# *Terminale spécialité / Équations différentielles — corrigé*

benprof particulier.fr

## 1. *Vérifier qu'une fonction est solution, équation $y' = f$*

**Ex. 1** ★☆☆ **Solution ou pas ?**

(a) D'une part, $g'(x) = -6\mathrm{e}^{-3x}$. D'autre part, $-3g(x) + 12 = -6\mathrm{e}^{-3x} - 12 + 12 = -6\mathrm{e}^{-3x}$. Les deux membres sont égaux pour tout réel $x$ : $g$ est solution.

(b) D'une part, $g'(x) = 2x$. D'autre part, $2g(x) - 2x^2 = 2x^2 + 2 - 2x^2 = 2$. En $x = 0$ : $g'(0) = 0$ alors que le second membre vaut 2. L'égalité est fausse en 0 : $g$ n'est pas solution.

(c) $5y' + 2y = 4 \iff y' = -0{,}4y + 0{,}8$. D'une part, $g'(x) = -2{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4x}$. D'autre part, $-0{,}4g(x) + 0{,}8 = -2{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4x} - 0{,}8 + 0{,}8 = -2{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4x}$. L'égalité est vraie pour tout réel $x$ : $g$ est solution.

(d) D'une part, $g'(x) = 4$. D'autre part, $g(x) - 4x + 5 = 4x - 1 - 4x + 5 = 4$. L'égalité est vraie pour tout réel $x$ : $g$ est solution.

(e) D'une part, $g'(x) = 1{,}5\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1$. D'autre part, $0{,}5g(x) = 1{,}5\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 0{,}5x$. En $x = 0$ : $g'(0) = 2{,}5$ alors que $0{,}5g(0) = 1{,}5$. L'égalité est fausse en 0 : $g$ n'est pas solution.

**Ex. 2** ★☆☆ **Toutes les solutions de $y' = f$**

(a) Les solutions sont les primitives : $x \mapsto 2x^3 - 2x^2 + x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $y' = 2\mathrm{e}^{-2x}$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto -\mathrm{e}^{-2x} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) $y' = \frac{3}{x}$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto 3\ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(d) On reconnaît $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(e) On reconnaît $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x + 1$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

**Ex. 3** ★★☆ **Le bon exposant**

(a) $y' + 4y = 8 \iff y' = -4y + 8$, donc $a = -4$ et $b = 8$.

(b) Léa affirme le résultat sans le calculer. Il faut calculer séparément $g'(x)$ et $-4g(x) + 8$, puis constater qu'ils sont égaux pour tout $x$.

**Ex. 3** (suite)

(c) Avec $m = 1$ : $g'(0) = 5$ alors que $-4g(0) + 8 = -28 + 8 = -20$. L'égalité est fausse en 0 : $g$ n'est pas solution de $(E)$.

(d) $g'(x) = 5m\mathrm{e}^{mx}$ et $-4g(x) + 8 = -20\mathrm{e}^{mx} - 8 + 8 = -20\mathrm{e}^{mx}$.

(e) $g$ est solution si et seulement si $5m\mathrm{e}^{mx} = -20\mathrm{e}^{mx}$ pour tout $x$. Comme $\mathrm{e}^{mx} \neq 0$, cela équivaut à $5m = -20$, donc $m = -4$ : $g(x) = 5\mathrm{e}^{-4x} + 2$ est solution de $(E)$.

**Ex. 4** ★★☆ **Noé et « la » solution**

(a) $x \mapsto \mathrm{e}^{3x} - x^2$ n'est qu'une primitive parmi d'autres. On ne peut pas parler de « la » solution sans condition initiale. Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{3x} - x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $f(0) = 1 + C = 4$ donne $C = 3$ : $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - x^2 + 3$.

(c) $g(1) = \mathrm{e}^3 - 1 + C = \mathrm{e}^3$ donne $C = 1$ : $g(x) = \mathrm{e}^{3x} - x^2 + 1$, et $g(0) = 2$.

(d) D'une part, $h'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} - 2x + 3$. D'autre part, le second membre vaut $3\mathrm{e}^{3x} - 2x$. En $x = 0$ : $h'(0) = 6$ alors que le second membre vaut 3. Ambre a tort : $h$ n'est pas solution de $(E)$.

**Ex. 5** ★★★ **Une famille de solutions et l'erreur d'Inès**

(a) $2y' + 3y = 3x + 8 \iff 2y' = -3y + 3x + 8 \iff y' = -1{,}5y + 1{,}5x + 4$.

(b) D'une part, $g'(x) = 1$. D'autre part, $-1{,}5g(x) + 1{,}5x + 4 = -1{,}5x - 3 + 1{,}5x + 4 = 1$. Les deux membres sont égaux pour tout réel $x$ : $g$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

(c) D'une part, $h_C'(x) = -1{,}5C\mathrm{e}^{-1{,}5x} + 1$. D'autre part, $-1{,}5h_C(x) + 1{,}5x + 4 = -1{,}5C\mathrm{e}^{-1{,}5x} - 1{,}5x - 3 + 1{,}5x + 4 = -1{,}5C\mathrm{e}^{-1{,}5x} + 1$. Les deux membres sont égaux pour tout réel $x$ : $h_C$ est solution de $(E)$, quel que soit le réel $C$.

(d) $h_C(0) = C + 0 + 2 = C + 2$, donc $C + 2 = 5$ donne $C = 3$. La fonction cherchée est $x \mapsto 3\mathrm{e}^{-1{,}5x} + x + 2$.

(e) Non : Inès affirme l'égalité sans la calculer, ce qui ne prouve rien. En $x = 0$ : $k'(x) = -1{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5x} + 1$ donne $k'(0) = -0{,}5$, alors que $-1{,}5k(0) + 1{,}5 \times 0 + 4 = -1{,}5 + 4 = 2{,}5$. L'égalité est fausse en 0 : $k$ n'est pas solution de $(E)$.

**Ex. 6** ★★★ **Une primitive cherchée sous une forme imposée**

(a) $G'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$. Comme $e^x \neq 0$, $G$ est solution si et seulement si $ax+a+b = x+1$ pour tout réel $x$. Par identification, $a=1$ et $a+b=1$, donc $b=0$. La fonction $G : x \mapsto xe^x$ est solution de $(E)$.

(b) Les solutions de $y' = f$, avec $f$ continue, sont les primitives de $f$. $G$ en est une, et deux primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante. Les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions $x \mapsto xe^x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(c) On cherche $C$ tel que $1 \times e^1 + C = 2e$, donc $C = e$. La solution cherchée est $x \mapsto xe^x + e$.

(d) Non. Toute solution s'écrit $f(x) = xe^x + C$, donc $f(1) - f(0) = (e+C) - (0+C) = e$ pour toute solution. Or $3 - 1 = 2 \neq e$ : aucune solution ne vérifie les deux conditions, Lucas a tort.

**Ex. 7** ★★★ **Vrai ou faux sur une même équation**

(a) Vrai. D'une part, $f'(x) = 2e^{2x} + 2$. D'autre part, $2f(x) - 4x + 2 = 2e^{2x} + 4x - 4x + 2 = 2e^{2x} + 2$. Les deux membres sont égaux pour tout réel $x$ : $f$ est solution de $(E)$.

(b) Faux. En $x=0$ : $g'(x) = 2e^{2x} + 2$ donne $g'(0) = 4$, alors que $2g(0) - 0 + 2 = 2 \times 2 + 2 = 6$. L'égalité est fausse en 0 : $g$ n'est pas solution.

(c) Faux. La fonction $p : x \mapsto 2x$ est solution : $p'(x) = 2$ et $2p(x) - 4x + 2 = 2$. Avec $u = v = p$, on a $(u+v)(x) = 4x$ : sa dérivée en 0 vaut 4, alors que $2 \times 0 - 0 + 2 = 2$. Donc $u+v$ n'est pas solution.

(d) Vrai. Soit $w(x) = u(x) - 2x$. D'une part, $w'(x) = u'(x) - 2 = 2u(x) - 4x + 2 - 2 = 2u(x) - 4x$. D'autre part, $2w(x) = 2u(x) - 4x$. Égalité pour tout réel $x$ : $w$ est solution de $y' = 2y$.

## 2. *Équation $y' = ay$*

**Ex. 8** ★☆☆ **Isoler $y'$ pour lire $a$**

(a) $y' + 3y = 0 \iff y' = -3y$, donc $a = -3$ (et non 3). Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $2y' = y \iff y' = \frac{1}{2}y$, donc $a = \frac{1}{2}$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\frac{x}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) $7y - y' = 0 \iff y' = 7y$, donc $a = 7$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{7x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(d) $4y' + 6y = 0 \iff y' = -\frac{6}{4}y = -1{,}5y$, donc $a = -1{,}5$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-1{,}5x}$, $C \in \mathbb{R}$.

**Ex. 8** (suite)

(e) $3y' - 2y = 0 \iff y' = \frac{2}{3}y$, donc $a = \frac{2}{3}$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\frac{2x}{3}}$, $C \in \mathbb{R}$.

(f) $-y' = 0{,}4y \iff y' = -0{,}4y$, donc $a = -0{,}4$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-0{,}4x}$, $C \in \mathbb{R}$.

**Ex. 9** ★☆☆ **Une condition, une seule solution**

(a) $f(x) = Ce^{4x}$ et $f(0) = C = 5$ : $f(x) = 5e^{4x}$.

