49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Vérifier qu'une fonction est solution, équation $y' = f$*

À retenir : Vérifier : calcule $g'(x)$ d'un côté et le second membre de l'autre, puis montre l'égalité pour tout x. Pour « non solution », une valeur de x suffit. $y' = f$: toutes les primitives $F + C$ (exemple : $y' = 2x$ donne $y = x^2 + C$).

Ex. 1 ★☆☆ **Solution ou pas ?** — Dans chaque cas, dis si la fonction g est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. Justifie par deux calculs séparés et une phrase de conclusion.

(a) $g(x) = 2\mathrm{e}^{-3x} + 4$ et $y' = -3y + 12$.

(b) $g(x) = x^2 + 1$ et $y' = 2y - 2x^2$.

(c) $g(x) = 6\mathrm{e}^{-0{,}4x} + 2$ et $5y' + 2y = 4$ (commence par isoler y').

(d) $g(x) = 4x - 1$ et $y' = y - 4x + 5$.

(e) $g(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + x$ et $y' = 0{,}5y$.

Ex. 2 ★☆☆ **Toutes les solutions de $y' = f$** — Donne toutes les solutions de chaque équation sur l'intervalle indiqué. Isole d'abord y' si besoin.

(a) $y' = 6x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $3y' = 6\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $y' - \dfrac{3}{x} = 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $y' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

Ex. 3 ★★☆ **Le bon exposant** — On considère l'équation $(E) : y' + 4y = 8$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel m, on pose $g(x) = 5\mathrm{e}^{mx} + 2$.

(a) Écris (E) sous la forme $y' = ay + b$ et donne a et b.

(b) Léa écrit : « $g' = -4g + 8$, donc g est solution. » Explique pourquoi cela ne prouve rien.

(c) On prend $m = 1$. Prouve que g n'est pas solution de (E) en choisissant une valeur de x.

(d) Dans le cas général, exprime $g'(x)$, puis $-4g(x) + 8$, en fonction de x et de m.

(e) Détermine m pour que g soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ex. 4 ★★☆ **Noé et « la » solution** — On considère $(E) : y' = 3\mathrm{e}^{3x} - 2x$ sur $\mathbb{R}$. Noé écrit : « La solution de (E) est $y = \mathrm{e}^{3x} - x^2$. »

(a) Explique l'erreur de Noé, puis donne toutes les solutions de (E).

(b) Détermine la solution f de (E) telle que $f(0) = 4$.

(c) Détermine la solution g de (E) telle que $g(1) = \mathrm{e}^3$, puis calcule $g(0)$.

(d) Ambre affirme : « $h(x) = \mathrm{e}^{3x} - x^2 + 3x$ est aussi solution de (E). » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 5 ★★★ **Une famille de solutions et l'erreur d'Inès** — On considère l'équation $(E) : 2y' + 3y = 3x + 8$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Écris (E) sous la forme $y' = \ldots$ en isolant y'.

(b) Montre que la fonction $g : x \mapsto x + 2$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour tout réel C, on pose $h_C(x) = C\mathrm{e}^{-1{,}5x} + x + 2$. Montre que h_C est solution de (E), quel que soit C.

(d) Détermine le réel C tel que $h_C(0) = 5$, puis donne l'expression de cette fonction.

(e) Inès écrit : « $k(x) = \mathrm{e}^{-1{,}5x} + x$ vérifie $k' = -1{,}5k + 1{,}5x + 4$, donc k est solution. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Une primitive cherchée sous une forme imposée** — On considère l'équation $(E) : y' = (x+1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b, on pose $G(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$.

(a) Détermine les réels a et b tels que G soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) Déduis-en toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Justifie.

(c) Détermine la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(1\,;2\mathrm{e})$.

(d) Lucas affirme : « Il existe une solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 3$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Vrai ou faux sur une même équation** — On considère l'équation $(E) : y' = 2y - 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, et justifie.

(a) Affirmation : « La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 2x$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. »

(b) Affirmation : « La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 2x + 1$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. »

(c) Affirmation : « Si u et v sont deux solutions de (E), alors $u + v$ est aussi solution de (E). »

Ex. 7 **(suite)**

(d) Affirmation : « Si u est solution de (E), alors $x \mapsto u(x) - 2x$ est solution de $y' = 2y$. »

2. *Équation $y' = ay$*

À retenir : J'isole y' pour lire a : $y' + 5y = 0 \iff y' = -5y$. Les solutions sont $x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$ ($C = 0$ compris). Si $y(x_0) = y_0$, alors $Ce^{ax_0} = y_0$: $C = y_0$ seulement si $x_0 = 0$. Une solution non nulle ne s'annule jamais.

Ex. 8 ★☆☆ **Isoler y' pour lire a** — Pour chaque équation différentielle, isole y', donne le réel a, puis écris toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

(a) $y' + 3y = 0$ (b) $2y' = y$ (c) $7y - y' = 0$

(d) $4y' + 6y = 0$ (e) $3y' - 2y = 0$ (f) $-y' = 0{,}4y$

Ex. 9 ★☆☆ **Une condition, une seule solution** — Dans chaque cas, détermine la solution f de l'équation différentielle qui vérifie la condition donnée.

