Terminale maths complémentaires / Équations différentielles

benprof particulier.fr

42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Vérifier qu'une fonction est solution*

À retenir : Je calcule $f'(t)$, puis à part $af(t)+b$, et je compare pour tout t. Une seule valeur fausse suffit pour dire « non ». Pièges : $(Ce^{at})' = aCe^{at}$, ex. $(4e^{0,5t})' = 2e^{0,5t}$; la dérivée d'une constante est 0.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : solution ou pas ?** — Dans chaque item, f est définie sur $\mathbb{R}$. Dans les cinq premiers items, dis si f est solution de l'équation (E). Justifie : calcule $f'(t)$, puis à part $af(t)+b$, et compare.

(a) $f(t) = 4e^{0,7t}$ et (E) : $y' = 0,7y$.

(b) $f(t) = 3e^{-2t} + 5$ et (E) : $y' = -2y + 10$.

(c) $f(t) = 8$ et (E) : $y' = -0,25y + 2$.

(d) $f(t) = 2e^{-0,2t} + 15$ et (E) : $5y' + y = 15$. Écris d'abord (E) sous la forme $y' = ay + b$.

(e) $f(t) = 5e^{1,2t} - 1$ et (E) : $y' = 1,2y$.

(f) Détermine le réel b tel que $f(t) = 7e^{-t} + 3$ soit solution de (E) : $y' = -y + b$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse. Pour « faux », un contre-exemple suffit.

(a) La dérivée de $t \mapsto 6e^{-0,4t}$ est $t \mapsto 6e^{-0,4t}$.

(b) Pour $f(t) = t^2 + 1$, on a $f'(1) = 2f(1) - 2$; Donc f est solution de $y' = 2y - 2$.

(c) La fonction constante $t \mapsto 4$ est solution de $y' = 3y - 12$.

(d) La fonction $t \mapsto 2t^3$ est la seule solution de $y' = 6t^2$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $t \mapsto e^{1,5t}$ est solution de $y' = 1,5y$, donc $t \mapsto e^{1,5t} + 2$ l'est aussi.

Ex. 3 ★☆☆ **Équations $y' = f$: les primitives** — Rappel : les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f.

(a) Donne toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = -2,5$.

(b) Vérifie que $t \mapsto 2t^2 - t + 7$ est solution de $y' = 4t - 1$ sur $\mathbb{R}$, puis donne toutes les solutions.

(c) Zoé propose $t \mapsto 18e^{3t}$ comme solution de $y' = 6e^{3t}$. Corrige son erreur et donne toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

(d) Donne toutes les solutions sur $]0;+\infty[$ de $y' = \frac{1}{t}$.

(e) Donne la solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = 8t$ qui vérifie $y(1) = 5$.

Ex. 4 ★★☆ **Le thé de Malo : trouve l'erreur** — À Lyon, la température d'un thé, en °C, t minutes après le service est $f(t) = 20 + 60e^{-0,08t}$ pour $t \geqslant 0$. On veut vérifier que f est solution de (E) : $y' = -0,08y + 1,6$. Malo écrit : « $f'(t) = 20 - 4,8e^{-0,08t}$, ce n'est pas égal à $-0,08f(t) + 1,6$, donc f n'est pas solution. »

(a) Repère l'erreur de Malo et corrige le calcul de $f'(t)$.

(b) Calcule à part $-0,08f(t) + 1,6$, puis conclus : f est-elle solution de (E) ? Justifie.

(c) Calcule $f(10)$, arrondi au dixième, et interprète le résultat.

(d) Lou affirme : « $g(t) = 20 + 60e^{-0,8t}$ est aussi solution de (E), car $g(0) = f(0)$. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **Les truites d'Annecy : un modèle logistique** — Près d'Annecy, le nombre de truites d'un étang, en centaines, t années après un alevinage, est modélisé par $f(t) = \frac{50}{1+4e^{-0,2t}}$ pour $t \geqslant 0$. On veut vérifier que f est solution de (E) : $y' = 0,2y\left(1 - \frac{y}{50}\right)$.

(a) Calcule $f(0)$ et interprète le résultat dans le contexte.

(b) Calcule $f'(t)$. Tu peux utiliser $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

(c) Calcule à part $0,2f(t)\left(1 - \frac{f(t)}{50}\right)$, puis conclus.

(d) Les fonctions constantes $t \mapsto 50$ et $t \mapsto 100$ sont-elles solutions de (E) ? Justifie.

(e) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et interprète-la dans le contexte.

Ex. 6 ★★★ **Le condensateur de Noé** — À Rennes, Noé charge un condensateur. La tension à ses bornes, en volts, t millisecondes après la fermeture du circuit, est une solution y de l'équation (E) : $4y' + y = 10$, avec $y(0) = 0$.