(b) $f(x) = Ce^{2x}$ et $f(1) = Ce^2 = 3$, donc $C = 3e^{-2}$ (et non 3) : $f(x) = 3e^{2x-2}$.

(c) $f(x) = Ce^{-x}$ et $f(5) = Ce^{-5} = 0$. Comme $e^{-5} > 0$, on a $C = 0$ : $f$ est la fonction nulle.

(d) $y' = -2y$, donc $f(x) = Ce^{-2x}$. $f(-1) = Ce^2 = 4$, donc $C = 4e^{-2}$ : $f(x) = 4e^{-2x-2}$.

(e) $y' = \frac{1}{3}y$, donc $f(x) = Ce^{\frac{x}{3}}$. $f(3) = Ce = -2$, donc $C = -2e^{-1}$ : $f(x) = -2e^{\frac{x}{3}-1}$.

(f) $f(x) = Ce^{-4x}$ et $f(\ln 2) = Ce^{-4\ln 2} = \frac{C}{16} = 1$, donc $C = 16$ : $f(x) = 16e^{-4x}$.

**Ex. 10** ★★☆ **Vrai ou faux sur les solutions**

(a) $(E) \iff y' = \frac{2}{5}y = 0{,}4y$, donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{0{,}4x}$, $C \in \mathbb{R}$. Par exemple, $x \mapsto 2e^{0{,}4x}$ est aussi solution. $e^{0{,}4x}$ est seulement la solution qui vaut 1 en 0. L'affirmation est fausse.

(b) La condition est en 0, donc $C = -3$ et $f(x) = -3e^{0{,}4x}$. Alors $f'(x) = -1{,}2e^{0{,}4x} < 0$ ($aC < 0$), donc $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est vraie.

(c) $Ce^{0{,}8} = 0$ donne $C = 0$, car $e^{0{,}8} > 0$ : seule la fonction nulle s'annule en 2. Une solution non nulle ne s'annule jamais. L'affirmation est fausse.

(d) $a = 0{,}4 > 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{0{,}4x} = 0$ et, pour tout $C \in \mathbb{R}$ ( $C = 0$ compris), $\lim\limits_{x \to -\infty} Ce^{0{,}4x} = 0$. L'affirmation est vraie.

**Ex. 11** ★★☆ **Un quotient constant**

(a) Pour tout réel $x$, $f'(x) = -\frac{1}{4}f(x)$ (on multiplie par $f(x)$).
Donc $f$ est solution de $y' = -\frac{1}{4}y$, avec $a = -\frac{1}{4}$.

(b) On a $f(x) = Ce^{-\frac{x}{4}}$. Avec $C = 6$, on aurait $f(2) = 6e^{-\frac{1}{2}} \neq 6$. Tom a tort : la condition n'est pas donnée en 0. $Ce^{-\frac{1}{2}} = 6$ donne $C = 6e^{\frac{1}{2}}$, donc $f(x) = 6e^{\frac{1}{2} - \frac{x}{4}}$.

(c) $f'(x) = -\frac{6}{4}e^{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}} < 0$, donc $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) = -\infty$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

**Ex. 11** (suite)

(d) $6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}} \geqslant 3 \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}} \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}-\frac{x}{4} \geqslant -\ln 2 \iff x \leqslant 2+4\ln 2$. L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,2+4\ln 2]$, avec $2+4\ln 2 \approx 4{,}77$.

**Ex. 12** ★★★ **Démontrer le théorème, puis l'utiliser**

(a) $4y'-3y=0$ équivaut à $4y'=3y$, donc à $y'=\frac{3}{4}y$. Ainsi $a=0{,}75$.

(b) $g$ est dérivable comme produit. Pour tout réel $x$ : $g'(x)=f'(x)\mathrm{e}^{-0{,}75x}-0{,}75f(x)\mathrm{e}^{-0{,}75x}=\big(f'(x)-0{,}75f(x)\big)\mathrm{e}^{-0{,}75x}=0$, car $f'=0{,}75f$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $g$ est constante sur $\mathbb{R}$.

(c) Il existe un réel $C$ tel que $f(x)\mathrm{e}^{-0{,}75x}=C$, donc $f(x)=C\mathrm{e}^{0{,}75x}$. Réciproquement, $(C\mathrm{e}^{0{,}75x})'=0{,}75C\mathrm{e}^{0{,}75x}$, donc $4\times 0{,}75C\mathrm{e}^{0{,}75x}-3C\mathrm{e}^{0{,}75x}=0$. Les solutions sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{0{,}75x}$, avec $C\in\mathbb{R}$ (y compris $C=0$).

(d) $h(x)=C\mathrm{e}^{0{,}75x}$ et $h(2)=C\mathrm{e}^{1{,}5}=-5$.
Donc $C=-5\mathrm{e}^{-1{,}5}$ et non $-5$, car la condition n'est pas donnée en 0. Ainsi $h(x)=-5\mathrm{e}^{0{,}75x-1{,}5}$.

(e) Comme $\mathrm{e}^{0{,}75x-1{,}5}>0$, on a $h(x)<0$ pour tout réel $x$ : $h$ ne s'annule jamais. $h'(x)=0{,}75h(x)<0$, donc $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, bien que $a>0$ (car $C<0$). $\lim\limits_{x\to-\infty}(0{,}75x-1{,}5)=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{0{,}75x-1{,}5}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$.

**Ex. 13** ★★★ **Retrouver $a$ et $C$ à partir de deux points**

(a) $f(1)=C\mathrm{e}^{a}=6$ et $f(3)=C\mathrm{e}^{3a}=54$. Attention : $f(1)$ vaut $C\mathrm{e}^{a}$ et non $C$, car la condition n'est pas donnée en 0. Si $C=0$, $f$ serait la fonction nulle et on aurait $f(1)=0\neq 6$.
Donc $C\neq 0$.

(b) Comme $C\neq 0$ et $\mathrm{e}^{a}>0$, on peut diviser : $\frac{C\mathrm{e}^{3a}}{C\mathrm{e}^{a}}=\mathrm{e}^{2a}=\frac{54}{6}=9$.
Donc $2a=\ln 9=2\ln 3$, et $a=\ln 3$.

(c) $C\mathrm{e}^{\ln 3}=3C=6$, donc $C=2$. Alors $f(x)=2\mathrm{e}^{x\ln 3}=2\times 3^x$. Vérification : $f(1)=6$ et $f(3)=54$.

(d) $2\times 3^n\geqslant 10\,000$ équivaut à $3^n\geqslant 5\,000$, donc à $n\geqslant\frac{\ln 5\,000}{\ln 3}\approx 7{,}75$ (on divise par $\ln 3>0$). On contrôle : $f(7)=4\,374$ et $f(8)=13\,122$. Le plus petit entier est donc $n=8$.

**Ex. 13** (suite)

(e) $f(x+1)=2\times 3^{x+1}=3\times(2\times 3^x)=3f(x)$. Quand $x$ augmente de 1, $f(x)$ est multipliée par 3 : on n'ajoute pas 3. Par exemple, $f(1)=6$ et $f(2)=18$, soit une hausse de 12. Ben a tort.

**Ex. 14** ★★★ **Tangentes aux courbes des solutions**

(a) $f(x)=C\mathrm{e}^{ax}$ avec $C\neq 0$, car $f$ n'est pas nulle. Comme $\mathrm{e}^{ax_0}>0$, on a $f(x_0)\neq 0$. Ensuite $f'(x_0)=af(x_0)$, donc $T : y=af(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, c'est-à-dire $y=f(x_0)\big(a(x-x_0)+1\big)$.

(b) $y=0$ équivaut à $a(x-x_0)+1=0$, car $f(x_0)\neq 0$. Donc $x=x_0-\frac{1}{a}$. $T$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x_0-\frac{1}{a}$.

(c) $2y'+5y=0$ équivaut à $y'=-\frac{5}{2}y$, donc $a=-2{,}5$ (attention au signe). L'abscisse cherchée est $1-\frac{1}{-2{,}5}=1+0{,}4=1{,}4$. La tangente coupe l'axe des abscisses au point $(1{,}4\,;\,0)$, quelle que soit la solution non nulle.

(d) D'après la question 2 : $1-\frac{1}{a}=4$, donc $a=-\frac{1}{3}$. Ensuite $g(x)=C\mathrm{e}^{-x/3}$ et $g(1)=C\mathrm{e}^{-1/3}=3$, donc $C=3\mathrm{e}^{1/3}$. Ainsi $g(x)=3\mathrm{e}^{(1-x)/3}$.

(e) $g'(x)=-\frac{1}{3}g(x)<0$, car $g(x)>0$ : $g$ est strictement décroissante. Comme $\frac{1-x}{3}\to-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. De plus $g(0)=3\mathrm{e}^{1/3}\approx 4{,}19\neq 4$, donc $g\neq k$. Si les deux courbes avaient un point commun d'abscisse $x_1$, $g$ et $k$ seraient deux solutions avec la même valeur en $x_1$. Par unicité, on aurait $g=k$. Les deux courbes n'ont donc aucun point commun.

## 3. *Équation $y'=ay+b$ et condition initiale*

**Ex. 15** ★☆☆ **Solution constante et forme générale**

(a) $a=3$, $b=-12$. Solution constante : $0=3c-12$, donc $c=4$. Solutions : $x\mapsto C\mathrm{e}^{3x}+4$, $C\in\mathbb{R}$.

(b) $a=-5$, $b=40$. Solution constante : $0=-5c+40$, donc $c=8$. Solutions : $x\mapsto C\mathrm{e}^{-5x}+8$, $C\in\mathbb{R}$.