(a) $y' = 4y$ et $y(0) = 5$

(b) $y' = 2y$ et $y(1) = 3$

(c) $y' = -y$ et $y(5) = 0$

(d) $y' + 2y = 0$ et $y(-1) = 4$

(e) $3y' = y$ et $y(3) = -2$

(f) $y' = -4y$ et $y(\ln 2) = 1$

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les solutions** — On considère l'équation différentielle $(E) : 5y' = 2y$ sur $\mathbb{R}$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) « La fonction $x \mapsto e^{0,4x}$ est la seule solution de (E). »

(b) « La solution de (E) qui vaut -3 en 0 est décroissante sur $\mathbb{R}$. »

(c) « Une solution de (E) peut s'annuler en 2 sans être la fonction nulle. »

(d) « Toute solution de (E) tend vers 0 en $-\infty$. »

Ex. 11 ★★☆ **Un quotient constant** — Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annule pas. Pour tout réel x, elle vérifie $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{4}$. De plus, $f(2) = 6$.

(a) Justifie que f est solution d'une équation $y' = ay$ et précise la valeur de a.

(b) Tom affirme : « comme $f(2) = 6$, la constante vaut $C = 6$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis donne $f(x)$.

(c) Étudie le sens de variation de f et sa limite en $+\infty$.

(d) Résous l'inéquation $f(x) \geqslant 3$.

Ex. 12 ★★★ **Démontrer le théorème, puis l'utiliser** — On considère l'équation différentielle $(E) : 4y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Isole y' et donne le réel a tel que (E) s'écrive $y' = ay$.

(b) Soit f une solution de (E) et $g(x) = f(x)e^{-ax}$ sur $\mathbb{R}$. Montre que g est constante.

(c) Déduis-en l'expression de toute solution de (E), puis vérifie la réciproque.

(d) Détermine la solution h de (E) telle que $h(2) = -5$.

(e) Donne le signe de $h(x)$, le sens de variation de h et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Retrouver a et C à partir de deux points** — Lina cherche une solution f d'une équation $y' = ay$, où le réel a est inconnu. La courbe de f passe par les points $A(1\,;\,6)$ et $B(3\,;\,54)$. On note $f(x) = Ce^{ax}$.

(a) Écris les deux égalités vérifiées par C et a. Justifie que $C \neq 0$.

(b) Déduis-en que $e^{2a} = 9$, puis la valeur exacte de a.

(c) Calcule C. Écris ensuite $f(x)$ sous la forme $k \times b^x$, avec k et b entiers.

(d) Détermine le plus petit entier n tel que $f(n) \geqslant 10\,000$.

(e) Montre que $f(x+1) = 3f(x)$ pour tout réel x. Ben dit : « quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 3 ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Tangentes aux courbes des solutions** — Soit a un réel non nul. Soit f une solution non nulle de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel. On note T la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0.

(a) Justifie que $f(x_0) \neq 0$. Donne ensuite une équation de T en fonction de a, x_0 et $f(x_0)$.

(b) Montre que T coupe l'axe des abscisses en un point dont tu donneras l'abscisse en fonction de x_0 et a.

(c) Application : f est une solution non nulle de $2y' + 5y = 0$. Où la tangente au point d'abscisse 1 coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

(d) Détermine a et la solution g de $y' = ay$ dont la courbe passe par $M(1\,;\,3)$ et dont la tangente en M passe par $N(4\,;\,0)$.

(e) Étudie les variations de g et sa limite en $+\infty$. Sa courbe coupe-t-elle celle de la solution k de la même équation telle que $k(0) = 4$? Justifie.

3. *Équation $y' = ay + b$ et condition initiale*

À retenir : Solution constante c : on résout $0 = ac + b$. Solutions : $Ce^{ax} + c$. La condition porte sur la fonction complète : $C = y(0) - c$. Ex. : $y' = 5y + 10$ donne $c = -2$, pas 10.

Ex. 15 ★☆☆ **Solution constante et forme générale** — Pour chaque équation, isole y' si besoin, puis donne la solution constante c et toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

(a) $y' = 3y - 12$ (b) $y' = -5y + 40$

(c) $y' = 4y + 6$ (d) $2y' + 6y = 9$

(e) $y' - 0{,}2y = 3$ (f) $-y' + 7y = 14$

Ex. 16 ★☆☆ **Trouver l'unique solution** — Pour chaque équation, détermine l'unique solution f qui vérifie la condition donnée.

(a) $y' = -2y + 8$ et $f(0) = 10$

(b) $y' = 3y + 6$ et $f(0) = 0$

(c) $y' = 0{,}5y - 3$ et $f(0) = 6$

(d) $y' = -4y + 2$ et $f(0) = -1$

(e) $y' = 2y + 14$ et $f(1) = -4$

(f) $y' = -y + 3$ et $f(\ln 2) = 4$

Ex. 17 ★★☆ **L'erreur de Léa** — Léa doit résoudre (E) : $4y' + 8y = 12$ avec la condition $y(0) = 5$. Elle écrit : « Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-2x} + 3$; comme $y(0) = 5$, on a $C = 5$. »

(a) Isole y' dans (E), puis donne les réels a et b.

(b) Repère les deux erreurs de Léa et explique-les.

(c) Détermine la bonne solution f, puis vérifie qu'elle est solution de (E) et que $f(0) = 5$.

(d) Étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis donne sa limite en $+\infty$.

