Terminale maths complémentaires / Équations différentielles — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Vérifier qu'une fonction est solution*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : solution ou pas ?**

(a) Pour tout réel t, $f'(t) = 4 \times 0{,}7e^{0{,}7t} = 2{,}8e^{0{,}7t}$. À part, $0{,}7f(t) = 2{,}8e^{0{,}7t}$. Les deux expressions sont égales pour tout réel t, donc f est solution.

(b) $f'(t) = 3 \times (-2)e^{-2t} = -6e^{-2t}$ (la dérivée de 5 est 0). À part, $-2f(t) + 10 = -6e^{-2t} - 10 + 10 = -6e^{-2t}$. Pour tout réel t, $f'(t) = -2f(t) + 10$, donc f est solution.

(c) $f'(t) = 0$, car f est constante. À part, $-0{,}25 \times 8 + 2 = 0$. Pour tout réel t, $f'(t) = -0{,}25f(t) + 2$, donc f est solution : c'est la solution constante.

(d) $5y' + y = 15$ s'écrit $5y' = -y + 15$, soit $y' = -0{,}2y + 3$. $f'(t) = 2 \times (-0{,}2)e^{-0{,}2t} = -0{,}4e^{-0{,}2t}$. À part, $-0{,}2f(t) + 3 = -0{,}4e^{-0{,}2t} - 3 + 3 = -0{,}4e^{-0{,}2t}$. Égalité pour tout réel t, donc f est solution.

(e) En $t = 0$: $f'(0) = 5 \times 1{,}2 = 6$, alors que $1{,}2f(0) = 1{,}2 \times 4 = 4{,}8$. L'égalité est fausse en 0, donc f n'est pas solution.

(f) $f'(t) = -7e^{-t}$. À part, $-f(t) + b = -7e^{-t} - 3 + b$. L'égalité $f'(t) = -f(t) + b$ est vraie pour tout réel t si et seulement si $-3 + b = 0$, donc $b = 3$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Faux. $(Ce^{at})' = aCe^{at}$, donc la dérivée est $t \mapsto 6 \times (-0{,}4)e^{-0{,}4t} = -2{,}4e^{-0{,}4t}$. Le facteur $a = -0{,}4$ a été oublié.

(b) Faux. $f'(1) = 2$ et $2f(1) - 2 = 2$: l'égalité est vraie en 1, mais il la faut pour tout t. En $t = 2$: $f'(2) = 4$, alors que $2f(2) - 2 = 8$.
Donc f n'est pas solution.

(c) Vrai. La dérivée d'une constante est nulle, donc $f'(t) = 0$, et $3 \times 4 - 12 = 0$. Pour tout réel t, $f'(t) = 3f(t) - 12$.

(d) Faux. Les solutions de $y' = 6t^2$ sont les primitives de $t \mapsto 6t^2$, c'est-à-dire $t \mapsto 2t^3 + K$, $K \in \mathbb{R}$. Contre-exemple : $t \mapsto 2t^3 + 1$ a pour dérivée $6t^2$, c'est donc aussi une solution.

Ex. 2 (suite)

(e) Faux. Pour $g(t) = e^{1{,}5t} + 2$, en $t = 0$: $g'(0) = 1{,}5$, alors que $1{,}5g(0) = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5$.
Donc g n'est pas solution.

Ex. 3 ★★☆ **Équations $y' = f$: les primitives**

(a) Ce sont les primitives de la constante $-2{,}5$: $t \mapsto -2{,}5t + K$, où K est un réel quelconque.

(b) Pour tout réel t, $(2t^2 - t + 7)' = 4t - 1$: c'est bien une solution. Toutes les solutions : $t \mapsto 2t^2 - t + K$, $K \in \mathbb{R}$.

(c) La dérivée de $18e^{3t}$ est $54e^{3t}$, pas $6e^{3t}$: Zoé a multiplié par 3 au lieu de diviser. Comme $(2e^{3t})' = 6e^{3t}$, les solutions sont $t \mapsto 2e^{3t} + K$, $K \in \mathbb{R}$.