(c) $a=4$, $b=6$. Solution constante : $0=4c+6$, donc $c=-\frac{3}{2}$ (ni 6, ni $\frac{3}{2}$). Solutions : $x\mapsto C\mathrm{e}^{4x}-\frac{3}{2}$, $C\in\mathbb{R}$.

(d) On isole : $y'=-3y+\frac{9}{2}$, donc $a=-3$ et $b=\frac{9}{2}$. Solution constante : $0=-3c+\frac{9}{2}$, donc $c=\frac{3}{2}$. Solutions : $x\mapsto C\mathrm{e}^{-3x}+\frac{3}{2}$, $C\in\mathbb{R}$.

(e) On isole : $y'=0{,}2y+3$, donc $a=0{,}2$ et $b=3$. Solution constante : $0=0{,}2c+3$, donc $c=-15$. Solutions : $x\mapsto C\mathrm{e}^{0{,}2x}-15$, $C\in\mathbb{R}$.

**Ex. 15** **(suite)**

(f) On isole : $y' = 7y - 14$, donc $a = 7$ et $b = -14$. Solution constante : $0 = 7c - 14$, donc $c = 2$. Solutions : $x \mapsto Ce^{7x} + 2$, $C \in \mathbb{R}$.

**Ex. 16** ★☆☆ **Trouver l'unique solution**

(a) $c = 4$ ($0 = -2c + 8$), donc $f(x) = Ce^{-2x} + 4$. $f(0) = C + 4 = 10$, donc $C = 6$ : $f(x) = 6e^{-2x} + 4$.

(b) $c = -2$ ($0 = 3c + 6$), donc $f(x) = Ce^{3x} - 2$. $f(0) = C - 2 = 0$, donc $C = 2$ : $f(x) = 2e^{3x} - 2$.

(c) $c = 6$ ($0 = 0{,}5c - 3$), donc $f(x) = Ce^{0{,}5x} + 6$. $f(0) = C + 6 = 6$, donc $C = 0$ : $f$ est la fonction constante $f(x) = 6$.

(d) $c = \frac{1}{2}$ ($0 = -4c + 2$), donc $f(x) = Ce^{-4x} + \frac{1}{2}$. $f(0) = C + \frac{1}{2} = -1$, donc $C = -\frac{3}{2}$ : $f(x) = -\frac{3}{2}e^{-4x} + \frac{1}{2}$.

(e) $c = -7$ ($0 = 2c + 14$), donc $f(x) = Ce^{2x} - 7$. $f(1) = Ce^2 - 7 = -4$, donc $C = 3e^{-2}$ : $f(x) = 3e^{2x-2} - 7$.

(f) $c = 3$ ($0 = -c + 3$), donc $f(x) = Ce^{-x} + 3$. $f(\ln 2) = \frac{C}{2} + 3 = 4$, donc $C = 2$ : $f(x) = 2e^{-x} + 3$.

**Ex. 17** ★★☆ **L'erreur de Léa**

(a) On divise par 4 : $y' = -2y + 3$, donc $a = -2$ et $b = 3$.

(b) Première erreur : elle ajoute $b = 3$. Or la solution constante vérifie $0 = -2c + 3$, donc $c = \frac{3}{2}$. Deuxième erreur : la condition porte sur la fonction complète, $y(0) = C + c$, donc $C = y(0) - c$ et non $y(0)$.

(c) Les solutions sont $x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$. $f(0) = C + \frac{3}{2} = 5$, donc $C = \frac{7}{2}$ et $f(x) = \frac{7}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$. Vérification : $f'(x) = -7e^{-2x}$, donc $4f'(x) + 8f(x) = -28e^{-2x} + 28e^{-2x} + 12 = 12$, et $f(0) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$.

(d) $f'(x) = -7e^{-2x} < 0$ : $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $a = -2 < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ : la fonction tend vers la valeur d'équilibre.

**Ex. 18** ★★☆ **Vrai ou faux sur une même équation**

(a) Faux : $0{,}4 \times (-5) - 2 = -4 \neq 0$. La solution constante vérifie $0 = 0{,}4c - 2$, donc $c = 5$ (et non $\frac{b}{a} = -5$).

(b) Faux : $2e^{0{,}4 \times 5} + 5 = 2e^2 + 5 \neq 7$. Avec $f(x) = Ce^{0{,}4x} + 5$ : $Ce^2 + 5 = 7$, donc $C = 2e^{-2}$ et $f(x) = 2e^{0{,}4x-2} + 5$.

(c) Faux : ici $a = 0{,}4 > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0{,}4x} = +\infty$. Par exemple, $x \mapsto e^{0{,}4x} + 5$ tend vers $+\infty$. Seule la solution constante tend vers 5.

**Ex. 18** **(suite)**

(d) Vrai : $g(0) = C + 5 = 3$, donc $C = -2$ et $g(x) = -2e^{0{,}4x} + 5$. Ainsi, $g'(x) = -0{,}8e^{0{,}4x} < 0$ : $g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**Ex. 19** ★★★ **Une condition loin de 0**

(a) $2y' - y = 4$ équivaut à $2y' = y + 4$, soit $y' = 0{,}5y + 2$. Donc $a = 0{,}5$ et $b = 2$. La solution constante vérifie $0 = 0{,}5c + 2$, donc $c = -4$ (et non 2, ni $\frac{b}{a} = 4$).

(b) Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{0{,}5x} - 4$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(c) $f(2) = Ce^1 - 4 = -1$ donne $Ce = 3$, donc $C = 3e^{-1}$. Ainsi $f(x) = 3e^{0{,}5x-1} - 4$. Vérification : $f'(x) = 1{,}5e^{0{,}5x-1}$ et $0{,}5f(x) + 2 = 1{,}5e^{0{,}5x-1} - 2 + 2 = 1{,}5e^{0{,}5x-1}$. Les deux membres sont égaux, et $f(2) = 3e^0 - 4 = -1$.

(d) $f(x) \geqslant 0 \iff e^{0{,}5x-1} \geqslant \frac{4}{3} \iff 0{,}5x - 1 \geqslant \ln\frac{4}{3} \iff x \geqslant 2 + 2\ln\frac{4}{3}$, car ln est strictement croissante. Les solutions sont donc les réels de $\left[2 + 2\ln\frac{4}{3} ; +\infty\right[$, avec $2 + 2\ln\frac{4}{3} \approx 2{,}58$.

(e) $g(2) = Ce - 4 = y_0$ donne $C = (y_0 + 4)e^{-1}$, donc $g(x) = (y_0 + 4)e^{0{,}5x-1} - 4$ et $g'(x) = 0{,}5(y_0 + 4)e^{0{,}5x-1}$, qui a le signe de $y_0 + 4$. Comme $a = 0{,}5 > 0$, $e^{0{,}5x-1}$ tend vers $+\infty$. Si $y_0 > -4$, $g$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Si $y_0 = -4$, $g$ est constante égale à $-4$. Si $y_0 < -4$, $g$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

**Ex. 20** ★★★ **Perfusion à l'hôpital**

(a) $q'(t) = 6 - 0{,}15\,q(t)$, c'est-à-dire $q' = -0{,}15q + 6$. Donc $a = -0{,}15$ et $b = 6$.

(b) La solution constante vérifie $0 = -0{,}15c + 6$, donc $c = \frac{6}{0{,}15} = 40$. Les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0{,}15t} + 40$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(c) Hugo a tort. On applique la condition à la fonction complète : $q(0) = Ce^0 + 40 = C + 40 = 0$, donc $C = -40$ et non 0. Avec $C = 0$, on aurait $q(0) = 40$. Ainsi $q(t) = 40 - 40e^{-0{,}15t}$.

(d) Comme $-0{,}15 < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}15t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = 40$. À long terme, la quantité de médicament dans le sang se stabilise vers 40 mg : c'est la valeur d'équilibre.

**Ex. 20** **(suite)**

(e) $q(t) \geqslant 30 \iff 40\mathrm{e}^{-0{,}15t} \leqslant 10 \iff \mathrm{e}^{-0{,}15t} \leqslant 0{,}25 \iff -0{,}15t \leqslant \ln 0{,}25 \iff t \geqslant \frac{\ln 4}{0{,}15} \approx 9{,}242$. Or $0{,}242 \times 60 \approx 14{,}5$. Le médicament est efficace au bout de 9 h 15 min environ.

**Ex. 21** ★★★ **Euler face à la solution exacte**

(a) $y_{k+1} = y_k + 0{,}2 \times (-0{,}5y_k + 3) = y_k - 0{,}1y_k + 0{,}6 = 0{,}9y_k + 0{,}6$.

(b) $y_1 = 0{,}9 \times 2 + 0{,}6 = 2{,}4$ ; $y_2 = 0{,}9 \times 2{,}4 + 0{,}6 = 2{,}76$ ; $y_3 = 0{,}9 \times 2{,}76 + 0{,}6 = 3{,}084$.

(c) La ligne manquante est `y = y + h*(-0.5*y + 3)`. Le programme fait 5 pas de 0,2 à partir de $x = 0$ : il calcule $y_5 \approx f(1)$. Il affiche `3.638`.

(d) La solution constante vérifie $0 = -0{,}5c + 3$, donc $c = 6$. Les solutions sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 6$. On a $f(0) = C + 6 = 2$, donc $C = -4$ et $f(x) = 6 - 4\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. Vérification : $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ et $-0{,}5f(x) + 3 = -3 + 2\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 3 = 2\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. De plus, $f(0) = 6 - 4 = 2$.