Ex. 18 ★★☆ **Vrai ou faux sur une même équation** — On considère l'équation $(E) : y' = 0{,}4y - 2$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) « La fonction constante égale à -5 est solution de (E). »

(b) « La solution f de (E) telle que $f(5) = 7$ est $f(x) = 2e^{0{,}4x} + 5$. »

(c) « Toutes les solutions de (E) ont pour limite 5 en $+\infty$. »

(d) « La solution g de (E) telle que $g(0) = 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. »

Ex. 19 ★★★ **Une condition loin de 0** — On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 4$, où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Isole y' dans (E), puis donne les réels a et b et la solution constante c de (E).

(b) Donne toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

(c) Détermine l'unique solution f de (E) telle que $f(2) = -1$, puis vérifie qu'elle est bien solution de (E).

(d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$. Donne la valeur exacte de la borne, puis son arrondi à 10^{-2}.

Ex. 19 (suite)

(e) Soit y_0 un réel et g la solution de (E) telle que $g(2) = y_0$. Selon les valeurs de y_0, donne le sens de variation de g et sa limite en $+\infty$.

Ex. 20 ★★★ **Perfusion à l'hôpital** — Un patient reçoit par perfusion 6 mg de médicament par heure. On note $q(t)$ la quantité de médicament dans le sang (en mg) au bout de t heures, avec $q(0) = 0$. L'organisme élimine le médicament à la vitesse $0{,}15\,q(t)$ (en mg/h). On admet que $q'(t)$ est la vitesse d'apport moins la vitesse d'élimination.

(a) Traduis l'énoncé par une équation différentielle vérifiée par q sur $[0\,;+\infty[$, puis donne a et b.

(b) Donne la solution constante de cette équation, puis toutes ses solutions.

(c) Hugo affirme : « Comme $q(0) = 0$, la constante C vaut 0. » A-t-il raison ? Justifie, puis donne $q(t)$.

(d) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t)$ et interprète ce résultat dans le contexte.

(e) Le médicament est efficace dès que $q(t) \geqslant 30$ mg. Au bout de combien de temps l'est-il ? Arrondis à la minute.

Ex. 21 ★★★ **Euler face à la solution exacte** — On considère $(E) : y' = -0{,}5y + 3$ et la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$. On approche f sur $[0\,;\,1]$ par la méthode d'Euler, avec un pas $h = 0{,}2$: $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et $y_{k+1} = y_k + hf'(x_k)$, où $f'(x_k)$ est remplacé par $-0{,}5y_k + 3$.

(a) Montre que, pour tout entier k, $y_{k+1} = 0{,}9y_k + 0{,}6$.

(b) Recopie et complète le tableau.

k	0	1	2	3
x_k	0	0{,}2	0{,}4	0{,}6
y_k	2			

(c) Complète la ligne manquante du programme, puis indique ce qu'il affiche.

```
def euler(h, n):
    y = 2
    for k in range(n):
        y = ...
    return y

print(round(euler(0.2, 5), 4))
```

(d) Détermine $f(x)$ en résolvant (E), puis vérifie que f est solution et que $f(0) = 2$.

(e) Calcule $f(1)$ arrondi à 10^{-4} et l'écart avec la valeur d'Euler. Donne enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Second membre non constant : $y' = ay + f$

À retenir : Solutions de $y' = ay + f$: $g + Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$, où g est une solution particulière (donnée, ou trouvée par identification). La condition initiale porte sur la somme : $y' = 2y + 4x$, $g(x) = -2x - 1$, $y(0) = 0$ donne $-1 + C = 0$, soit $C = 1$.

Ex. 22 ★☆☆ **Solution particulière donnée** — Dans chaque cas, justifie par un calcul. Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

(a) Vérifie que $g(x) = x$ est solution de $y' = 3y - 3x + 1$, puis donne toutes les solutions de cette équation.

(b) Justifie que $k(x) = e^x + 4e^{-x}$ est solution de $y' = -y + 2e^x$.

(c) Vérifie que $g(x) = -x - 2$ est solution de $2y' - y = x$, puis isole y' et donne toutes les solutions.

(d) Vrai ou faux ? $h(x) = x^2$ est solution de $y' = -y + x^2 + 2$. Justifie.

(e) Noé vérifie que $g(x) = x + 1$ est solution de $y' = 2y - 2x - 1$, puis il écrit : « les solutions sont les $C(x + 1)$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige.

Ex. 23 ★☆☆ **Forme imposée : identification** — Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour chercher une solution de forme imposée : dérive, remplace dans l'équation, puis identifie les coefficients.

(a) Détermine les réels α et β tels que $g(x) = \alpha x + \beta$ soit solution de $y' = -2y + 4x$.

(b) Déduis-en toutes les solutions de $y' = -2y + 4x$.

(c) Vrai ou faux ? Il existe un réel α tel que $x \mapsto \alpha e^{2x}$ soit solution de $y' = 2y + 3e^{2x}$. Justifie.

(d) Détermine le réel α tel que $x \mapsto \alpha x e^{2x}$ soit solution de $y' = 2y + 3e^{2x}$.

(e) Détermine les réels α et β tels que $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ soit solution de $y' = 2y + 9xe^{-x}$.

Ex. 24 ★★☆ **La condition initiale porte sur la somme** — On considère l'équation (E) : $y' = -3y + (2x + 5)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On admet que $g(x) = (x + 2)e^{-x}$ est solution de (E). On cherche la solution f de (E) telle que $f(0) = 5$.

(a) Donne toutes les solutions de (E).

(b) Léa écrit : « $f(0) = 5$, donc $Ce^0 = 5$, soit $C = 5$ ». A-t-elle raison ? Justifie et donne $f(x)$.