(d) Sur $]0; +\infty[$, $(\ln t)' = \frac{1}{t}$. Les solutions sont donc $t \mapsto \ln t + K$, $K \in \mathbb{R}$.

(e) Les solutions sont $t \mapsto 4t^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$. $y(1) = 4 + K = 5$, donc $K = 1$. La solution cherchée est $t \mapsto 4t^2 + 1$.

Ex. 4 ★★★ **Le thé de Malo : trouve l'erreur**

(a) Malo a gardé la constante 20 en dérivant, or la dérivée d'une constante est 0. Correction : $f'(t) = 60 \times (-0{,}08)e^{-0{,}08t} = -4{,}8e^{-0{,}08t}$.

(b) $-0{,}08f(t) + 1{,}6 = -1{,}6 - 4{,}8e^{-0{,}08t} + 1{,}6 = -4{,}8e^{-0{,}08t}$. Pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = -0{,}08f(t) + 1{,}6$: f est solution de (E).

(c) $f(10) = 20 + 60e^{-0{,}8} \approx 47{,}0$. Au bout de 10 minutes, le thé est à environ 47,0 °C.

(d) Non. Avoir $g(0) = f(0) = 80$ ne prouve rien. $g'(t) = -48e^{-0{,}8t}$, donc $g'(0) = -48$, alors que $-0{,}08g(0) + 1{,}6 = -6{,}4 + 1{,}6 = -4{,}8$. L'égalité est fausse en 0 : g n'est pas solution.

Ex. 5 ★★★ **Les truites d'Annecy : un modèle logistique**

(a) $f(0) = \frac{50}{1+4} = 10$. Au départ, l'étang compte 10 centaines de truites, soit 1 000 truites.

(b) Avec $u(t) = 1 + 4e^{-0{,}2t}$, on a $u'(t) = 4 \times (-0{,}2)e^{-0{,}2t} = -0{,}8e^{-0{,}2t}$.
Donc $f'(t) = 50 \times \frac{0{,}8e^{-0{,}2t}}{(1+4e^{-0{,}2t})^2} = \frac{40e^{-0{,}2t}}{(1+4e^{-0{,}2t})^2}$.

Ex. 5 **(suite)**

(c) $1-\frac{f(t)}{50}=1-\frac{1}{1+4e^{-0,2t}}=\frac{4e^{-0,2t}}{1+4e^{-0,2t}}$. Donc $0,2f(t)\left(1-\frac{f(t)}{50}\right)=\frac{10}{1+4e^{-0,2t}}\times\frac{4e^{-0,2t}}{1+4e^{-0,2t}}=\frac{40e^{-0,2t}}{(1+4e^{-0,2t})^2}$. C'est $f'(t)$ pour tout $t\geqslant 0$: f est solution de (E).

(d) Une constante a pour dérivée 0. Pour 50 : $0,2\times 50\times(1-1)=0$, donc $t\mapsto 50$ est solution. Pour 100 : $0,2\times 100\times(1-2)=-20\neq 0$, donc $t\mapsto 100$ n'est pas solution.

(e) $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0,2t}=0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\frac{50}{1}=50$. À long terme, la population se stabilise vers 5 000 truites.

Ex. 6 ★★★ **Le condensateur de Noé**

(a) $4y'+y=10$ donne $4y'=-y+10$, donc $y'=-\frac{1}{4}y+\frac{10}{4}$, c'est-à-dire $y'=-0,25y+2,5$. Ainsi $a=-0,25$ et $b=2,5$.

(b) Non. $v'(t)=-10\times(-1)e^{-t}=10e^{-t}$. À part, $-0,25v(t)+2,5=-2,5+2,5e^{-t}+2,5=2,5e^{-t}$. Or $10e^{-t}\neq 2,5e^{-t}$ (en $t=0$: $10\neq 2,5$), donc v n'est pas solution. Inès a oublié de diviser par 4 : $a=-0,25$.