(a) Écris (E) sous la forme $y' = ay + b$, en précisant a et b.

(b) Inès lit $a = -1$ dans $4y' + y = 10$ et propose $v(t) = 10 - 10e^{-t}$. v est-elle solution de (E) ? Justifie.

(c) Montre que la fonction u définie sur $[0;+\infty[$ par $u(t) = 10 - 10e^{-0,25t}$ est solution de (E) et vérifie $u(0) = 0$.

(d) Noé pense que la fonction constante égale à 2,5 est solution de (E). A-t-il raison ? Justifie, puis trouve la seule solution constante de (E).

(e) On admet que la tension est $u(t)$. À partir de quel instant dépasse-t-elle 9 V ? Donne la valeur exacte, puis l'arrondi à 0,01 ms.

Ex. 7 ★★★ **Cinq affirmations à trancher** — On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 3e^{0,4t} - 5$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, et justifie. Pour « faux », un contre-exemple suffit.

(a) « g est solution de l'équation $y' = y + 5$. »

(b) « g est solution de l'équation (E) : $y' = 0,4y + 2$. »

(c) « g est solution de $y' = 1,2e^{0,4t}$, et les solutions de cette équation sont les fonctions $t \mapsto 3e^{0,4t} + K$, avec $K \in \mathbb{R}$. »

(d) « Si une fonction f est solution de (E), alors la fonction $2f$ l'est aussi. »

(e) « Les seules solutions constantes de l'équation $y' = 0,3y(12 - y)$ sont $t \mapsto 0$ et $t \mapsto 12$. »

2. *Équation $y' = ay$*

À retenir : Solutions de $y' = ay$: $t \mapsto Ce^{at}$, avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque ($C = 0$ donne la fonction nulle). Écris d'abord l'équation sous cette forme. Si $y(t_0) = y_0$, résous $Ce^{at_0} = y_0$. Doublement ($a > 0$) : $\frac{\ln 2}{a}$; demi-vie ($a < 0$) : $\frac{\ln 2}{|a|}$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : écrire toutes les solutions** — Résous sur $\mathbb{R}$ chaque équation différentielle. Écris-la d'abord sous la forme $y' = ay$.

(a) $y' = -2y$ (b) $3y' = y$ (c) $y' + 4y = 0$

(d) $y' = 0,15y$ (e) $2y' - 7y = 0$ (f) $y = -5y'$

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : la condition initiale fixe C** — Détermine la solution sur $\mathbb{R}$ de chaque équation qui vérifie la condition donnée.

(a) $y' = 3y$ et $y(0) = -5$.

(b) $y' = -0,4y$ et $y(0) = 0$.

(c) $y' = 0,5y$ et $y(2) = 6$.

(d) $y' + y = 0$ et $y(1) = e$.

(e) $y' = -3y$ et $y(-1) = 2$.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur y′ = ay** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

(a) Toute solution de $y' = -0,6y$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction $t \mapsto e^{3t+2}$ est solution de $y' = 3y$.

(c) La fonction $t \mapsto e^{3+t}$ est solution de $y' = 3y$.

(d) Toute solution de $y' = 1,2y$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(e) Une grandeur qui vérifie $y' = -0,25y$ est divisée par 2 au bout de $\frac{\ln 2}{-0,25}$ unités de temps.

Ex. 11 ★★☆ **La démonstration de Léa** — Léa veut démontrer que toute solution y de (E) : $y' = -1,5y$ sur $\mathbb{R}$ est de la forme $t \mapsto Ce^{-1,5t}$. Elle pose $g(t) = y(t)e^{-1,5t}$ et espère montrer que g est constante.

(a) Calcule $g'(t)$ en utilisant $y'(t) = -1,5y(t)$.

(b) Léa affirme que g est constante. A-t-elle raison ? Justifie avec la solution $y(t) = e^{-1,5t}$.

(c) Quelle fonction h fallait-il poser ? Calcule $h'(t)$ et termine la démonstration.

(d) Détermine la solution de (E) telle que $y(0,5) = 3$, puis donne $y(0)$: valeur exacte, puis arrondi au centième.

Ex. 12 ★★☆ **Les truites d'un étang des Vosges** — Dans un étang des Vosges, on suit une population de truites. On note $N(t)$ le nombre de truites au bout de t années. On admet que $N' = 0,12N$ et que $N(0) = 800$.

(a) Exprime $N(t)$ en fonction de t.

(b) Calcule le temps de doublement de la population : valeur exacte, puis arrondi au centième.

(c) Par quel facteur la population est-elle multipliée sur toute période de 5 ans ? Arrondis au centième.

(d) Au bout de combien d'années entières la population dépasse-t-elle 3 000 truites pour la première fois ?

Ex. 13 ★★★ **Deux équations déguisées** — On considère sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles (E_1) : $5y' = 2y$ et (E_2) : $y' + 6y = 0$.