(c) Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(d) Sans dériver f, calcule $f'(0)$ à l'aide de l'équation (E).

Ex. 25 ★★☆ **Forme trigonométrique imposée** — On considère l'équation (E) : $y' = -y + 2\cos x$ sur $\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière g de la forme $g(x) = a\cos x + b\sin x$, avec a et b réels.

(a) Détermine les réels a et b tels que g soit solution de (E).

(b) Gabin écrit : « les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto g(x) + Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige.

(c) Détermine la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

(d) Pour cette fonction f, justifie que $f(x) < g(x)$ pour tout réel x.

(e) Vrai ou faux ? Pour toute solution h de (E), $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - g(x)) = 0$. Justifie et interprète.

Ex. 26 ★★★ **De l'équation à une inégalité** — On considère l'équation (E) : $y' = -y - x$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontre qu'aucune fonction constante n'est solution de (E).

(b) Détermine les réels α et β tels que $g(x) = \alpha x + \beta$ soit solution de (E).

(c) Démontre qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $y' = -y$. Déduis-en toutes les solutions de (E).

(d) Détermine la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

(e) Étudie les variations de f et déduis-en que, pour tout réel x, $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

Ex. 27 ★★★ **Une forme qui échoue, une tangente imposée** — On considère l'équation (E) : $y' = y + (4x - 6)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Malo cherche une solution particulière de (E).

(a) Malo essaie $h(x) = \alpha e^{-x}$. Démontre qu'aucun réel α ne convient.

(b) Détermine les réels α et β tels que $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ soit solution de (E).

(c) Donne toutes les solutions de (E).

(d) Détermine la solution f de (E) dont la courbe admet, au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur -1.

(e) Démontre que (E) admet une seule solution ayant une limite finie en $+\infty$. Donne cette solution et sa limite.

Ex. 28 ★★★ **Un comprimé dans le sang** — Un patient avale un comprimé à $t = 0$ (t en h). On note $q(t)$ la quantité de principe actif dans le sang, en mg, avec $q(0) = 0$. Le principe actif entre dans le sang au débit de $3e^{-t}$ mg par heure, et l'organisme l'élimine à une vitesse égale à 50 % de la quantité présente, en mg par heure.

(a) Justifie que q est solution d'une équation (E) : $y' = ay + 3e^{-t}$, en précisant la valeur de a.

(b) Détermine le réel α tel que $g(t) = \alpha e^{-t}$ soit solution de (E).

(c) Déduis-en l'expression de $q(t)$ pour $t \geqslant 0$.

Ex. 28 (suite)

(d) Étudie les variations de q. Au bout de combien de temps la quantité est-elle maximale, et quelle est cette quantité ?

(e) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t)$ et interprète ce résultat.

5. *Modéliser : refroidissement, population, charge*

À retenir : Vitesse de variation proportionnelle à N : $N' = kN$, avec $k < 0$ si N diminue. Refroidissement : $\theta' = -k(\theta - T)$ avec $k > 0$, limite T (ex. : $\theta' = -0{,}1(\theta - 20)$ donne $\theta \to 20$ °C). « À partir de quand » : on arrondit au supérieur.

Ex. 29 ★☆☆ **Traduire une phrase en équation** — Traduis chaque phrase par une équation différentielle. Écris-la ensuite sous la forme $y' = ay + b$ et donne a et b. Le temps t est la variable.

(a) Un glaçon fond : sa masse $m(t)$ (en g, t en min) diminue avec une vitesse proportionnelle à m, de coefficient 0,2.

(b) Une culture de bactéries $N(t)$ (t en h) augmente avec une vitesse de variation égale à 3 % de N.

(c) Un café refroidit dans une pièce à 22 °C : la vitesse de refroidissement de sa température $\theta(t)$ (en °C, t en min) est proportionnelle à l'écart avec 22, de coefficient 0,08.

(d) La tension $u(t)$ (en V, t en s) d'un condensateur vérifie $u' = \frac{E-u}{RC}$ avec $E = 12$ V et $RC = 0{,}5$ s.

(e) On ajoute 4 g de chlore par heure dans une piscine. Le chlore disparaît à raison de 10 % de la quantité $Q(t)$ présente par heure.

(f) La vitesse $v(t)$ (en m/s) d'un parachutiste augmente sous l'effet de $g = 9{,}8$. Elle est freinée par un frottement proportionnel à v, de coefficient 0,4.

Ex. 30 ★☆☆ **Demi-vie et seuils avec ln** — Rappel : si $N' = -\lambda N$ avec $\lambda > 0$, la demi-vie vaut $\frac{\ln 2}{\lambda}$. Arrondis au dixième, sauf si un entier est demandé.

(a) L'iode 131 vérifie $N' = -0{,}086N$, avec t en jours. Calcule sa demi-vie.

(b) Un noyau vérifie $N' = -0{,}0012N$, avec t en années. Lina affirme qu'un échantillon de 500 g a une demi-vie plus longue qu'un échantillon de 2 g. Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Un échantillon contient $N(t) = 800\mathrm{e}^{-0{,}04t}$ noyaux, avec t en années. À partir de combien d'années entières a-t-on $N(t) < 50$?

(d) Une ville compte $P(t) = 2000\mathrm{e}^{0{,}015t}$ habitants, avec t en années. À partir de combien d'années entières a-t-on $P(t) \geqslant 3000$?

