x=0$ *(seul 0 a pour carré 0)*

La solution est 0.

c) $x^2=-9$

Un carré est toujours positif ou nul : il ne peut pas valoir -9.

L'équation n'a pas de solution.

d) $x^2=10$

$\iff x=\sqrt{10}$ ou $x=-\sqrt{10}$ *($10>0$: deux solutions)*

Les solutions sont $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$.

e) $x^2=0{,}36$

$\iff x=0{,}6$ ou $x=-0{,}6$ *($0{,}36>0$ et $0{,}6\times 0{,}6=0{,}36$)*

Les solutions sont $-0{,}6$ et 0,6.

f) $x^2+4=40$

$\iff x^2=36$ *(on isole x^2 : on soustrait 4)*

$\iff x=6$ ou $x=-6$ *($36>0$: deux solutions)*

Les solutions sont -6 et 6.

g) $3x^2=48$

$\iff x^2=16$ *(on divise par 3)*

$\iff x=4$ ou $x=-4$ *($16>0$: deux solutions)*

Les solutions sont -4 et 4.

h) $5x^2+20=0$

$\iff 5x^2=-20$ *(on soustrait 20)*

$\iff x^2=-4$ *(on divise par 5)*

Un carré n'est jamais négatif : aucun nombre ne convient.

L'équation n'a pas de solution.

Exercice 3 – Facteur commun, puis produit nul ★

Ramène tout à « $= 0$ », factorise, puis résous. *Ne divise pas par x.*

a) $x^2 - 5x = 0$

$\iff x(x-5) = 0$ *(facteur commun x)*

$\iff x = 0$ ou $x - 5 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = 0$ ou $x = 5$

Les solutions sont 0 et 5.

b) $x^2 = 9x$

$\iff x^2 - 9x = 0$ *(on soustrait $9x$)*

$\iff x(x-9) = 0$ *(facteur commun x)*

$\iff x = 0$ ou $x = 9$ *(produit nul)*

Les solutions sont 0 et 9.

c) $4x^2 + 12x = 0$

$\iff 4x(x+3) = 0$ *(facteur commun $4x$)*

$\iff 4x = 0$ ou $x + 3 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = 0$ ou $x = -3$

Les solutions sont -3 et 0.

d) $3x^2 = x$

$\iff 3x^2 - x = 0$ *(on soustrait x)*

$\iff x(3x-1) = 0$ *(facteur commun x)*

$\iff x = 0$ ou $3x - 1 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

Les solutions sont 0 et $\dfrac{1}{3}$.

e) $2x^2 = -14x$

$\iff 2x^2 + 14x = 0$ *(on ajoute $14x$)*

$\iff 2x(x+7) = 0$ *(facteur commun $2x$)*

$\iff 2x = 0$ ou $x + 7 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = 0$ ou $x = -7$

Les solutions sont -7 et 0.

f) $10x^2 - 4x = 0$

$\iff 2x(5x-2) = 0$ *(facteur commun $2x$)*

$\iff 2x = 0$ ou $5x - 2 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = 0$ ou $x = 0{,}4$

Les solutions sont 0 et 0,4.

g) $x^2 + x = 0$

$\iff x(x+1) = 0$ *(facteur commun x)*

$\iff x = 0$ ou $x + 1 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = 0$ ou $x = -1$

Les solutions sont -1 et 0.

h) $6x = 8x^2$

$\iff 0 = 8x^2 - 6x$ *(on soustrait $6x$)*

$\iff 0 = 2x\,(4x - 3)$ *(facteur commun $2x$)*

$\iff 2x = 0$ ou $4x - 3 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = 0$ ou $x = 0{,}75$

Les solutions sont 0 et $0{,}75$.