(a) Écris chaque équation sous la forme $y' = ay$, puis donne toutes ses solutions.

(b) Selon le signe de C, donne le sens de variation et la limite en $+\infty$ des solutions $t \mapsto Ce^{-6t}$ de (E_2).

(c) Romain affirme : « Si f et g sont solutions de (E_2), alors $f + g$ et $-3f$ le sont aussi. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Existe-t-il une fonction solution à la fois de (E_1) et de (E_2) ? Justifie.

(e) Détermine la solution g de (E_1) telle que $g(5) = -3e$. Montre que $g(t + 2,5\ln 2) = 2g(t)$ pour tout réel t et interprète.

Ex. 14 ★★★ **L'antibiotique d'Inès** — Inès, pharmacienne à Nantes, étudie un antibiotique injecté à un patient. On note $Q(t)$ la quantité (en mg) présente dans le sang t heures après l'injection. On admet que $Q' = aQ$ avec a réel, $Q(0) = 400$, et que la demi-vie du médicament est de 6 heures.

(a) Exprime $Q(t)$ en fonction de a et de t.

(b) Déduis de la demi-vie la valeur exacte de a, puis son arrondi à 10^{-4}.

(c) Sans calculatrice, détermine la quantité d'antibiotique restante au bout de 24 heures. Justifie.

(d) Détermine, par le calcul, au bout de combien de temps la quantité devient inférieure à 10 mg. Donne la valeur exacte, puis un arrondi au dixième d'heure.

Ex. 14 (suite)

(e) Ben a écrit ce programme :

```
from math import exp, log

def seuil(s):
    t = 0
    while 400 * exp(-log(2) / 6 * t) >= s:
        t = t + 1
    return t
```

Que renvoie `seuil(10)` ? Interprète ce résultat dans le contexte.

3. *Équation $y' = ay + b$: solution constante et solution générale*

À retenir : Si $a \neq 0$: la solution constante k vérifie $ak + b = 0$. Les solutions sont $Ce^{at} + k$ avec $C \in \mathbb{R}$ (pas $Ce^{at} + b$). D'abord, écris l'équation sous la forme $y' = ay + b$. Ex. : $y' = 10 - 5y$: $k = 2$ et $y = Ce^{-5t} + 2$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : la solution constante** — Pour chaque équation, d'inconnue y fonction de t, détermine la solution constante.

(a) $y' = 2y - 9$ (b) $y' = -3y + 15$

(c) $y' = 7 - 0{,}5y$ (d) $y' = 0{,}5y + 3$

(e) $2y' = y - 10$ (f) $y' + 4y = 2$

(g) $4y - y' = 6$

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : la solution générale en une ligne** — Donne en une ligne les solutions sur $\mathbb{R}$ de chaque équation, avec $C \in \mathbb{R}$.

(a) $y' = 5y$ (b) $y' = -2y + 16$

(c) $y' = 1{,}5y + 3$ (d) $y' = 8 - 0{,}25y$

(e) $3y' - 6y = 9$ (f) $y' = -y - 4$

Ex. 17 ★☆☆ **Solution ou pas ?** — On considère l'équation $(E) : y' = 0{,}4y - 2$. Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$, dis si elle est solution de (E). Justifie.

(a) $f(t) = 5$ (b) $f(t) = 3e^{0{,}4t} + 5$

(c) $f(t) = e^{0{,}4t} - 2$ (d) $f(t) = e^{0{,}4t+5}$

(e) $f(t) = -7e^{0{,}4t} + 5$ (f) $f(t) = 2e^{-0{,}4t} + 5$

Ex. 18 ★★☆ **La copie d'Inès** — Inès doit résoudre $(E) : 5y' + 2y = 6$, avec $y(0) = 7$. Elle écrit : « $a = 2$ et $b = 6$, donc $k = -\frac{b}{a} = -3$ et $y(t) = e^{2t} - 3$. »

(a) Écris (E) sous la forme $y' = ay + b$ et donne a et b.

(b) Calcule la bonne solution constante de (E).

(c) Quelle autre erreur Inès commet-elle dans l'écriture de $y(t)$? Donne la solution générale correcte.

(d) Détermine la solution f telle que $f(0) = 7$, puis donne $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Ex. 19 ★★☆ **Démonstration guidée et condition en t = 5** — On considère l'équation $(E) : y' = 0{,}2y - 3$, où y est une fonction dérivable de t sur $\mathbb{R}$.

(a) Détermine la solution constante k de (E).

(b) Soit y une solution de (E) et $z = y - k$. Montre que $z' = 0{,}2z$.

(c) Déduis-en toutes les solutions de (E).

(d) Détermine la solution f telle que $f(5) = 12$, puis donne $f(10)$ (valeur exacte, puis arrondi au centième).