(c) D'une part, $u'(t)=-10\times(-0,25)e^{-0,25t}=2,5e^{-0,25t}$ (la dérivée de la constante 10 est nulle). D'autre part, $-0,25u(t)+2,5=-2,5+2,5e^{-0,25t}+2,5=2,5e^{-0,25t}$. Pour tout $t\geqslant 0$, $u'(t)=-0,25u(t)+2,5$, donc u est solution de (E). De plus, $u(0)=10-10e^{0}=10-10=0$.

(d) Non. La dérivée d'une fonction constante est nulle, mais $-0,25\times 2,5+2,5=1,875\neq 0$: la fonction constante égale à 2,5 n'est pas solution. Une fonction constante égale à k est solution si et seulement si $0=-0,25k+2,5$, c'est-à-dire $k=-\frac{2,5}{-0,25}=10$. La seule solution constante est $t\mapsto 10$.

(e) $u(t)\geqslant 9\iff 10-10e^{-0,25t}\geqslant 9\iff e^{-0,25t}\leqslant 0,1\iff -0,25t\leqslant\ln 0,1\iff t\geqslant -4\ln 0,1=4\ln 10$. On a $4\ln 10\approx 9,21$. La tension dépasse 9 V à partir d'environ 9,21 ms après la fermeture du circuit.

Ex. 7 ★★★ **Cinq affirmations à trancher**

(a) Faux. Attention : la dérivée de $3e^{0,4t}$ n'est pas $3e^{0,4t}$. On a $g'(t)=3\times 0,4e^{0,4t}=1,2e^{0,4t}$ et, à part, $g(t)+5=3e^{0,4t}$. En $t=0$: $g'(0)=1,2$ alors que $g(0)+5=3$. L'égalité est fausse en 0, donc g n'est pas solution.

Ex. 7 **(suite)**

(b) Vrai. D'une part, $g'(t)=1,2e^{0,4t}$. D'autre part, $0,4g(t)+2=1,2e^{0,4t}-2+2=1,2e^{0,4t}$. Pour tout réel t, $g'(t)=0,4g(t)+2$, donc g est solution de (E).

(c) Vrai. Les solutions de $y'=1,2e^{0,4t}$ sont les primitives de $t\mapsto 1,2e^{0,4t}$. Comme $g'(t)=1,2e^{0,4t}$ pour tout réel t, g en est une primitive. Les autres en diffèrent d'une constante : ce sont les fonctions $t\mapsto 3e^{0,4t}-5+K'$, c'est-à-dire $t\mapsto 3e^{0,4t}+K$ avec $K\in\mathbb{R}$.

(d) Faux. Contre-exemple : g est solution de (E). Posons $h=2g$, soit $h(t)=6e^{0,4t}-10$. On a $h'(t)=2,4e^{0,4t}$. À part, $0,4h(t)+2=2,4e^{0,4t}-4+2=2,4e^{0,4t}-2$. Ces deux expressions diffèrent de 2 pour tout t, donc $2g$ n'est pas solution de (E).

(e) Vrai. Une fonction constante égale à k a pour dérivée 0. Elle est donc solution si et seulement si $0,3k(12-k)=0$, c'est-à-dire $k=0$ ou $k=12$ (produit nul). Les seules solutions constantes sont $t\mapsto 0$ et $t\mapsto 12$.

2. *Équation $y'=ay$*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : écrire toutes les solutions**

(a) Ici, $a=-2$. Les solutions sont les fonctions $t\mapsto Ce^{-2t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

(b) On divise par 3 : $y'=\frac{1}{3}y$, donc $a=\frac{1}{3}$. Les solutions sont les fonctions $t\mapsto Ce^{\frac{t}{3}}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

(c) Attention au signe : $y'=-4y$, donc $a=-4$. Les solutions sont les fonctions $t\mapsto Ce^{-4t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

(d) Ici, $a=0,15$. Les solutions sont les fonctions $t\mapsto Ce^{0,15t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

(e) $2y'=7y$, donc $y'=3,5y$. Les solutions sont les fonctions $t\mapsto Ce^{3,5t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

(f) $y'=-\frac{1}{5}y=-0,2y$. Les solutions sont les fonctions $t\mapsto Ce^{-0,2t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : la condition initiale fixe C**

(a) Les solutions s'écrivent $y(t)=Ce^{3t}$, avec $C\in\mathbb{R}$. On a $y(0)=C=-5$, donc $y(t)=-5e^{3t}$. C peut être négatif.