Exercice 4 – Avec $a^2 - b^2$ ★★

Factorise avec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, puis résous.

a) $x^2 - 64 = 0$

$\iff (x + 8)\,(x - 8) = 0$ *($a = x$, $b = 8$)*

$\iff x + 8 = 0$ ou $x - 8 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = -8$ ou $x = 8$

Les solutions sont -8 et 8.

b) $9x^2 - 4 = 0$

$\iff (3x + 2)\,(3x - 2) = 0$ *($a = 3x$, $b = 2$)*

$\iff 3x + 2 = 0$ ou $3x - 2 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = -\dfrac{2}{3}$ ou $x = \dfrac{2}{3}$

Les solutions sont $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$.

c) $(x + 1)^2 - 16 = 0$

$\iff (x + 1 + 4)\,(x + 1 - 4) = 0$ *($a = x + 1$, $b = 4$)*

$\iff (x + 5)\,(x - 3) = 0$

$\iff x = -5$ ou $x = 3$ *(produit nul)*

Les solutions sont -5 et 3.

d) $(2x - 3)^2 - 49 = 0$

$\iff (2x - 3 + 7)\,(2x - 3 - 7) = 0$ *($a = 2x - 3$, $b = 7$)*

$\iff (2x + 4)\,(2x - 10) = 0$

$\iff 2x = -4$ ou $2x = 10$ *(produit nul)*

$\iff x = -2$ ou $x = 5$

Les solutions sont -2 et 5.

e) $(x - 2)^2 = (2x + 1)^2$

$\iff (x - 2)^2 - (2x + 1)^2 = 0$ *(on ramène tout à gauche)*

$\iff \big[\,(x - 2) + (2x + 1)\,\big]\big[\,(x - 2) - (2x + 1)\,\big] = 0$ *($a = x - 2$, $b = 2x + 1$)*

$\iff (3x - 1)\,(-x - 3) = 0$ *(on réduit : le signe $-$ change les signes de $2x + 1$)*

$\iff 3x - 1 = 0$ ou $-x - 3 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = -3$

Les solutions sont -3 et $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 5 – Une parenthèse en facteur ★★

Ramène tout à « $= 0$ » si besoin, factorise, puis résous.

a) $(x+2)(x-3)+(x+2)(2x+1)=0$

$\iff (x+2)\big[(x-3)+(2x+1)\big]=0$ *(facteur commun $(x+2)$)*

$\iff (x+2)(3x-2)=0$

$\iff x+2=0$ ou $3x-2=0$ *(produit nul)*

$\iff x=-2$ ou $x=\dfrac{2}{3}$

Les solutions sont -2 et $\dfrac{2}{3}$.

b) $(2x-1)(x+4)-(2x-1)(3x-2)=0$

$\iff (2x-1)\big[(x+4)-(3x-2)\big]=0$ *(facteur commun $(2x-1)$)*

$\iff (2x-1)(-2x+6)=0$ *($-(3x-2)=-3x+2$)*

$\iff 2x-1=0$ ou $-2x+6=0$ *(produit nul)*

$\iff x=0{,}5$ ou $x=3$

Les solutions sont $0{,}5$ et 3.

c) $(3x+1)(x-2)=(3x+1)(5-x)$

$\iff (3x+1)(x-2)-(3x+1)(5-x)=0$ *(on ramène tout à gauche)*

$\iff (3x+1)\big[(x-2)-(5-x)\big]=0$ *(facteur commun $(3x+1)$)*

$\iff (3x+1)(2x-7)=0$

$\iff x=-\dfrac{1}{3}$ ou $x=3{,}5$ *(produit nul)*

Les solutions sont $-\dfrac{1}{3}$ et $3{,}5$.

d) $x(x+6)=4(x+6)$

$\iff x(x+6)-4(x+6)=0$ *(on ramène tout à gauche, sans diviser par $x+6$)*

$\iff (x+6)(x-4)=0$ *(facteur commun $(x+6)$)*

$\iff x=-6$ ou $x=4$ *(produit nul)*

Les solutions sont -6 et 4.

e) $(x+3)^2=2x+6$

$\iff (x+3)^2-2(x+3)=0$ *($2x+6=2(x+3)$)*

$\iff (x+3)\big[(x+3)-2\big]=0$ *(facteur commun $(x+3)$)*

$\iff (x+3)(x+1)=0$

$\iff x=-3$ ou $x=-1$ *(produit nul)*

Les solutions sont -3 et -1.