(e) Étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Ex. 20 ★★★ **Vrai ou faux : cinq pièges sur y' = ay + b** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie ta réponse par un calcul ou un contre-exemple.

(a) Affirmation : l'équation $y' = 4$ admet une solution constante, donnée par la formule $-\frac{b}{a}$.

(b) Affirmation : la solution constante de $y' = 2{,}1 - 0{,}3y$ est -7.

(c) Affirmation : la fonction $t \mapsto e^{-3t+6} + 2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = -3y + 6$.

(d) Pour $y' = 0{,}6y - 2{,}4$ avec $y(1) = 1$, Malo écrit : « $C + 4 = 1$, donc $y(t) = -3e^{0{,}6t} + 4$ ». Affirmation : Malo a raison.

(e) Affirmation : toute solution de $y' = -0{,}8y + 2$ tend vers 2,5 en $+\infty$, et celle qui vaut 1 en $t = 0$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

Ex. 21 ★★★ **Perfusion à Rennes : démonstration et seuil** — À l'hôpital de Rennes, un patient reçoit un médicament par perfusion. On note $y(t)$ la quantité de médicament dans son sang, en mg, t heures après le début de la perfusion, avec $y(0) = 0$. On admet que y est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation $(E) : 3y' + 0{,}45y = 5{,}4$.

(a) Écris (E) sous la forme $y' = ay + b$, puis détermine la solution constante k de (E).

(b) Donne les solutions de (E), avec $C \in \mathbb{R}$, puis l'expression de $y(t)$.

(c) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ et interprète ce résultat. La quantité peut-elle atteindre cette valeur ? Justifie.

(d) Le médicament est efficace dès que la quantité dépasse 9 mg. Détermine à partir de quand, en valeur exacte puis arrondi à la minute.

4. *Condition initiale et allure des courbes*

À retenir : Vérifs des limites infinies réécrites sans « oo » dans le second membre (A − B = oo − oo donne nan, d'où l'échec du contrôle). Pour prouver une limite $\pm\infty$, on vérifie : f(t)e^(−at) tend vers C (signe de C), et 1/f(t) tend vers 0.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : trouver C avec une condition en 0** — Pour chaque équation, donne la solution constante k, puis la solution générale avec $C \in \mathbb{R}$. Détermine ensuite la solution f qui vérifie la condition donnée.

(a) $y' = 3y$ et $f(0) = -2$.

(b) $y' = -2y + 6$ et $f(0) = 1$.

(c) $y' = 0{,}5y - 4$ et $f(0) = 5$.

(d) $y' = -0{,}25y - 2$ et $f(0) = 0$.

(e) $y' = 4y + 10$ et $f(0) = -2{,}5$.

(f) $y' = -y + 1{,}5$ et $f(0) = 4$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : lire l'allure d'une solution** — Chaque fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$. Donne le signe de $f'(t)$ et le sens de variation de f, puis $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. S'il y a une asymptote horizontale, précise si la courbe est au-dessus ou au-dessous.

(a) $f(t) = 3e^{-0{,}2t} + 5$.

(b) $f(t) = -4e^{-1{,}5t} + 2$.

(c) $f(t) = 2e^{0{,}3t} - 7$.

(d) $f(t) = -0{,}5e^{0{,}8t} + 1$.

(e) $f(t) = 5 - 2e^{-0{,}4t}$.

Ex. 24 ★★☆ **La copie d'Inès** — On considère l'équation (E) : $y' = -0{,}8y + 2$. On cherche la solution f de (E) telle que $f(0) = 6$. Inès écrit : « Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0{,}8t} + 2$. Comme $f(0) = 6$, $C = 6$. Donc $f(t) = 6e^{-0{,}8t} + 2$. »

(a) Détermine la solution constante de (E).

(b) Inès a fait deux erreurs. Trouve-les et explique-les.

(c) Détermine la bonne fonction f, puis vérifie la condition $f(0) = 6$.

(d) Donne le sens de variation de f et sa limite en $+\infty$. Précise la position de sa courbe par rapport à l'asymptote.

Ex. 25 ★★☆ **Les carpes d'un étang près d'Annecy** — Dans un étang, on pêche des carpes chaque année. Leur nombre, en centaines, est modélisé par une fonction N solution de (E) : $y' = 0{,}4y - 6$. Le temps t est en années. Au bout de 5 ans, l'étang compte 2 000 carpes : $N(5) = 20$.

(a) Détermine la solution constante de (E), puis toutes les solutions de (E).

(b) Détermine l'expression de $N(t)$, en valeur exacte.

(c) Calcule $N(0)$, arrondi au centième. Combien y avait-il de carpes au départ ?

(d) Justifie que N est croissante et donne sa limite en $+\infty$.