Ex. 30 (suite)

(e) Un isotope vérifie $N' = -0{,}3N$, avec t en heures. Donne sa demi-vie en minutes.

Ex. 31 ★★☆ **La tarte qui refroidit** — Une tarte sort du four à 180 °C. La cuisine est à 20 °C. Sa température $\theta(t)$ (en °C, t en min) vérifie $\theta' = -k(\theta - 20)$ avec $k > 0$. Au bout de 15 min, la tarte est à 100 °C.

(a) Écris l'équation sous la forme $\theta' = a\theta + b$, puis donne sa solution constante.

(b) Exprime $\theta(t)$ en fonction de k et de t.

(c) Utilise la mesure faite à 15 min pour trouver la valeur exacte de k, puis un arrondi au millième.

(d) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t)$ et interprète-la. Ilyes affirme que la tarte sera à 20 °C au bout d'une heure. A-t-il raison ? Justifie.

(e) À partir de quel instant la tarte est-elle à 40 °C ou moins ?

Ex. 32 ★★☆ **Charge d'un condensateur : Euler et solution exacte** — La tension $u(t)$ (en V, t en s) d'un condensateur qui se charge vérifie $u' = \frac{E-u}{RC}$ avec $E = 6$ V et $RC = 0{,}2$ s. Au départ, $u(0) = 0$.

(a) Écris l'équation sous la forme $u' = au + b$, puis donne sa solution constante.

(b) Détermine $u(t)$. Que représente la constante d'intégration dans ce contexte ?

(c) Utilise la méthode d'Euler avec le pas $h = 0{,}05$ pour compléter le tableau.

k	0	1	2	3	4
t_k	0	0,05	0,1	0,15	0,2
u_k	0				

(d) Calcule la valeur exacte $u(0{,}2)$ au millième. Euler donne-t-il une valeur trop grande ou trop petite ? Explique pourquoi avec la convexité.

(e) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$ et interprète-la.

Ex. 33 ★★★ **Perfusion d'un médicament** — Un patient reçoit un médicament par perfusion, au débit constant de 6 mg par heure. Son organisme élimine le médicament avec une vitesse proportionnelle à la quantité présente, de coefficient 0,3. On note $Q(t)$ la quantité de médicament dans le sang (en mg), t en heures, avec $Q(0) = 0$.

(a) Traduis la situation par une équation différentielle de la forme $Q' = aQ + b$. Justifie le signe de a et celui de b.

(b) Détermine $Q(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

(c) Étudie le sens de variation de Q et calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)$. Interprète ce résultat pour le patient.

Ex. 33 (suite)

(d) Le médicament est efficace dès que $Q(t) \geqslant 15$ mg. À partir de quel instant l'est-il ? Donne la réponse en heures et minutes, arrondie à la minute supérieure.

(e) Le médecin veut que la quantité se stabilise à 25 mg. Quel débit (en mg/h) doit-il choisir ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Des truites et des pêcheurs** — Dans un lac sans pêche, l'effectif de truites augmente avec une vitesse proportionnelle à cet effectif, de coefficient 0,08 (t en années). Avec la pêche, on retire en plus 240 truites par an. On note $P(t)$ l'effectif à l'instant t, avec $P(0) = 2500$.

(a) Traduis la situation par une équation différentielle vérifiée par P. Donne sa solution constante et interprète-la.

(b) Donne la forme générale des solutions. Selon le signe de la constante C, donne la limite de la solution en $+\infty$.

(c) Détermine $P(t)$, puis étudie le sens de variation de P.

(d) Que va-t-il arriver aux truites du lac ? Justifie par un calcul et précise l'année concernée.

(e) La mairie fixe un quota de q truites pêchées par an, toujours avec $P(0) = 2500$. Quel quota maximal empêche l'effectif de diminuer ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **Une bille qui tombe dans l'huile** — On lâche une bille dans un tube d'huile. Sa vitesse $v(t)$ (en m/s, t en s) vérifie $v' = 10 - kv$, avec $k > 0$ et $v(0) = 0$. On mesure une vitesse limite de 0,5 m/s.

(a) Écris l'équation sous la forme $v' = av + b$. Exprime la vitesse limite en fonction de k, puis déduis-en k.

(b) Résous l'équation avec la condition $v(0) = 0$.

(c) À partir de quel instant la vitesse dépasse-t-elle 99 % de la vitesse limite ? Donne la réponse en ms, arrondie à l'unité supérieure.

(d) La méthode d'Euler de pas $h = 0{,}01$ donne $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n + 0{,}01(10 - 20v_n)$. Montre que $w_n = v_n - 0{,}5$ définit une suite géométrique, puis exprime v_n en fonction de n.

(e) Que renvoie `seuil(0.01)` ? Justifie à l'aide de v_n, traduis ce résultat en instant et compare-le à l'instant exact trouvé plus haut.

```
def seuil(h):
    v = 0
    n = 0
    while v < 0.495:
        v = v + h * (10 - 20 * v)
        n = n + 1
    return n
```

6. Méthode d'Euler

À retenir : Pour $y' = ay + b$ et $y(x_0) = y_0$: $x_n = x_0 + nh$ et $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$. Exemple : $y' = 2y$ et $h = 0{,}1$ donnent $y_{n+1} = 1{,}2y_n$. Pour avancer de 1 avec $h = 0{,}1$, il faut 10 pas. Le résultat est une valeur approchée, jamais exacte.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : un pas d'Euler** — Dans chaque cas, on applique la méthode d'Euler de pas h ; f désigne la solution exacte et y_n la valeur approchée de $f(x_n)$.