(e) $f(1) = 6 - 4\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 3{,}5739$. Avec la valeur exacte $y_5 = 3{,}63804$, l'écart vaut $3{,}63804 - f(1) \approx 0{,}0642$ : la méthode d'Euler surestime $f(1)$ d'environ 0,06. Comme $-0{,}5 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$, la valeur d'équilibre.

## 4. *Second membre non constant : $y' = ay + f$*

**Ex. 22** ★☆☆ **Solution particulière donnée**

(a) $g'(x) = 1$ et $3g(x) - 3x + 1 = 3x - 3x + 1 = 1$ : $g$ est solution. Ici $a = 3$, donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto x + C\mathrm{e}^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $k'(x) = \mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x}$ et $-k(x) + 2\mathrm{e}^{x} = -\mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x}$ : $k$ est solution de l'équation.

(c) $2g'(x) - g(x) = -2 + x + 2 = x$ : $g$ est solution. L'équation s'écrit $y' = \frac{1}{2}y + \frac{x}{2}$, donc $a = \frac{1}{2}$ : les solutions sont les fonctions $x \mapsto -x - 2 + C\mathrm{e}^{x/2}$, $C \in \mathbb{R}$.

(d) Faux : $h'(x) = 2x$, alors que $-h(x) + x^2 + 2 = -x^2 + x^2 + 2 = 2$. Ces deux expressions diffèrent (par exemple en $x = 0$ : $0 \neq 2$).

(e) Il a tort. Pour la vérification, il a raison : $g'(x) = 1$ et $2(x + 1) - 2x - 1 = 1$. Mais on n'écrit pas les solutions en multipliant $g$ par $C$ : on ajoute les solutions de $y' = 2y$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto x + 1 + C\mathrm{e}^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

**Ex. 23** ★★☆ **Forme imposée : identification**

(a) $g'(x) = \alpha$ et $-2g(x) + 4x = (4 - 2\alpha)x - 2\beta$. Pour tout $x$ : $4 - 2\alpha = 0$ et $-2\beta = \alpha$, donc $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ : $g(x) = 2x - 1$.

(b) L'équation homogène associée est $y' = -2y$, donc $a = -2$ : les solutions sont les fonctions $x \mapsto 2x - 1 + C\mathrm{e}^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) Faux. Si $g(x) = \alpha\mathrm{e}^{2x}$, alors $g'(x) = 2\alpha\mathrm{e}^{2x}$ et $2g(x) + 3\mathrm{e}^{2x} = (2\alpha + 3)\mathrm{e}^{2x}$. Il faudrait $2\alpha = 2\alpha + 3$, soit $0 = 3$ : l'identification est impossible.

(d) $g'(x) = \alpha\mathrm{e}^{2x} + 2\alpha x\mathrm{e}^{2x}$ et $2g(x) + 3\mathrm{e}^{2x} = 2\alpha x\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{2x}$. On identifie : $\alpha = 3$, donc $g(x) = 3x\mathrm{e}^{2x}$.

(e) $g'(x) = (-\alpha x + \alpha - \beta)\mathrm{e}^{-x}$ et $2g(x) + 9x\mathrm{e}^{-x} = ((2\alpha + 9)x + 2\beta)\mathrm{e}^{-x}$. On identifie : $-\alpha = 2\alpha + 9$ et $\alpha - \beta = 2\beta$, donc $\alpha = -3$ et $\beta = -1$ : $g(x) = (-3x - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

**Ex. 24** ★★☆ **La condition initiale porte sur la somme**

(a) L'équation sans second membre associée est $y' = -3y$, donc $a = -3$. Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $x \mapsto (x + 2)\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) Elle a tort : la condition initiale porte sur toute la somme. $f(0) = (0 + 2)\mathrm{e}^{0} + C\mathrm{e}^{0} = 2 + C$, et $2 + C = 5$ donne $C = 3$.
Donc $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-3x}$.

(c) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ : la courbe de $f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

(d) $f$ est solution de $(E)$, donc $f'(0) = -3f(0) + (2 \times 0 + 5)\mathrm{e}^{0} = -15 + 5 = -10$. Le nombre dérivé de $f$ en 0 vaut $-10$.

**Ex. 25** ★★☆ **Forme trigonométrique imposée**

(a) $g'(x) = -a\sin x + b\cos x$ et $-g(x) + 2\cos x = (2 - a)\cos x - b\sin x$. On identifie : $b = 2 - a$ et $-a = -b$. Donc $a = b$, puis $2a = 2$ : $a = b = 1$, et $g(x) = \cos x + \sin x$.

(b) Il a tort : l'équation homogène associée est $y' = -y$, donc $a = -1$, et non 1. Par exemple, pour $C = 1$ : $(g + \mathrm{e}^{x})' = g' + \mathrm{e}^{x}$, alors que $-(g + \mathrm{e}^{x}) + 2\cos x = g' - \mathrm{e}^{x}$. Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $x \mapsto \cos x + \sin x + C\mathrm{e}^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

**Ex. 25 (suite)**

(c) $f(0) = 1 + 0 + C = 1 + C$, et $1 + C = 0$ donne $C = -1$.
Donc $f(x) = \cos x + \sin x - \mathrm{e}^{-x}$.

(d) $f(x) - g(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f(x) - g(x) < 0$ : pour tout réel $x$, $f(x) < g(x)$
(la courbe de $f$ est sous celle de $g$).

(e) Vrai : toute solution s'écrit $h(x) = g(x) + C\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$, donc $h(x) - g(x) = C\mathrm{e}^{-x}$, qui tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$. Pour $x$ grand, toutes les solutions de $(E)$ sont très proches de $g$ : leurs courbes se rapprochent de celle de $g$.

**Ex. 26 ★★★ De l'équation à une inégalité**

(a) Soit $k$ un réel. Si la fonction constante égale à $k$ est solution, alors $0 = -k - x$ pour tout $x$. Avec $x = 0$, on obtient $k = 0$ ; avec $x = 1$, on obtient alors $0 = -1$ : c'est absurde. Aucune fonction constante n'est donc solution de $(E)$.

(b) On a $g'(x) = \alpha$ et $-g(x) - x = (-\alpha - 1)x - \beta$.
L'égalité pour tout $x$ impose $-\alpha - 1 = 0$ et $-\beta = \alpha$, d'où $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. Conclusion : $g(x) = -x + 1$.

(c) Comme $g' = -g - x$, on a $f' + f + x = (f' - g') + (f - g) = (f - g)' + (f - g)$.
Donc $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $(f - g)' = -(f - g)$, c'est-à-dire s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - g(x) = C\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x$. Les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} - x + 1$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(d) $f(0) = C\mathrm{e}^{0} - 0 + 1 = C + 1$. La condition $f(0) = 0$ donne $C = -1$. Conclusion : $f(x) = -\mathrm{e}^{-x} - x + 1$.

(e) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$. Pour $x \leqslant 0$, $-x \geqslant 0$, donc $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1$ et $f'(x) \geqslant 0$ ; pour $x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant 0$.
Donc $f$ est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$. Son maximum est $f(0) = 0$. Ainsi $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel $x$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.

**Ex. 27 ★★★ Une forme qui échoue, une tangente imposée**

(a) $h'(x) = -\alpha\mathrm{e}^{-x}$ et $h(x) + (4x - 6)\mathrm{e}^{-x} = (\alpha + 4x - 6)\mathrm{e}^{-x}$. Il faudrait que $-\alpha = \alpha + 4x - 6$ pour tout $x$. Avec $x = 0$, on obtient $\alpha = 3$. Avec $x = 1$, on obtient alors $-3 = 3 + 4 - 6 = 1$ : c'est absurde. Aucune fonction de cette forme ne convient.

**Ex. 27 (suite)**

(b) $g'(x) = \alpha\mathrm{e}^{-x} - (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{-x} = (-\alpha x + \alpha - \beta)\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) + (4x - 6)\mathrm{e}^{-x} = ((\alpha + 4)x + \beta - 6)\mathrm{e}^{-x}$. Par identification : $-\alpha = \alpha + 4$ et $\alpha - \beta = \beta - 6$, d'où $\alpha = -2$ et $\beta = 2$. Conclusion : $g(x) = (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$.

(c) L'équation homogène associée est $y' = y$, de solutions $C\mathrm{e}^{x}$. Les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{x} + (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(d) On a $f(x) = C\mathrm{e}^{x} + (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$, donc $f'(x) = C\mathrm{e}^{x} + (2x - 4)\mathrm{e}^{-x}$. La condition s'écrit $f'(0) = -1$, soit $C - 4 = -1$, donc $C = 3$. La solution cherchée est $f(x) = 3\mathrm{e}^{x} + (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$.

(e) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x} = 0$. Si $C \neq 0$, $C\mathrm{e}^{x}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, et la solution aussi : sa limite n'est pas finie. La seule solution qui convient est celle obtenue pour $C = 0$, c'est-à-dire $g(x) = (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$. Sa limite en $+\infty$ vaut 0.

**Ex. 28 ★★★ Un comprimé dans le sang**

(a) La variation $q'(t)$ est égale à ce qui entre moins ce qui est éliminé : $q'(t) = 3\mathrm{e}^{-t} - 0{,}5\,q(t)$.
Donc $q$ est solution de $y' = -0{,}5y + 3\mathrm{e}^{-t}$, avec $a = -0{,}5$.