Exercice 6 – Choisir la méthode ★★

Résous en choisissant la méthode : $x^2=a$, produit nul, ou factoriser d'abord.

a) $16x^2=9$

$\iff x^2=\dfrac{9}{16}$ *(on isole x^2)*

$\iff x=\dfrac{3}{4}$ ou $x=-\dfrac{3}{4}$ *($\dfrac{9}{16}>0$: deux solutions)*

Les solutions sont $-0{,}75$ et $0{,}75$.

b) $(x+4)^2 = 9$
$\iff x+4 = 3$ ou $x+4 = -3$ *(les nombres dont le carré vaut 9 sont 3 et -3)*
$\iff x = -1$ ou $x = -7$ *(on soustrait 4)*
Les solutions sont -7 et -1.

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$
$\iff (x-3)^2 = 0$ *($a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$, $b = 3$)*
$\iff x - 3 = 0$ *(un carré est nul seulement si le nombre est nul)*
$\iff x = 3$
La solution est 3.

d) $(x-1)(x+4) = x - 1$
$\iff (x-1)(x+4) - (x-1) = 0$ *(on ramène tout à gauche)*
$\iff (x-1)\big[(x+4) - 1\big] = 0$ *(facteur caché : $x - 1 = (x-1) \times 1$)*
$\iff (x-1)(x+3) = 0$
$\iff x = 1$ ou $x = -3$ *(produit nul)*
Les solutions sont -3 et 1.

e) $2x^2 - 98 = 0$
$\iff 2x^2 = 98$ *(on ajoute 98)*
$\iff x^2 = 49$ *(on divise par 2)*
$\iff x = 7$ ou $x = -7$ *($49 > 0$: deux solutions)*
Les solutions sont -7 et 7.

Exercice 7 – Le potager ★★★

1. La longueur est le double de la largeur : $2x$.
   Aire = longueur × largeur = $2x \times x = 2x^2$.

2. L'aire vaut 98 m², donc $2x^2 = 98$.
   $2x^2 = 98$
   $\iff x^2 = 49$ *(on divise par 2)*
   $\iff x = 7$ ou $x = -7$ *($49 > 0$: deux solutions)*
   Les solutions sont -7 et 7.

3. x est une longueur, donc $x > 0$: on écarte -7, et $x = 7$.
   Largeur : 7 m ; longueur : $2 \times 7 = 14$ m.
   Vérification : $14 \times 7 = 98$ m².
   Périmètre : $2 \times (14 + 7) = 2 \times 21 = 42$ m.

Exercice 8 – Le carré agrandi ★★★

1. Le nouveau côté est $x + 3$: sa nouvelle aire est $(x+3)^2$.
   L'aire du carré de départ est x^2, et la nouvelle aire est 4 fois plus grande : $(x+3)^2 = 4x^2$.

2. $(x+3)^2 = 4x^2$
   $\iff (x+3)^2 - (2x)^2 = 0$ *(on ramène tout à gauche et* $4x^2 = (2x)^2$*)*
   $\iff (x+3+2x)(x+3-2x) = 0$ *(*a^2-b^2 *avec* $a = x+3$, $b = 2x$*)*
   $\iff (3x+3)(3-x) = 0$ *(on réduit)*
   $\iff 3x+3 = 0$ ou $3-x = 0$ *(produit nul)*
   $\iff x = -1$ ou $x = 3$
   Les solutions sont -1 et 3.

3. x est une longueur : on écarte -1.
   Le carré de départ a pour côté 3 cm.
   Vérification : son aire est $3^2 = 9$ cm² ; le nouveau côté mesure 6 cm et la nouvelle aire $6^2 = 36$ cm², et $36 = 4 \times 9$.

Exercice 9 – La balle lancée ★★★

1. On développe le membre de droite : $5t(4-t) = 5t \times 4 - 5t \times t = 20t - 5t^2$.
   On retrouve le membre de gauche.