(a) On donne $2y' - 6y = 4$. Isole y', puis exprime y_{n+1} en fonction de y_n pour $h = 0{,}1$.

(b) On part de $x_0 = 2$ avec $h = 0{,}05$. Calcule x_6.

(c) On part de $x_0 = 0{,}5$ avec $h = 0{,}1$. Combien d'étapes faut-il pour obtenir une valeur approchée de $f(2)$?

(d) Pour $y' = -4y$, $y(0) = 5$ et $h = 0{,}05$: exprime y_{n+1} en fonction de y_n, puis y_n en fonction de n.

(e) Pour $y' = 0{,}5y + 1$, $y(0) = 2$ et $h = 0{,}2$: calcule y_1 puis y_2.

(f) Pour $y' = -y + 5$, $y(1) = 2$ et $h = 0{,}1$: de quel nombre y_3 est-il une valeur approchée ?

Ex. 37 ★☆☆ **Vrai ou faux sur la méthode d'Euler** — Vrai ou faux ? Justifie. Dans chaque cas, y_n est la valeur obtenue par la méthode d'Euler de pas h, en partant de $x_0 = 0$.

(a) Pour $y' = -2y + 4$, $y(0) = 0$ et $h = 0{,}1$, on obtient $y_1 = 0{,}4$.

(b) Pour $y' = 5y$, $y(0) = 1$ et $h = 0{,}1$, on obtient $y_2 = \mathrm{e}$.

(c) Pour $y' = -3y + 6$ et $h = 0{,}1$, on a $y_{n+1} = 0{,}7y_n + 0{,}6$.

(d) Pour $y' = y - 3$ et $y(0) = 3$, toutes les valeurs y_n sont égales à 3, quel que soit le pas h.

(e) Pour $h = 0{,}5$, on a $x_4 = 4$.

(f) Pour $y' = 4y + 1$ et $h = 0{,}1$, on a $y_{n+1} = y_n + 0{,}4y_n + 1$.

Ex. 38 ★★☆ **Un thé qui refroidit** — Un thé est posé dans une pièce à 20 °C. Sa température $T(t)$, en °C, t en min, vérifie $T' = -0{,}2(T - 20)$ et $T(0) = 80$. On applique la méthode d'Euler avec un pas $h = 1$ min.

(a) Mets l'équation sous la forme $T' = aT + b$, puis exprime T_{n+1} en fonction de T_n.

(b) Complète le tableau :

n	0	1	2	3	4
t_n	0	1	2	3	4
T_n	80				

(c) Résous l'équation avec la condition $T(0) = 80$, puis calcule $T(4)$ arrondi à 0,01.

(d) La méthode d'Euler donne-t-elle une valeur trop grande ou trop petite de $T(4)$? Calcule l'écart.

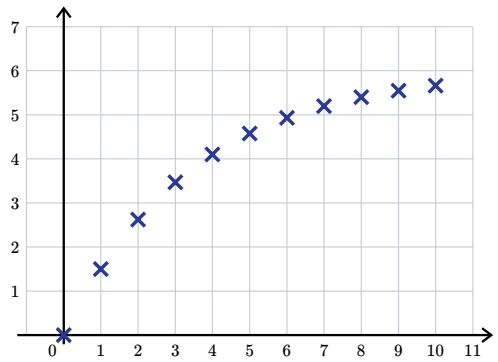
Ex. 39 ★★☆ **Perfusion : corriger le programme de Lou** — Une perfusion apporte un médicament. La quantité $Q(t)$ dans le sang, en mg, t en h, vérifie (E) : $Q' = -0{,}5Q + 3$ et $Q(0) = 0$. Lou a écrit ce programme pour appliquer la méthode d'Euler :

```
def euler(h, n):
    t = 0
    q = 0
    for k in range(n):
        q = q + (-0.5 * q + 3)
        t = t + h
    return q
```

(a) Le programme contient une erreur. Explique-la et corrige la ligne fautive.

(b) Lou appelle `euler(0.25, 2)` pour approcher $Q(2)$. Est-ce le bon appel ? Justifie, puis donne la valeur obtenue avec le programme corrigé.

(c) Le nuage représente les points $(k ; Q_k)$ obtenus avec $h = 0{,}5$.



Vers quelle valeur les Q_k semblent-ils tendre ? Justifie avec (E).

(d) Avec $h = 0{,}5$, exprime Q_{n+1} en fonction de Q_n. On pose $u_n = Q_n - \ell$, où ℓ est la valeur trouvée à la question précédente. Exprime Q_n en fonction de n.

Ex. 40 ★★★ **Parachutiste : Euler et suite géométrique** — La vitesse $v(t)$ d'un parachutiste, en m/s, t en s, vérifie (E) : $v' = 10 - 0{,}5v$ et $v(0) = 0$. On applique la méthode d'Euler de pas $h > 0$ à partir de $t_0 = 0$: v_n est la valeur approchée de $v(t_n)$.

(a) Exprime t_n en fonction de n et de h, puis montre que $v_{n+1} = (1 - 0{,}5h)v_n + 10h$.

(b) On pose $w_n = v_n - 20$. Montre que (w_n) est géométrique, puis exprime v_n en fonction de n et de h.