(b) $g'(t) = -\alpha\mathrm{e}^{-t}$ et $-0{,}5g(t) + 3\mathrm{e}^{-t} = (-0{,}5\alpha + 3)\mathrm{e}^{-t}$. Par identification, $-\alpha = -0{,}5\alpha + 3$, donc $\alpha = -6$.
Conclusion : $g(t) = -6\mathrm{e}^{-t}$.

(c) Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 6\mathrm{e}^{-t}$. On a $q(0) = C - 6 = 0$, donc $C = 6$.
Conclusion : $q(t) = 6\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 6\mathrm{e}^{-t}$ mg.

(d) $q'(t) = -3\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 6\mathrm{e}^{-t} = 3\mathrm{e}^{-t}(2 - \mathrm{e}^{0{,}5t})$. Ce nombre est positif si et seulement si $\mathrm{e}^{0{,}5t} \leqslant 2$, c'est-à-dire $t \leqslant 2\ln 2$.
Donc $q$ est croissante sur $[0; 2\ln 2]$ et décroissante ensuite. Le maximum est atteint en $t = 2\ln 2 \approx 1{,}39$ h, soit environ 1 h 23 min. Il vaut $q(2\ln 2) = 6 \times \frac{1}{2} - 6 \times \frac{1}{4} = 1{,}5$ mg.

(e) Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, on obtient $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = 0$. À long terme, le principe actif est entièrement éliminé du sang.

## 5. *Modéliser : refroidissement, population, charge*

**Ex. 29** ★☆☆ **Traduire une phrase en équation**

(a) La masse diminue, donc le coefficient est négatif : $m' = -0{,}2m$. On a $a = -0{,}2$ et $b = 0$.

(b) $N' = 0{,}03N$ : on a $a = 0{,}03$ et $b = 0$. Le coefficient est positif car la population augmente.

(c) $\theta' = -0{,}08(\theta - 22)$, soit $\theta' = -0{,}08\theta + 1{,}76$ en développant. On a $a = -0{,}08$ et $b = 1{,}76$.

(d) $u' = \frac{12-u}{0{,}5} = 24 - 2u$, soit $u' = -2u + 24$. On a $a = -2$ et $b = 24$.

(e) L'ajout fait monter $Q$ de 4 g par heure et la disparition la fait baisser de $0{,}1Q$ : $Q' = -0{,}1Q + 4$. On a $a = -0{,}1$ et $b = 4$.

(f) La pesanteur fait augmenter $v$ et le frottement la fait baisser : $v' = 9{,}8 - 0{,}4v$, soit $v' = -0{,}4v + 9{,}8$. On a $a = -0{,}4$ et $b = 9{,}8$.

**Ex. 30** ★☆☆ **Demi-vie et seuils avec ln**

(a) Demi-vie : $\frac{\ln 2}{0{,}086} \approx 8{,}1$ jours.

(b) Faux. La demi-vie vaut $\frac{\ln 2}{0{,}0012} \approx 577{,}6$ ans pour les deux échantillons : elle ne dépend pas de la quantité initiale.

(c) $800\mathrm{e}^{-0{,}04t} < 50 \iff \mathrm{e}^{-0{,}04t} < \frac{1}{16} \iff -0{,}04t < -\ln 16 \iff t > \frac{\ln 16}{0{,}04} \approx 69{,}31$. On a donc $N(t) < 50$ à partir de 70 ans.

(d) $2000\mathrm{e}^{0{,}015t} \geqslant 3000 \iff \mathrm{e}^{0{,}015t} \geqslant 1{,}5 \iff t \geqslant \frac{\ln 1{,}5}{0{,}015} \approx 27{,}03$. On a donc $P(t) \geqslant 3000$ à partir de 28 ans.

(e) Demi-vie : $\frac{\ln 2}{0{,}3} \approx 2{,}310$ h, soit $2{,}310 \times 60 \approx 138{,}6$ min.

**Ex. 31** ★★☆ **La tarte qui refroidit**

(a) $\theta' = -k\theta + 20k$, donc $a = -k$ et $b = 20k$. La solution constante vaut $-\frac{b}{a} = -\frac{20k}{-k} = 20$ : c'est la température de la cuisine.

(b) Les solutions s'écrivent $\theta(t) = C\mathrm{e}^{-kt} + 20$ avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $\theta(0) = 180$, on a $C + 20 = 180$, d'où $C = 160$. Donc $\theta(t) = 160\mathrm{e}^{-kt} + 20$.

(c) $\theta(15) = 100 \iff 160\mathrm{e}^{-15k} = 80 \iff \mathrm{e}^{-15k} = \frac{1}{2} \iff -15k = -\ln 2$.
Donc $k = \frac{\ln 2}{15} \approx 0{,}046$ par minute.

(d) $k > 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-kt} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = 20$ : à long terme, la tarte prend la température de la cuisine. Ilyes a tort : $\theta(60) = 160\mathrm{e}^{-4\ln 2} + 20 = \frac{160}{16} + 20 = 30$ °C. De plus, $\theta(t) > 20$ pour tout $t$ : la valeur 20 °C n'est jamais atteinte exactement.

**Ex. 31** (suite)

(e) $160\mathrm{e}^{-kt} + 20 \leqslant 40 \iff \mathrm{e}^{-kt} \leqslant \frac{1}{8} \iff t \geqslant \frac{\ln 8}{k} = \frac{3\ln 2 \times 15}{\ln 2} = 45$. La tarte est à 40 °C ou moins à partir de 45 min.

**Ex. 32** ★★☆ **Charge d'un condensateur : Euler et solution exacte**

(a) $u' = \frac{6-u}{0{,}2} = 30 - 5u$, soit $u' = -5u + 30$. On a $a = -5$ et $b = 30$. La solution constante vaut $-\frac{30}{-5} = 6$.

(b) Les solutions s'écrivent $u(t) = K\mathrm{e}^{-5t} + 6$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme $u(0) = 0$, on a $K + 6 = 0$, d'où $K = -6$. Donc $u(t) = 6 - 6\mathrm{e}^{-5t}$. $K = u(0) - 6$ est l'écart de départ entre la tension et sa valeur d'équilibre 6 V.

(c) On calcule $u_{k+1} = u_k + 0{,}05 \times (-5u_k + 30)$, avec $u_0 = 0$. On obtient $u_1 = 1{,}5$, $u_2 = 2{,}625$, $u_3 \approx 3{,}469$ et $u_4 \approx 4{,}102$.

(d) $u(0{,}2) = 6 - 6\mathrm{e}^{-1} \approx 3{,}793$ V. Euler donne 4,102 V, une valeur trop grande. En effet, $u'(t) = 30\mathrm{e}^{-5t}$ est décroissante, donc $u$ est concave : ses tangentes sont au-dessus de la courbe.

(e) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-5t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 6$. À long terme, le condensateur est chargé et sa tension tend vers $E = 6$ V.

**Ex. 33** ★★★ **Perfusion d'un médicament**

(a) La perfusion apporte 6 mg par heure : $+6$.
L'élimination fait diminuer $Q$ avec une vitesse proportionnelle à $Q$ : $-0{,}3Q$.
Donc $Q' = -0{,}3Q + 6$, avec $a = -0{,}3 < 0$ (perte) et $b = 6 > 0$
(apport).

(b) La solution constante vaut $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-0{,}3} = 20$. Les solutions sont $Q(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 20$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $Q(0) = C + 20 = 0$, on a $C = -20$, donc $Q(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-0{,}3t}$.

(c) $Q'(t) = 6\mathrm{e}^{-0{,}3t} > 0$ : $Q$ est croissante sur $[0; +\infty[$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}3t} = 0$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = 20$. La quantité de médicament augmente et se stabilise vers 20 mg : c'est l'équilibre, quand l'élimination compense l'apport.

(d) $20 - 20\mathrm{e}^{-0{,}3t} \geqslant 15 \iff \mathrm{e}^{-0{,}3t} \leqslant \frac{1}{4} \iff -0{,}3t \leqslant -\ln 4 \iff t \geqslant \frac{\ln 4}{0{,}3} \approx 4{,}621$ h. Or $0{,}621 \times 60 \approx 37{,}3$ min. Le médicament est donc efficace à partir de 4 h 38 min.

**Ex. 33** **(suite)**

(e) Avec un débit $d$, l'équation devient $Q' = -0{,}3Q + d$. Sa solution constante est $\frac{d}{0{,}3}$, et c'est aussi la limite de $Q$ en $+\infty$, car $a = -0{,}3 < 0$. On veut $\frac{d}{0{,}3} = 25$, donc $d = 7{,}5$. Le médecin doit choisir un débit de 7,5 mg/h.

**Ex. 34** ★★★ **Des truites et des pêcheurs**

(a) La croissance naturelle donne $+0{,}08P$ et la pêche $-240$, donc $P' = 0{,}08P - 240$. La solution constante vaut $-\frac{-240}{0{,}08} = 3000$. Avec 3000 truites, les naissances compensent exactement la pêche : l'effectif reste stable.

(b) Les solutions sont $P(t) = Ce^{0{,}08t} + 3000$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{0{,}08t} = +\infty$ : si $C > 0$, la limite est $+\infty$ ; si $C < 0$, la limite est $-\infty$ ; si $C = 0$, la solution reste constante, égale à 3000.