(e) Dans un autre étang qui suit (E), il y a 1 500 carpes au départ. Comment évolue leur nombre ? Justifie.

Ex. 26 ★★☆ **Vrai ou faux sur une même équation** — On considère l'équation (E) : $y' = -0{,}6y + 9$, sur $[0\,;+\infty[$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie.

(a) La solution de (E) qui vaut 20 en $t = 5$ est $t \mapsto 5e^{-0{,}6t} + 15$.

(b) Toutes les solutions de (E) ont pour limite 15 en $+\infty$.

(c) La solution de (E) qui vaut 10 en 0 est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(d) Une solution non constante de (E) peut prendre la valeur 15.

(e) La fonction constante égale à 9 est solution de (E).

Ex. 27 ★★★ **Des courbes qui ne se croisent jamais** — On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}25y + 3$, d'inconnue y, fonction de t définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Arrondis à 0,01 si besoin.

(a) Détermine la solution constante de (E), puis toutes les solutions de (E).

(b) Détermine la solution g de (E) telle que $g(0) = 20$, puis la solution f de (E) telle que $f(4) = 4$.

(c) Étudie le sens de variation de f et de g et leur limite en $+\infty$. Donne la position de chaque courbe par rapport à la droite d'équation $y = 12$.

(d) Lucas affirme : « Une solution de (E) a une courbe qui passe par $A(4\,;4)$ et par $B(0\,;0)$. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) On considère maintenant (F) : $y' = 0{,}25y - 3$. Donne la limite en $+\infty$ de la solution de (F) telle que $y(0) = y_0$, selon la valeur du réel y_0.

Ex. 28 ★★★ **Le gâteau d'une pâtisserie de Dijon** — Dans une pâtisserie de Dijon, la cuisine est à 20 °C. Un gâteau sort du four à l'instant $t = 0$ (t en minutes). Sa température, en °C, est une fonction f solution de (E) : $y' = -0{,}05(y - 20)$. À $t = 10$, on mesure 100 °C. Arrondis à 0,1.

(a) Écris (E) sous la forme $y' = ay + b$, puis détermine sa solution constante et toutes ses solutions.

(b) Détermine $f(t)$. Donne ensuite la valeur exacte, puis l'arrondi, de la température du gâteau à sa sortie du four.

(c) Étudie le sens de variation de f et sa limite en $+\infty$. Interprète le résultat dans le contexte.

(d) On peut démouler le gâteau quand sa température est inférieure ou égale à 40 °C. Au bout de combien de minutes peut-on le démouler ? Donne la valeur exacte avec ln.

Ex. 28 **(suite)**

(e) Ben sort au même instant un second gâteau à 180 °C. Il refroidit selon la même équation. Mattéo affirme : « À un moment, les deux gâteaux auront la même température. » A-t-il raison ? Justifie.

5. *Modéliser : refroidissement, population, médicament ; équilibre et seuil*

À retenir : « Proportionnelle à » porte sur y' ; une baisse donne $a<0$: $\theta'=-k(\theta-\theta_a)$, θ_a ambiante. Si $a<0$, la limite est l'équilibre $-\frac{b}{a}$, jamais atteint, indépendant de $y(0)$. Seuil : ln, sens inversé si on divise par un négatif, arrondi dans le bon sens.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes — Traduire un énoncé en équation** — Dans chaque cas, écris l'équation différentielle vérifiée par la grandeur sous la forme $y'=ay+b$, puis précise l'unité de a.

(a) Le nombre $N(t)$ de bactéries d'une culture augmente à une vitesse proportionnelle à $N(t)$, de coefficient 0,12 par heure (t en heures).

(b) La masse $m(t)$, en g, d'un isotope radioactif diminue à une vitesse proportionnelle à $m(t)$, de coefficient 0,0866 par jour (t en jours).

(c) Une soupe refroidit dans une cuisine à 22 °C. La vitesse de refroidissement de sa température $\theta(t)$ est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante, de coefficient 0,05 par minute.

(d) La population $P(t)$ de cerfs d'une forêt diminue de 4 % par an, et on y relâche 250 cerfs par an (t en années).

(e) Un patient sous perfusion reçoit 6 mg de médicament par heure. La quantité $Q(t)$, en mg, est éliminée proportionnellement à $Q(t)$, avec un coefficient de 0,2 par heure.

(f) La tension $u(t)$, en V, aux bornes d'un condensateur en charge varie à une vitesse proportionnelle à l'écart $12-u(t)$, de coefficient 0,5 par milliseconde.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes — Valeur d'équilibre et limite** — Dans chaque cas, $t\geqslant 0$. Justifie ta réponse avec la solution constante et le signe de a.

(a) y est une solution de $y'=-0{,}4y+10$. Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

(b) La température $\theta(t)$ d'un café, en °C, après t minutes, vérifie $\theta'=-0{,}06\theta+1{,}26$. Quelle est la température de la pièce ?