(c) On prend $h = 0{,}5$. Combien d'étapes faut-il pour atteindre $t = 2$? Donne la valeur approchée de $v(2)$ obtenue, arrondie à 0,01.

(d) Résous (E) avec la condition $v(0) = 0$. Calcule $v(2)$ arrondie à 0,01 et l'écart avec la question précédente.

(e) Calcule l'écart obtenu avec $h = 0{,}25$ et commente. Détermine $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$ et interprète-la.

Ex. 41 ★★★ **Charge d'un condensateur : seuil et programme** — Lors de la charge d'un condensateur, la tension $u(t)$, en V, t en s, est nulle à $t = 0$. Sa vitesse de variation est égale au double de l'écart entre 6 V et $u(t)$. On note u_n la valeur approchée de $u(t_n)$ donnée par la méthode d'Euler de pas h, avec $t_0 = 0$. Alba écrit ce programme :

```
def seuil(h):
    t = 0
    u = 0
    while u < 5:
        u = u + h * (-2 * u + 12)
        t = t + h
    return t
```

(a) Traduis la phrase de l'énoncé par une équation différentielle de la forme $u' = au + b$. Donne sa solution constante.

(b) Pour $h = 0{,}1$, recopie et complète le tableau (valeurs exactes) :

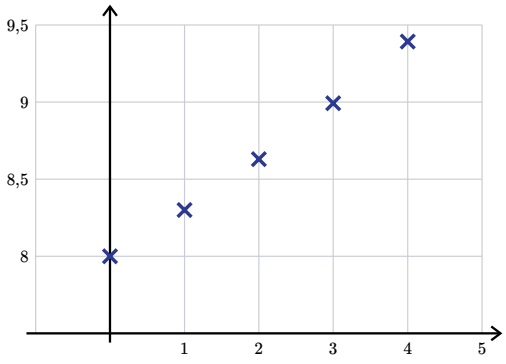
n	0	1	2	3	4
t_n	0				
u_n	0				

(c) Montre que, pour $h = 0{,}1$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1{,}2$. En admettant que $u_n = 6 - 6 \times 0{,}8^n$, détermine la valeur renvoyée par `seuil(0.1)` et ce qu'elle représente.

(d) Résous l'équation avec $u(0) = 0$. Détermine l'instant exact où la tension atteint 5 V, puis la limite de u en $+\infty$ et son sens.

(e) Rayan a oublié la ligne 6 (`t = t + h`). Que renvoie alors `seuil(0.1)` ? Explique pourquoi ce résultat est faux.

Ex. 42 ★★★ **Poissons d'un étang : retrouver le pas** — Dans un étang, le nombre de poissons $P(t)$, en milliers, t en années, vérifie (E) : $P' = 0{,}2P - 1$ et $P(0) = 8$. Léon applique la méthode d'Euler à partir de $t_0 = 0$, mais il a oublié de noter son pas h. Voici le nuage des points $(k ; P_k)$ qu'il a obtenus ; on lit $P_1 = 8{,}3$.



(a) Exprime P_1 en fonction de h, puis déduis-en le pas utilisé par Léon.

(b) Exprime P_{n+1} en fonction de P_n, puis montre que la suite $(P_n - 5)$ est géométrique. Exprime P_n en fonction de n.

Ex. 42 (suite)

(c) Quel point du nuage approche $P(2)$? Résous (E), puis compare $P(2)$ à cette valeur approchée (à 10^{-3} près).

(d) On admet que $\mathrm{e}^u \geqslant 1+u$ pour tout réel u. Montre que $P_n \leqslant P(t_n)$ pour tout entier naturel n et interprète.

(e) Ninon code la méthode dans une fonction `pop(h, n)` censée renvoyer P_n, avec la boucle `for k in range(1, n):`. Que renvoie `pop(0.5, 4)` ? Corrige la boucle.

7. *Problèmes type bac*

À retenir : Solutions de $y' = ay + f$: $g + C\mathrm{e}^{ax}$ (g particulière). La condition initiale porte sur la somme : $y' = y + 1 - x$, $g(x) = x$, $f(0) = 3$ donne $f(x) = x + 3\mathrm{e}^x$. Si f et g sont solutions, $f - g$ est solution de $y' = ay$.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : solution particulière et condition initiale** — Dans chaque question, (E) désigne l'équation différentielle indiquée, posée sur $\mathbb{R}$.

(a) Vérifie que la fonction g définie par $g(x) = 2x$ est solution de $(E) : y' = 3y - 6x + 2$.

(b) La fonction g définie par $g(x) = \cos x + \sin x$ est solution de $(E) : y' = -y + 2\cos x$. Écris toutes les solutions de (E).

(c) La fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est solution de $(E) : y' = 2y - 3\mathrm{e}^{-x}$. Détermine la solution f de (E) telle que $f(0) = 4$.

(d) Pour $(E) : y' = -4y + 8x$, de solution particulière $g(x) = 2x - \frac{1}{2}$, Sacha cherche f avec $f(0) = 1$. Il écrit $C\mathrm{e}^0 = 1$, donc $f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-4x}$. Corrige son erreur.

(e) f et g sont deux solutions de $(E) : y' = 5y + x^2$. Montre que $f - g$ est solution de $y' = 5y$, puis donne la forme de $f - g$.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : trouver une solution particulière** — Dans chaque question, α, β, γ désignent des réels à déterminer.

(a) Détermine α et β tels que $x \mapsto \alpha x + \beta$ soit solution de $y' = 2y + 4x$.