(c) $P(0) = C + 3000 = 2500$, donc $C = -500$ et $P(t) = 3000 - 500e^{0{,}08t}$. On a $P'(t) = -40e^{0{,}08t} < 0$ : $P$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

(d) Comme $C = -500 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = -\infty$ : l'effectif finit par s'annuler. $P(t) = 0 \iff e^{0{,}08t} = 6 \iff t = \frac{\ln 6}{0{,}08} \approx 22{,}4$. Les truites disparaissent au cours de la 23e année ; au-delà, le modèle n'a plus de sens.

(e) L'équation devient $P' = 0{,}08P - q$. Sa solution constante est $12{,}5q$, donc $P(t) = (2500 - 12{,}5q)e^{0{,}08t} + 12{,}5q$. On a $P'(t) = 0{,}08(2500 - 12{,}5q)e^{0{,}08t}$, qui est positif ou nul si et seulement si $2500 - 12{,}5q \geqslant 0$, c'est-à-dire $q \leqslant 200$. Le quota maximal est de 200 truites par an. Avec ce quota, l'effectif reste stable à 2500.

**Ex. 35** ★★★ **Une bille qui tombe dans l'huile**

(a) $v' = -kv + 10$ : $a = -k$ et $b = 10$. La solution constante vaut $\frac{10}{k}$. Comme $a < 0$, les solutions tendent vers cette valeur : c'est la vitesse limite.
Donc $\frac{10}{k} = 0{,}5$, ce qui donne $k = 20$.

(b) Les solutions de $v' = -20v + 10$ sont $v(t) = Ce^{-20t} + 0{,}5$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $v(0) = C + 0{,}5 = 0$, on a $C = -0{,}5$, donc $v(t) = 0{,}5 - 0{,}5e^{-20t}$.

(c) $v(t) \geqslant 0{,}495 \iff 0{,}5e^{-20t} \leqslant 0{,}005 \iff e^{-20t} \leqslant 0{,}01 \iff t \geqslant \frac{\ln 100}{20} \approx 0{,}23026$ s. La vitesse dépasse 99 % de la vitesse limite à partir de 231 ms.

(d) $v_{n+1} = v_n + 0{,}1 - 0{,}2v_n = 0{,}8v_n + 0{,}1$.
Donc $w_{n+1} = 0{,}8v_n + 0{,}1 - 0{,}5 = 0{,}8(v_n - 0{,}5) = 0{,}8w_n$ : $(w_n)$ est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $w_0 = -0{,}5$.
Donc $w_n = -0{,}5 \times 0{,}8^n$ et $v_n = 0{,}5 - 0{,}5 \times 0{,}8^n$.

**Ex. 35** **(suite)**

(e) Le programme renvoie le plus petit $n$ tel que $v_n \geqslant 0{,}495$. Or $0{,}5 - 0{,}5 \times 0{,}8^n \geqslant 0{,}495 \iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6$ (on divise par $\ln 0{,}8 < 0$). Il renvoie donc 21, soit $t = 21 \times 0{,}01 = 0{,}21$ s. C'est plus tôt que les 231 ms exactes : comme $0{,}8 < e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$, on a $v_n > v(0{,}01n)$ pour $n \geqslant 1$. Euler surestime la vitesse.

## 6. *Méthode d'Euler*

**Ex. 36** ★☆☆ **Automatismes : un pas d'Euler**

(a) $y' = \frac{6y+4}{2} = 3y + 2$, donc $a = 3$ et $b = 2$. On en déduit $y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \times (3y_n + 2) = 1{,}3y_n + 0{,}2$.

(b) $x_6 = x_0 + 6h = 2 + 6 \times 0{,}05 = 2{,}3$.

(c) Il faut $n$ tel que $0{,}5 + n \times 0{,}1 = 2$, soit $n \times 0{,}1 = 1{,}5$, donc $n = 15$ étapes : on calcule $y_{15}$.

(d) $y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \times (-4y_n) = 0{,}8y_n$. La suite $(y_n)$ est géométrique de raison 0,8 et de premier terme 5, donc $y_n = 5 \times 0{,}8^n$.

(e) $y_1 = 2 + 0{,}2 \times (0{,}5 \times 2 + 1) = 2{,}4$, puis $y_2 = 2{,}4 + 0{,}2 \times (0{,}5 \times 2{,}4 + 1) = 2{,}84$.

(f) $x_3 = 1 + 3 \times 0{,}1 = 1{,}3$ : $y_3$ est une valeur approchée de $f(1{,}3)$, et non de $f(3)$.

**Ex. 37** ★☆☆ **Vrai ou faux sur la méthode d'Euler**

(a) Vrai : $y_1 = 0 + 0{,}1 \times (-2 \times 0 + 4) = 0{,}4$.

(b) Faux : $y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \times 5y_n = 1{,}5y_n$, donc $y_1 = 1{,}5$ et $y_2 = 2{,}25$. Le nombre $e = e^{5\times 0{,}2} \approx 2{,}7183$ est la valeur exacte $f(0{,}2)$, avec $f(x) = e^{5x}$ ; la méthode d'Euler n'en donne qu'une valeur approchée.

(c) Vrai : $y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \times (-3y_n + 6) = (1 - 0{,}3)y_n + 0{,}6 = 0{,}7y_n + 0{,}6$.

(d) Vrai : la solution constante de $y' = y - 3$ est $-\frac{-3}{1} = 3$, et $y_0 = 3$. On a donc $y_1 = 3 + h \times (3 - 3) = 3$, et de même à chaque pas : $y_n = 3$ pour tout $n$.

(e) Faux : $x_4 = x_0 + 4h = 0 + 4 \times 0{,}5 = 2$.

(f) Faux : le pas multiplie toute la dérivée. $y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \times (4y_n + 1) = 1{,}4y_n + 0{,}1$.

**Ex. 38** ★★☆ **Un thé qui refroidit**

(a) $T' = -0{,}2T + 4$, donc $a = -0{,}2$ et $b = 4$. On en déduit $T_{n+1} = T_n + 1 \times (-0{,}2T_n + 4) = 0{,}8T_n + 4$.

(b) $T_1 = 0{,}8 \times 80 + 4 = 68$ ; $T_2 = 58{,}4$ ; $T_3 = 50{,}72$ ; $T_4 = 44{,}576$.

**Ex. 38** **(suite)**

(c) La solution constante est $-\frac{4}{-0{,}2} = 20$, donc $T(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 20$. Avec $T(0) = C + 20 = 80$, on trouve $C = 60$ et $T(t) = 60\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 20$. Ainsi $T(4) = 60\mathrm{e}^{-0{,}8} + 20 \approx 46{,}96$ °C.

(d) $44{,}576 < 46{,}96$ : la méthode d'Euler sous-estime $T(4)$, d'environ 2,38 °C. Ce n'est qu'une valeur approchée, que l'on améliore en diminuant $h$.

**Ex. 39** ★★☆ **Perfusion : corriger le programme de Lou**

(a) Le pas $h$ a été oublié : on doit ajouter $h \times Q'(t_n)$. La ligne correcte est `q = q + h * (-0.5 * q + 3)`.

(b) Non : $t_n = 0 + n \times 0{,}25$, donc $t_2 = 0{,}5$ et l'appel approche $Q(0{,}5)$. Pour atteindre $t = 2$, il faut $\frac{2}{0{,}25} = 8$ étapes : `euler(0.25, 8)` renvoie environ 3,94, donc $Q(2) \approx 3{,}94$ mg.

(c) Les $Q_k$ semblent tendre vers 6. C'est la solution constante de $(E)$ : $-\frac{3}{-0{,}5} = 6$. La quantité de médicament se stabilise vers 6 mg.

(d) $Q_{n+1} = Q_n + 0{,}5 \times (-0{,}5Q_n + 3) = 0{,}75Q_n + 1{,}5$. Avec $\ell = 6$, on a $u_{n+1} = 0{,}75Q_n - 4{,}5 = 0{,}75u_n$ : la suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,75 et $u_0 = -6$.
Donc $Q_n = 6 - 6 \times 0{,}75^n$.

**Ex. 40** ★★★ **Parachutiste : Euler et suite géométrique**

(a) On part de $t_0 = 0$ et on avance de $h$ à chaque étape, donc $t_n = nh$. On suit la tangente : $v_{n+1} = v_n + h \times v'(t_n)$, et l'équation donne $v'(t_n) \approx 10 - 0{,}5v_n$.
Donc $v_{n+1} = v_n + h(10 - 0{,}5v_n) = (1 - 0{,}5h)v_n + 10h$.

(b) $w_{n+1} = v_{n+1} - 20 = (1 - 0{,}5h)v_n + 10h - 20 = (1 - 0{,}5h)v_n - (1 - 0{,}5h) \times 20 = (1 - 0{,}5h)w_n$.
Donc $(w_n)$ est géométrique, de raison $1 - 0{,}5h$ et de premier terme $w_0 = 0 - 20 = -20$. Ainsi $w_n = -20(1 - 0{,}5h)^n$ et $v_n = 20 - 20(1 - 0{,}5h)^n$.

(c) $t_n = 0{,}5n = 2$ donne $n = 4$ : il faut 4 étapes. Avec la raison $1 - 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$, on a $v_4 = 20 - 20 \times 0{,}75^4 = 13{,}671875$. La méthode d'Euler donne $v(2) \approx 13{,}67$ m/s.