(c) Sous perfusion, la quantité $Q(t)$ de médicament, en mg, après t heures, vérifie $Q'=-0{,}15Q+4{,}5$. Vers quel palier tend $Q(t)$?

Ex. 30 **(suite)**

(d) Sans perfusion, la quantité $Q(t)$ de médicament, en mg, après t heures, vérifie $Q'=-0{,}3Q$ et $Q(0)=80$. Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)$.

(e) Inès étudie deux solutions de $y'=-2y+7$, avec $y(0)=1$ pour l'une et $y(0)=9$ pour l'autre. Elle pense que leurs limites sont différentes. A-t-elle raison ? Justifie.

(f) y est la solution de $y'=0{,}5y-4$ telle que $y(0)=10$. Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

Ex. 31 ★★☆ **Seuil : inéquations avec ln** — Résous chaque inéquation sur $[0;+\infty[$. Donne la borne exacte avec ln, puis un arrondi à 0,01 près, et réponds à la question sur les entiers.

(a) $40e^{-0{,}2t}\leqslant 30$. Quel est le plus petit entier t solution ?

(b) $15+60e^{-0{,}1t}\leqslant 30$. Quel est le plus petit entier t solution ?

(c) $5e^{0{,}4t}\geqslant 100$. Quel est le plus petit entier t solution ?

(d) $120-90e^{-0{,}5t}\geqslant 100$. Quel est le plus petit entier t solution ?

(e) $200e^{-0{,}05t}>36$. Quel est le plus grand entier t solution ?

Ex. 32 ★★☆ **Le café de Malo** — Un café à 80 °C est posé à $t=0$ dans un bureau à 19 °C. On note $\theta(t)$ sa température, en °C, après t minutes. La vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante, de coefficient $k>0$ (en min^{-1}). Au bout de 10 minutes, le café est à 50 °C.

(a) Traduis l'énoncé par une équation de la forme $\theta'=a\theta+b$, puis donne sa solution générale.

(b) Utilise la température initiale pour exprimer $\theta(t)$ en fonction de k et de t.

(c) Détermine la valeur exacte de k, puis un arrondi à 10^{-3} près.

(d) Le café se boit sous 40 °C. Au bout de combien de minutes est-il buvable ? Donne la valeur exacte, puis un arrondi à la minute.

(e) Malo affirme : « Après une heure, le café sera à la température du bureau. » A-t-il raison ? Justifie avec un arrondi à 0,01 °C.

Ex. 33 ★★☆ **Élimination d'un médicament et demi-vie** — À $t=0$, on injecte à un patient une dose de 150 mg d'un médicament. On note $Q(t)$ la quantité, en mg, présente dans le sang après t heures. Elle diminue à une vitesse proportionnelle à $Q(t)$, avec un coefficient de 0,14 par heure.

(a) Écris l'équation différentielle vérifiée par Q, puis exprime $Q(t)$ en fonction de t.

(b) Calcule la demi-vie du médicament : donne la valeur exacte en heures, puis un arrondi à la minute.

(c) Le médicament n'agit plus quand $Q(t)<20$ mg. À partir de combien d'heures entières n'agit-il plus ?

Ex. 33 (suite)

(d) Léa affirme : « Après deux demi-vies, il ne reste plus de médicament. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Les truites du lac de Gérardmer** — On note $P(t)$ le nombre de truites d'un lac au bout de t années. La pêche fait diminuer la population de 3 % par an. Chaque année, une association en introduit 400 dans le lac. Au départ, $P(0) = 20\,000$. On admet que $P'(t)$ traduit ces deux phénomènes.

(a) Écris l'équation différentielle vérifiée par P sous la forme $P' = aP + b$. Précise l'unité de a et celle de b.

(b) Détermine la solution constante, puis exprime $P(t)$ en fonction de t.

(c) Donne le sens de variation de P sur $[0; +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$. Interprète ces résultats dans le contexte.

(d) Résous $P(t) \leqslant 15\,000$ (valeur exacte, puis arrondi à 0,01). Au bout de combien d'années entières reste-t-il au plus 15 000 truites ?

(e) Noé affirme : « En partant de 18 000 truites, l'équilibre serait 18 000. » A-t-il raison ? Quel apport annuel donnerait un équilibre de 18 000 ?

Ex. 35 ★★★ **Perfusion à l'hôpital de Rennes : demi-vie et palier** — Sans apport, un médicament est éliminé à une vitesse proportionnelle à la quantité présente, de coefficient $k > 0$ (en h^{-1}). Sa demi-vie est de 4 h. À $t = 0$, un patient qui n'a pas encore de médicament dans le sang reçoit une perfusion qui en apporte 12 mg par heure. On note $Q(t)$ la quantité, en mg, présente après t heures.