(b) Détermine α tel que la fonction $x \mapsto 2\mathrm{e}^{-x}$ soit solution de $y' = \alpha y + 4\mathrm{e}^{-x}$.

(c) Justifie qu'aucune fonction $x \mapsto \alpha\mathrm{e}^{3x}$ n'est solution de $y' = 3y + 6\mathrm{e}^{3x}$, puis trouve α tel que $x \mapsto \alpha x\mathrm{e}^{3x}$ le soit.

(d) Détermine α, β, γ tels que $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ soit solution de $y' = -2y + 4x^2$.

(e) $g(x) = x + 1$ est solution de $y' = y - x$. Hugo affirme que les solutions sont les fonctions $x \mapsto C(x+1)$. Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Extrait de bac : de l'équation à l'étude de fonction** — Partie A. On considère l'équation $(E) : y' = -y + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Partie B. On étudie la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 2$.

(a) Partie A. Montre que la fonction g définie par $g(x) = 2x - 1$ est solution de (E).

(b) Partie A. Déduis-en toutes les solutions de (E), puis l'expression de f.

(c) Partie B. Étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. Donne la valeur exacte du minimum.

(d) Partie B. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (2x-1)\big)$ et interprète graphiquement le résultat.

Ex. 46 ★★☆ **Le saut d'Inès : vitesse limite et méthode d'Euler** — Inès saute en parachute. Sa vitesse $v(t)$, en m/s, à l'instant t en secondes, vérifie $v' = 10 - 0{,}5v$ et $v(0) = 0$.

(a) Détermine l'expression de $v(t)$ pour $t \geqslant 0$.

(b) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ et interprète ce résultat dans le contexte.

(c) À partir de quel instant la vitesse d'Inès atteint-elle 19 m/s ? Donne la valeur exacte, puis un arrondi au centième.

(d) Avec un pas de 0,5 s, Euler donne $v_{k+1} = v_k + 0{,}5 \times (10 - 0{,}5v_k)$. Complète le tableau, puis compare v_3 à $v(1{,}5)$.

k	0	1	2	3
t_k	0	0{,}5	1	1{,}5
v_k	0			

Ex. 47 ★★★ **Le comprimé de Malik : de l'équation au pic de concentration** — Malik avale un comprimé à l'instant $t = 0$ (t en heures). La quantité de principe actif dans son sang, en mg, est $q(t)$, avec $q(0) = 0$. Le passage depuis l'estomac et l'élimination conduisent à l'équation $(E) : y' = -0{,}2y + 6\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ sur $[0;+\infty[$.

(a) Partie A. Détermine le réel α tel que la fonction g définie par $g(t) = \alpha\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ soit solution de (E).

(b) Partie A. Démontre qu'une fonction h dérivable est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de $(E_0) : y' = -0{,}2y$. Déduis-en les solutions de (E).

(c) Partie A. Détermine l'expression de $q(t)$ pour $t \geqslant 0$.

(d) Partie B. Étudie les variations de q sur $[0;+\infty[$. Au bout de combien de temps la quantité est-elle maximale ? Donne ce temps et ce maximum arrondis au dixième.

(e) Partie B. Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t)$ et interprète ce résultat pour Malik.

Ex. 48 ★★★ **Le café de Lina : seuil exact et méthode d'Euler** — Lina se sert un café à 80 °C dans une pièce à 20 °C. Sa température $\theta(t)$, en °C, t minutes plus tard, vérifie $\theta' = -0{,}1\theta + 2$. Elle le boit dès qu'il atteint 50 °C. On admet que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

(a) Détermine $\theta(t)$ pour $t \geqslant 0$, puis $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$. Interprète cette limite.

(b) Détermine par le calcul au bout de combien de temps Lina peut boire son café. Donne le résultat en minutes et secondes.

(c) Avec la méthode d'Euler de pas $h = 1$, on note θ_n l'approximation de $\theta(n)$, avec $\theta_0 = 80$. Montre que $\theta_{n+1} = 0{,}9\theta_n + 2$.

(d) Complète la ligne 4 du programme pour qu'il affiche le premier n tel que $\theta_n \leqslant 50$, puis donne la valeur affichée.

```
theta = 80
n = 0
while theta > 50:
    theta = ...
    n = n + 1
print(n)
```

(e) Montre que $\theta_n = 20 + 60 \times 0{,}9^n$, puis compare θ_n et $\theta(n)$: la méthode d'Euler sous-estime-t-elle ou surestime-t-elle la température ?

Ex. 49 ★★★ **Les poissons du lac : pêche intensive et extinction** — Dans un lac, on note $P(t)$ le nombre de poissons, en milliers, t années après 2026. Avec une pêche qui s'intensifie chaque année, on admet que P est solution de (E) : $y' = 0{,}2y - 0{,}4t - 1$ sur $[0 ; +\infty[$, et que $P(0) = 10$.

(a) Vrai ou faux ? « L'équation (E) admet une unique solution affine. » Justifie.

(b) Déduis-en toutes les solutions de (E).

(c) Détermine $P(t)$ pour $t \geqslant 0$, puis le nombre de poissons dans le lac en 2028, arrondi à la centaine.

(d) Étudie les variations de P sur $[0 ; +\infty[$. En quelle année la population est-elle maximale, et environ combien de poissons compte-t-elle alors ?

(e) Détermine $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$ et interprète. Quelle population initiale minimale aurait évité ce scénario ?