(d) On isole : $v' = -0{,}5v + 10$, donc $a = -0{,}5$ et $b = 10$. Solution constante : $-\frac{10}{-0{,}5} = 20$. Les solutions sont $v(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 20$, $C \in \mathbb{R}$. $v(0) = C + 20 = 0$ donne $C = -20$, donc $v(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Alors $v(2) = 20 - 20\mathrm{e}^{-1} \approx 12{,}64$ m/s. L'écart vaut environ $13{,}67 - 12{,}64 \approx 1{,}03$ m/s : Euler donne une valeur approchée, pas la valeur exacte.

**Ex. 40** **(suite)**

(e) Avec $h = 0{,}25$, il faut 8 étapes et la raison vaut 0,875 : $v_8 = 20 - 20 \times 0{,}875^8 \approx 13{,}13$ m/s. L'écart vaut environ 0,49 m/s : il est plus petit, l'approximation s'améliore quand $h$ diminue. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0$, on obtient $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 20$ : la vitesse du parachutiste se stabilise vers une vitesse limite de 20 m/s.

**Ex. 41** ★★★ **Charge d'un condensateur : seuil et programme**

(a) La vitesse de variation de $u$ est $u'$, donc $u' = 2(6 - u)$, soit $u' = -2u + 12$ : $a = -2$ et $b = 12$. La solution constante est $-\frac{12}{-2} = 6$.

(b) $t_n = 0{,}1n$ : 0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4. Avec $u_{n+1} = u_n + 0{,}1(-2u_n + 12)$ : $u_1 = 0 + 0{,}1 \times 12 = 1{,}2$ ; $u_2 = 1{,}2 + 0{,}1 \times 9{,}6 = 2{,}16$ ; $u_3 = 2{,}16 + 0{,}1 \times 7{,}68 = 2{,}928$ ; $u_4 = 2{,}928 + 0{,}1 \times 6{,}144 = 3{,}5424$.

(c) $u_{n+1} = u_n + 0{,}1(-2u_n + 12) = (1 - 0{,}2)u_n + 1{,}2 = 0{,}8u_n + 1{,}2$. Le programme calcule les $u_n$ tant que $u_n < 5$ et renvoie le premier $t_n$ pour lequel $u_n \geqslant 5$. Or $u_8 = 6 - 6 \times 0{,}8^8 \approx 4{,}9934 < 5$ et $u_9 = 6 - 6 \times 0{,}8^9 \approx 5{,}1947 \geqslant 5$.
Donc `seuil(0.1)` renvoie $t_9 = 0{,}9$ : selon Euler, la tension dépasse 5 V vers 0,9 s.

(d) Les solutions de $u' = -2u + 12$ sont $u(t) = C\mathrm{e}^{-2t} + 6$, $C \in \mathbb{R}$. $u(0) = C + 6 = 0$ donne $C = -6$, donc $u(t) = 6 - 6\mathrm{e}^{-2t}$. Puis $u(t) \geqslant 5 \iff \mathrm{e}^{-2t} \leqslant \frac{1}{6} \iff -2t \leqslant -\ln 6 \iff t \geqslant \frac{\ln 6}{2}$. La tension atteint 5 V à $t = \frac{\ln 6}{2} \approx 0{,}896$ s : la valeur 0,9 d'Euler n'est qu'une approximation. Enfin $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 6$ : le condensateur se charge jusqu'à 6 V.

(e) La boucle calcule toujours les mêmes $u_n$ et s'arrête après 9 étapes, mais $t$ n'est jamais modifié : `seuil(0.1)` renvoie 0. Ce n'est pas l'instant cherché, puisque $u(0) = 0$ V. Il faut avancer $t$ de $h$ à chaque pas, car $t_n = t_0 + nh$.

**Ex. 42** ★★★ **Poissons d'un étang : retrouver le pas**

(a) $P_1 = P_0 + h(0{,}2P_0 - 1) = 8 + h(0{,}2 \times 8 - 1) = 8 + 0{,}6h$. Puisque $P_1 = 8{,}3$, on a $0{,}6h = 0{,}3$, donc Léon a utilisé le pas $h = 0{,}5$.

(b) Avec $h = 0{,}5$ : $P_{n+1} = P_n + 0{,}5(0{,}2P_n - 1) = 1{,}1P_n - 0{,}5$. Alors $P_{n+1} - 5 = 1{,}1P_n - 5{,}5 = 1{,}1(P_n - 5)$ : la suite $(P_n - 5)$ est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $8 - 5 = 3$.
Donc $P_n = 5 + 3 \times 1{,}1^n$.

**Ex. 42** **(suite)**

(c) $t_k = 0{,}5k = 2$ donne $k = 4$ : c'est le point d'abscisse 4, avec $P_4 = 5 + 3 \times 1{,}1^4 = 9{,}3923$. Pour $(E)$, $a = 0{,}2$ et $b = -1$ ; la solution constante vaut $-\frac{-1}{0{,}2} = 5$. Les solutions sont $P(t) = Ce^{0{,}2t} + 5$, $C \in \mathbb{R}$. $P(0) = C + 5 = 8$ donne $C = 3$, donc $P(t) = 3e^{0{,}2t} + 5$. Alors $P(2) = 3e^{0{,}4} + 5 \approx 9{,}475$. L'écart vaut environ 0,083 millier, soit environ 83 poissons.

(d) On a $t_n = 0{,}5n$, donc $P(t_n) = 3e^{0{,}1n} + 5 = 3\left(e^{0{,}1}\right)^n + 5$. Avec $u = 0{,}1$, on a $e^{0{,}1} \geqslant 1{,}1 > 0$. Ces nombres sont positifs, donc $\left(e^{0{,}1}\right)^n \geqslant 1{,}1^n$, puis $P(t_n) \geqslant 5 + 3 \times 1{,}1^n = P_n$. Ici, la méthode d'Euler donne des valeurs approchées par défaut : elle sous-estime le nombre de poissons.

(e) Avec `range(1, n)`, $k$ va de 1 à $n - 1$ : la boucle ne fait que $n - 1$ étapes.
Donc `pop(0.5, 4)` renvoie $P_3 = 5 + 3 \times 1{,}1^3 = 8{,}993$, une valeur approchée de $P(1{,}5)$ et non de $P(2)$. Il faut écrire `for k in range(n):`, qui fait bien $n$ étapes.

## 7. *Problèmes type bac*

**Ex. 43** ★☆☆ **Automatismes : solution particulière et condition initiale**

(a) D'une part, $g'(x) = 2$. D'autre part, $3g(x) - 6x + 2 = 6x - 6x + 2 = 2$. Les deux sont égaux pour tout $x$, donc $g$ est solution de $(E)$.

(b) Ici $a = -1$. Les solutions de $(E)$ sont $g$ plus les solutions de $y' = -y$, c'est-à-dire les fonctions $x \mapsto \cos x + \sin x + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) Ici $a = 2$, donc les solutions sont $f(x) = e^{-x} + Ce^{2x}$. La condition porte sur la somme : $f(0) = 1 + C = 4$, donc $C = 3$. Ainsi $f(x) = e^{-x} + 3e^{2x}$.

(d) Sacha a appliqué la condition à $Ce^{-4x}$ seul. Or $f(x) = 2x - \frac{1}{2} + Ce^{-4x}$, donc $f(0) = -\frac{1}{2} + C = 1$, ce qui donne $C = \frac{3}{2}$. Ainsi $f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-4x}$.

(e) $(f - g)' = f' - g' = (5f + x^2) - (5g + x^2) = 5(f - g)$, donc $f - g$ est solution de $y' = 5y$. Il existe donc un réel $C$ tel que $f(x) - g(x) = Ce^{5x}$ pour tout $x$.

**Ex. 44** ★☆☆ **Automatismes : trouver une solution particulière**

(a) Avec $g(x) = \alpha x + \beta$ : $g'(x) = \alpha$ et $2g(x) + 4x = (2\alpha + 4)x + 2\beta$. Par identification, $2\alpha + 4 = 0$ et $2\beta = \alpha$, donc $\alpha = -2$ et $\beta = -1$ : $g(x) = -2x - 1$.

**Ex. 44** **(suite)**

(b) Avec $g(x) = 2e^{-x}$ : $g'(x) = -2e^{-x}$ et $\alpha g(x) + 4e^{-x} = (2\alpha + 4)e^{-x}$. L'égalité pour tout $x$ impose $2\alpha + 4 = -2$, soit $\alpha = -3$ : $g$ est solution de $y' = -3y + 4e^{-x}$.

(c) Pour $\alpha e^{3x}$ : on a $y' - 3y = 3\alpha e^{3x} - 3\alpha e^{3x} = 0 \neq 6e^{3x}$, donc impossible. Pour $g(x) = \alpha x e^{3x}$ : $g'(x) = \alpha e^{3x} + 3\alpha x e^{3x}$ et $3g(x) + 6e^{3x} = 3\alpha x e^{3x} + 6e^{3x}$, donc $\alpha = 6$ : $g(x) = 6xe^{3x}$.

(d) $g'(x) = 2\alpha x + \beta$ et $-2g(x) + 4x^2 = (4 - 2\alpha)x^2 - 2\beta x - 2\gamma$. Par identification : $4 - 2\alpha = 0$, $-2\beta = 2\alpha$, $-2\gamma = \beta$.
Donc $\alpha = 2$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$ : $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$.

(e) Faux. Pour $C = 2$ : $h(x) = 2x + 2$ donne $h'(x) = 2$, alors que $h(x) - x = x + 2$, qui n'est pas égal à 2 pour tout $x$. Les solutions sont en fait $x \mapsto x + 1 + Ce^x$.