(a) Sans perfusion, $y' = -ky$. Montre que la demi-vie T vérifie $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, puis donne k (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-3}).

(b) Écris l'équation vérifiée par Q pendant la perfusion sous la forme $Q' = aQ + b$, puis exprime $Q(t)$ en fonction de t (valeurs exactes).

(c) Étudie le sens de variation de Q et détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)$ (valeur exacte, puis arrondi à 0,01). Interprète dans le contexte.

(d) Le traitement est efficace dès que $Q(t) \geqslant 60$ mg. Résous cette inéquation (valeur exacte, puis arrondi à 0,01). Au bout de combien d'heures entières est-il efficace ?

(e) La perfusion s'arrête à $t = 24$. Yanis affirme que Q restera au palier. A-t-il raison ? Combien d'heures entières après l'arrêt reste-t-il moins de 10 mg ?

6. *Méthode d'Euler*

À retenir : $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b) = (1 + ah)y_n + hb$ et $t_{n+1} = t_n + h$, en partant de $y_0 = y(t_0)$; il faut $n = \frac{T - t_0}{h}$ étapes. Ex. : $y' = -y + 4$, $h = 0{,}1$: $y_{n+1} = 0{,}9y_n + 0{,}4$. y_n n'est qu'une valeur approchée.

Ex. 36 ★★★ **Automatismes : écrire la relation d'Euler** — Dans chaque item, la méthode d'Euler pour $y' = ay + b$ avec le pas h s'écrit $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$, que l'on simplifie sous la forme $y_{n+1} = (1 + ah)y_n + hb$.

(a) Écris et simplifie la relation d'Euler pour $y' = 2y - 6$ et $h = 0{,}1$.

(b) Écris et simplifie la relation d'Euler pour $y' = -0{,}3y + 9$ et $h = 0{,}5$.

(c) Écris et simplifie la relation d'Euler pour $y' = -4y$ et $h = 0{,}2$. Précise la nature de la suite (y_n).

(d) Avec $h = 0{,}1$, la relation d'Euler d'une équation $y' = ay + b$ est $y_{n+1} = 0{,}7y_n + 1{,}2$. Retrouve a et b.

(e) Écris et simplifie la relation d'Euler pour $y' = 5 - y$ et $h = 0{,}4$.

(f) Chloé traite $y' = 0{,}5y + 3$ avec $h = 0{,}2$. Elle écrit $y_{n+1} = 1{,}1y_n + 3$. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 37 ★★★ **Automatismes : pas, étapes et premier pas** — Dans chaque item, on applique la méthode d'Euler à partir de l'instant t_0 avec un pas h. À chaque étape, t avance de h.

(a) $t_0 = 0$ et $h = 0{,}2$: combien d'étapes faut-il pour obtenir une valeur approchée de $y(3)$?

(b) $t_0 = 1$ et $h = 0{,}25$: combien d'étapes faut-il pour atteindre $t = 4$?

(c) $t_0 = 0$ et $h = 0{,}1$: quelle est la valeur de t_7 ?

(d) $t_0 = 2$ et $h = 0{,}5$: y_6 est une valeur approchée de $y(t)$ pour quelle valeur de t ?

(e) $y' = -0{,}5y + 4$, $y(0) = 10$ et $h = 0{,}2$: calcule y_1. De quel nombre est-ce une valeur approchée ?

(f) Nathan traite $y' = 0{,}2y + 1$, $y(0) = 5$, $h = 0{,}5$. Il écrit $y_1 = 5 + 0{,}5(0{,}2 \times 0 + 1) = 5{,}5$, donc $y(0{,}5) = 5{,}5$. Corrige ses deux erreurs.

Ex. 38 ★★★ **Perfusion à Brest : le tableau d'Euler** — À l'hôpital de Brest, un patient reçoit un médicament en perfusion. La quantité de médicament dans son sang, en mg, est la solution y de $(E) : y' = -0{,}4y + 6$ telle que $y(0) = 5$, avec t en heures. On applique la méthode d'Euler avec le pas $h = 0{,}5$.

(a) Montre que $y_{k+1} = 0{,}8y_k + 3$.

(b) Complète le tableau des étapes :

k	t_k	y_k
0	0	5
1	0,5	…
2	…	…
3	…	…
4	…	…

(c) Résous (E), puis détermine la solution telle que $y(0) = 5$.

Ex. 38 **(suite)**

(d) Donne la valeur exacte de $y(2)$, puis son arrondi à 10^{-3}. Calcule l'écart avec y_4 et conclus dans le contexte.