2. La balle est au sol quand $h = 0$:
   $5t\,(4-t) = 0$
   $\iff 5t = 0$ ou $4-t = 0$ *(produit nul)*
   $\iff t = 0$ ou $t = 4$

   $t = 0$: c'est le moment du lancer.
   $t = 4$: la balle retombe au sol au bout de 4 secondes.

3. $h = 15$ s'écrit $20t - 5t^2 = 15$, soit $20t - 5t^2 - 15 = 0$.
   On développe $5(t-1)(3-t) = 5(3t - t^2 - 3 + t) = 5(-t^2 + 4t - 3) = -5t^2 + 20t - 15$: c'est bien le membre de gauche.
   $5\,(t-1)\,(3-t) = 0$
   $\iff t-1 = 0$ ou $3-t = 0$ *(5 n'est jamais nul : produit nul)*
   $\iff t = 1$ ou $t = 3$

   La balle est à 15 m au bout de 1 s (en montant) et au bout de 3 s (en redescendant).

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque résolution contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Il manque une solution :* $(-8)^2 = 64$ *aussi.*
$x^2 = 64$
$\iff x = 8$ ou $x = -8$ *(*$64 > 0$ *: deux solutions)*
Les solutions sont -8 et 8.

b) $(-6)^2 = 36$*, pas* -36 *: un carré n'est jamais négatif.*
$x^2 = -36$
Aucun nombre n'a un carré négatif.
L'équation n'a pas de solution.

c) *En divisant par x, on perd la solution 0.*

$x^2 = 12x$

$\iff x^2 - 12x = 0$ *(on soustrait $12x$)*

$\iff x(x - 12) = 0$ *(facteur commun x)*

$\iff x = 0$ ou $x = 12$ *(produit nul)*

Les solutions sont 0 et 12.

d) *Le produit vaut 8, pas 0 : la propriété du produit nul ne s'applique pas.*

$(x - 1)(x + 1) = 8$

$\iff x^2 - 1 = 8$ *(on développe)*

$\iff x^2 = 9$ *(on ajoute 1)*

$\iff x = 3$ ou $x = -3$ *($9 > 0$: deux solutions)*

Les solutions sont -3 et 3.

e) $2x - 6 = 0$ *donne $2x = 6$: il reste à diviser par 2.*

$(x + 4)(2x - 6) = 0$

$\iff x + 4 = 0$ ou $2x - 6 = 0$ *(produit nul)*

$\iff x = -4$ ou $2x = 6$

$\iff x = -4$ ou $x = 3$ *(on divise par 2)*

Les solutions sont -4 et 3.

f) *Une longueur est positive : on écarte -9.*

$c^2 = 81$ donne $c = 9$ ou $c = -9$; comme c est une longueur, le côté mesure 9 cm.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Les solutions de $(x - 9)(2x + 1) = 0$ sont :

Réponse B : 9 et $-\dfrac{1}{2}$

$x - 9 = 0$ donne $x = 9$; $2x + 1 = 0$ donne $2x = -1$, donc $x = -\dfrac{1}{2}$.

2. L'équation $x^2 = 20$ a :

Réponse D : deux solutions, $\sqrt{20}$ et $-\sqrt{20}$

$20 > 0$: deux solutions opposées.

3. L'équation $x^2 + 16 = 0$ a pour solutions :

Réponse A : aucune

$x^2 = -16$: un carré n'est jamais négatif.

4. Les solutions de $2x^2 = 7x$ sont :

Réponse C : 0 et $3{,}5$

$2x^2 - 7x = 0$, donc $x(2x - 7) = 0$: $x = 0$ ou $2x = 7$, soit $x = 3{,}5$. (Diviser par x fait perdre la solution 0.)

5. Pour résoudre $(x - 2)(x + 5) = 4$, on peut écrire $x - 2 = 4$ ou $x + 5 = 4$:

Réponse A : faux : le produit doit être égal à 0

La propriété du produit nul ne s'applique qu'à un produit égal à 0.

6. Un carré a pour aire 2,25 m². Son côté mesure :

Réponse D : 1,5 m

$1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$; une longueur est positive, et la racine carrée n'est pas la moitié.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).