**Ex. 45** ★★☆ **Extrait de bac : de l'équation à l'étude de fonction**

(a) D'une part, $g'(x) = 2$. D'autre part, $-g(x) + 2x + 1 = -2x + 1 + 2x + 1 = 2$.
Donc $g$ est solution de $(E)$.

(b) Ici $a = -1$, donc les solutions de $(E)$ sont les fonctions $x \mapsto 2x - 1 + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. La condition porte sur la somme : $f(0) = -1 + C = 2$, donc $C = 3$. Ainsi $f(x) = 2x - 1 + 3e^{-x}$.

(c) $f'(x) = 2 - 3e^{-x}$. On a $f'(x) \geqslant 0 \iff e^{-x} \leqslant \frac{2}{3} \iff x \geqslant \ln\frac{3}{2}$.
Donc $f$ est décroissante sur $]-\infty ; \ln\frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\ln\frac{3}{2} ; +\infty[$. Son minimum vaut $f(\ln\frac{3}{2}) = 2\ln\frac{3}{2} - 1 + 3 \times \frac{2}{3} = 2\ln\frac{3}{2} + 1$, soit environ 1,81.

(d) $f(x) - (2x - 1) = 3e^{-x}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc la limite vaut 0. En $+\infty$, la courbe de $f$ se rapproche de la droite d'équation $y = 2x - 1$ : c'est la courbe de la solution particulière $g$.

**Ex. 46** ★★☆ **Le saut d'Inès : vitesse limite et méthode d'Euler**

(a) En isolant $v'$ : $v' = -0{,}5v + 10$, donc $a = -0{,}5$ et $b = 10$. La solution constante vaut $-\frac{10}{-0{,}5} = 20$, donc $v(t) = Ce^{-0{,}5t} + 20$. Comme $v(0) = C + 20 = 0$, on a $C = -20$. Ainsi $v(t) = 20 - 20e^{-0{,}5t}$.

(b) $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}5t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 20$. La vitesse d'Inès se stabilise vers une vitesse limite de 20 m/s.

(c) $v(t) \geqslant 19 \iff 20e^{-0{,}5t} \leqslant 1 \iff e^{-0{,}5t} \leqslant 0{,}05 \iff -0{,}5t \leqslant \ln 0{,}05 \iff t \geqslant 2\ln 20$. La vitesse d'Inès atteint 19 m/s au bout de $2\ln 20 \approx 5{,}99$ s.

**Ex. 46** **(suite)**

(d) $v_1 = 0 + 0{,}5 \times 10 = 5$ ; $v_2 = 5 + 0{,}5 \times 7{,}5 = 8{,}75$ ; $v_3 = 8{,}75 + 0{,}5 \times 5{,}625 = 11{,}5625$. Or $v(1{,}5) = 20 - 20\mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 10{,}55$ m/s. La méthode d'Euler surestime donc la vitesse d'environ 1 m/s avec ce pas.

**Ex. 47** ★★★ **Le comprimé de Malik : de l'équation au pic de concentration**

(a) $g'(t) = -0{,}5\alpha\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ et $-0{,}2g(t) + 6\mathrm{e}^{-0{,}5t} = (-0{,}2\alpha + 6)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. L'égalité pour tout $t$ impose $-0{,}5\alpha = -0{,}2\alpha + 6$, soit $-0{,}3\alpha = 6$ : $\alpha = -20$, donc $g(t) = -20\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

(b) Comme $g' = -0{,}2g + 6\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, on a $h' - (-0{,}2h + 6\mathrm{e}^{-0{,}5t}) = (h-g)' + 0{,}2(h-g)$.
Donc $h$ est solution de $(E)$ si et seulement si $(h-g)' = -0{,}2(h-g)$, c'est-à-dire si $h-g$ est solution de $(E_0)$. Les solutions de $(E_0)$ sont les $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, donc les solutions de $(E)$ sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}2t} - 20\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) $q(0) = C - 20 = 0$ donne $C = 20$ (la condition porte sur la somme, pas sur $C\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ seul).
Donc $q(t) = 20\mathrm{e}^{-0{,}2t} - 20\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

(d) $q'(t) = -4\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 10\mathrm{e}^{-0{,}5t} = \mathrm{e}^{-0{,}2t}(10\mathrm{e}^{-0{,}3t} - 4)$.
Comme $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$ : $q'(t) > 0 \iff \mathrm{e}^{-0{,}3t} > 0{,}4 \iff t < \frac{\ln 2{,}5}{0{,}3}$.
Donc $q$ est croissante sur $[0; t_0]$ puis décroissante, avec $t_0 = \frac{\ln 2{,}5}{0{,}3} \approx 3{,}1$. La quantité est maximale au bout d'environ 3,1 h et vaut alors $q(t_0) \approx 6{,}5$ mg.

(e) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 0$. À long terme, le corps de Malik élimine tout le principe actif : la quantité dans le sang tend vers 0 mg.

**Ex. 48** ★★★ **Le café de Lina : seuil exact et méthode d'Euler**

(a) $\theta' = -0{,}1\theta + 2$ : $a = -0{,}1$, $b = 2$, solution constante $-\frac{2}{-0{,}1} = 20$.
Donc $\theta(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 20$. $\theta(0) = C + 20 = 80$ donne $C = 60$ : $\theta(t) = 60\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 20$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}1t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = 20$ : à long terme, le café prend la température de la pièce, 20 °C.

(b) $\theta(t) \leqslant 50 \iff 60\mathrm{e}^{-0{,}1t} \leqslant 30 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} \leqslant 0{,}5 \iff -0{,}1t \leqslant -\ln 2 \iff t \geqslant 10\ln 2$. Or $10\ln 2 \approx 6{,}93$ min et $0{,}93 \times 60 \approx 56$ s. Lina peut boire son café au bout d'environ 6 min 56 s.

(c) La méthode d'Euler de pas $h = 1$ remplace $\theta'(n) = -0{,}1\theta(n) + 2$ par $-0{,}1\theta_n + 2$ : $\theta_{n+1} = \theta_n + 1 \times (-0{,}1\theta_n + 2) = 0{,}9\theta_n + 2$.

**Ex. 48** **(suite)**

(d) Ligne 4 : `theta = 0.9*theta + 2`. On obtient $\theta_6 \approx 51{,}89$ et $\theta_7 \approx 48{,}70$ : le programme affiche 7. Avec Euler, le café est buvable au bout de 7 min, proche de la valeur exacte de 6 min 56 s.

(e) Soit $u_n = \theta_n - 20$ : $u_{n+1} = 0{,}9\theta_n + 2 - 20 = 0{,}9(\theta_n - 20) = 0{,}9u_n$.
Donc $(u_n)$ est géométrique de raison 0,9 avec $u_0 = 60$, et $\theta_n = 20 + 60 \times 0{,}9^n$. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}1} \geqslant 1 - 0{,}1 = 0{,}9 > 0$, on a $\mathrm{e}^{-0{,}1n} \geqslant 0{,}9^n$, donc $\theta(n) = 20 + 60\mathrm{e}^{-0{,}1n} \geqslant \theta_n$ : la méthode d'Euler sous-estime la température du café.

**Ex. 49** ★★★ **Les poissons du lac : pêche intensive et extinction**

(a) Vrai. Si $g(t) = \alpha t + \beta$ est solution, alors pour tout $t$ : $\alpha = 0{,}2(\alpha t + \beta) - 0{,}4t - 1 = (0{,}2\alpha - 0{,}4)t + 0{,}2\beta - 1$. L'identification impose $0{,}2\alpha - 0{,}4 = 0$ et $\alpha = 0{,}2\beta - 1$, soit $\alpha = 2$ et $\beta = 15$. Réciproquement, $g(t) = 2t + 15$ convient : $g'(t) = 2$ et $0{,}2(2t + 15) - 0{,}4t - 1 = 2$. Il y a donc une unique solution affine.

(b) Les solutions de $(E)$ sont la solution particulière plus les solutions de $y' = 0{,}2y$ : ce sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{0{,}2t} + 2t + 15$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) La condition porte sur la somme : $P(0) = C + 15 = 10$, donc $C = -5$ et $P(t) = -5\mathrm{e}^{0{,}2t} + 2t + 15$. En 2028, $t = 2$ : $P(2) = 19 - 5\mathrm{e}^{0{,}4} \approx 11{,}54$. Le lac compte alors environ 11 500 poissons.

(d) $P'(t) = -\mathrm{e}^{0{,}2t} + 2$ et $P'(t) > 0 \iff \mathrm{e}^{0{,}2t} < 2 \iff t < 5\ln 2$.
Donc $P$ est croissante sur $[0; 5\ln 2]$ puis décroissante, avec $5\ln 2 \approx 3{,}47$. Le maximum est atteint au cours de l'année 2029 et vaut $P(5\ln 2) = -10 + 10\ln 2 + 15 = 5 + 10\ln 2 \approx 11{,}93$, soit environ 11 930 poissons.

(e) $P(t) = \mathrm{e}^{0{,}2t}\left(-5 + (2t + 15)\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} (2t + 15)\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = -\infty$ : la population finit par disparaître, et le modèle n'a plus de sens ensuite. Avec $P(0) = P_0$, on a $C = P_0 - 15$. Si $P_0 < 15$, $C < 0$ et le même calcul donne une limite $-\infty$. Si $P_0 \geqslant 15$, $C \geqslant 0$ et $P(t) \geqslant 2t + 15 > 0$. Il aurait fallu au moins 15 000 poissons au départ.