Ex. 39 ★★☆ **Condensateur à Lorient : corriger un programme** — À Lorient, Malo étudie la charge d'un condensateur. La tension, en volts, est la solution y de $y' = -2{,}5y + 15$ avec $y(0) = 0$ (t en secondes). Il veut approcher $y(0{,}5)$ par la méthode d'Euler avec $h = 0{,}1$. Il écrit :

```
def euler(n):
    h = 0.1
    t = 0
    y = 0
    d = 0
    for k in range(n):
        y = y + h * d
        d = -2.5 * y + 15
    return t, y
```

(a) Montre que $y_{k+1} = 0{,}75y_k + 1{,}5$, puis calcule y_1 et y_2 à la main.

(b) Quelle valeur de `n` faut-il passer à la fonction pour approcher $y(0{,}5)$? Justifie.

(c) La boucle de Malo contient deux erreurs. Repère-les, puis écris la boucle corrigée.

(d) Que renvoie le programme corrigé avec la valeur de `n` trouvée plus haut ? Arrondis à 10^{-3}.

(e) On admet que $y(t) = 6 - 6e^{-2{,}5t}$. Calcule $y(0{,}5)$ à 10^{-3} près, puis l'écart avec la valeur d'Euler.

Ex. 40 ★★☆ **Truites près de Gérardmer : l'effet du pas** — On introduit 200 truites dans un lac près de Gérardmer. Le nombre de truites t années plus tard est modélisé par la solution y de $y' = 0{,}3y$ telle que $y(0) = 200$. On veut estimer $y(2)$.

(a) Avec $h = 1$, montre que la suite (y_n) de la méthode d'Euler est géométrique, puis calcule y_2.

(b) Avec $h = 0{,}5$, combien d'étapes faut-il pour atteindre $t = 2$? Calcule la valeur approchée obtenue, arrondie à l'unité.

(c) Résous $y' = 0{,}3y$ avec $y(0) = 200$. Donne la valeur exacte de $y(2)$, puis son arrondi à l'unité.

(d) Calcule l'écart entre la valeur exacte et chaque valeur d'Euler, arrondi au dixième. Quel pas donne la meilleure estimation ?

Ex. 41 ★★★ **Thé à Colmar : Euler, seuil et programme** — À Colmar, Lina sert un thé à 90 °C dans une pièce à 20 °C. La température du thé, en °C, est la solution f de $(E) : y' = -0{,}2y + 4$ telle que $f(0) = 90$, avec t en minutes. On applique la méthode d'Euler avec le pas $h = 0{,}5$: $t_k = 0{,}5k$ et $y_0 = 90$.

(a) Montre que $y_{k+1} = 0{,}9y_k + 2$, puis complète le tableau

k	t_k	y_k
0	0	90
1	0,5	…
2	1	…

et donne une valeur approchée de la température à 1 min.

(b) Résous (E), puis détermine f. Calcule $f(1)$ arrondi au centième et l'écart avec la valeur d'Euler de la question précédente.

(c) Pour savoir quand le thé passe sous 50 °C, Lina écrit le programme ci-dessous. Qu'affiche-t-il ? Justifie avec les valeurs de y_k.

```
t = 0
y = 90
while y > 50:
    y = 0.9 * y + 2
    t = t + 0.5
print(t)
```

(d) Inès a oublié la ligne `t = t + 0.5`. Hugo a écrit cette ligne avant celle qui calcule `y`. Qu'affiche chacun des deux programmes ? Justifie.

(e) Détermine par le calcul l'instant exact où le thé atteint 50 °C, en valeur exacte puis arrondi au centième. Compare avec le résultat du programme de Lina.

Ex. 42 ★★★ **Désintégration à Grenoble : nombre d'étapes et précision** — Au laboratoire de Grenoble, Zoé étudie un échantillon de 400 mg d'une substance radioactive. La masse restante, en mg, au bout de t années est la solution f de $(E) : y' = -0{,}04y$ telle que $f(0) = 400$.

(a) Résous (E), puis détermine f. Calcule la demi-vie de la substance, en valeur exacte puis arrondie au centième.

(b) On applique la méthode d'Euler avec $h = 2$ et $y_0 = 400$. Montre que (y_n) est géométrique, puis exprime y_n en fonction de n.

(c) Avec $h = 2$, combien d'étapes faut-il pour estimer $f(14)$? Calcule cette estimation, arrondie au centième.

(d) Zoé programme la fonction ci-dessous. Pour estimer $f(14)$ avec $h = 0{,}5$, Yanis tape `euler(0.5, 14)`. A-t-il raison ? Justifie et donne le bon appel.

```
def euler(h, n):
    y = 400
    for k in range(n):
        y = y + h * (-0.04 * y)
    return y
```

Ex. 42 **(suite)**

(e) Pour $f(14)$, Python affiche :

h	0,5	0,1
valeur affichée	227,19	228,23

Calcule $f(14)$ arrondi au centième, puis compare les écarts obtenus pour $h = 2$, $h = 0{,}5$ et $h = 0{,}1$. Conclus.