(b) Les solutions s'écrivent $y(t)=Ce^{-0,4t}$, avec $C\in\mathbb{R}$. On a $y(0)=C=0$: la solution est la fonction nulle, $y(t)=0$.

Ex. 9 **(suite)**

(c) Les solutions s'écrivent $y(t) = Ce^{0,5t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. $y(2) = Ce^1 = 6$, donc $C = 6e^{-1}$ et $y(t) = 6e^{-1}e^{0,5t} = 6e^{0,5(t-2)}$.

(d) $y' = -y$, donc $y(t) = Ce^{-t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. $y(1) = Ce^{-1} = e$, donc $C = e^2$ et $y(t) = e^2e^{-t} = e^{2-t}$.

(e) Les solutions s'écrivent $y(t) = Ce^{-3t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. $y(-1) = Ce^3 = 2$, donc $C = 2e^{-3}$ et $y(t) = 2e^{-3}e^{-3t} = 2e^{-3(t+1)}$.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur y′ = ay**

(a) Faux. Les solutions sont $t \mapsto Ce^{-0,6t}$, avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque. Pour $C = -2$, $t \mapsto -2e^{-0,6t}$ est solution et strictement négative. Pour $C = 0$, la solution est nulle.

(b) Vrai. $e^{3t+2} = e^2 \times e^{3t}$ est de la forme Ce^{3t}, avec $C = e^2$. On le vérifie aussi par le calcul : sa dérivée est $3e^{3t+2}$.

(c) Faux. La dérivée de e^{3+t} est e^{3+t}, et non $3e^{3+t}$. L'exposant doit être $3t$ (un produit), pas $3 + t$.

(d) Faux. Les solutions sont $t \mapsto Ce^{1,2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Pour $C = -1$, $\lim\limits_{t \to +\infty} -e^{1,2t} = -\infty$. Pour $C = 0$, la limite vaut 0.

(e) Faux : ce nombre est négatif. La demi-vie T vérifie $e^{-0,25T} = \frac{1}{2}$, soit $-0,25T = -\ln 2$, donc $T = \frac{\ln 2}{0,25} = 4 \ln 2 \approx 2,77$ unités de temps (arrondi au centième).

Ex. 11 ★★☆ **La démonstration de Léa**

(a) $g'(t) = y'(t)e^{-1,5t} - 1,5y(t)e^{-1,5t} = -1,5y(t)e^{-1,5t} - 1,5y(t)e^{-1,5t} = -3y(t)e^{-1,5t}$.

(b) Non. Pour $y(t) = e^{-1,5t}$, on a $g(t) = e^{-3t}$ et $g'(t) = -3e^{-3t} \neq 0$: g n'est pas constante. Il fallait multiplier par e^{-at} avec $a = -1,5$, c'est-à-dire par $e^{1,5t}$.

(c) On pose $h(t) = y(t)e^{1,5t}$. Alors $h'(t) = y'(t)e^{1,5t} + 1,5y(t)e^{1,5t} = (-1,5y(t) + 1,5y(t))e^{1,5t} = 0$. Donc h est constante sur $\mathbb{R}$, égale à un réel C. On obtient $y(t)e^{1,5t} = C$, d'où $y(t) = Ce^{-1,5t}$.

(d) Les solutions s'écrivent $y(t) = Ce^{-1,5t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On résout $Ce^{-0,75} = 3$, donc $C = 3e^{0,75}$ et $y(t) = 3e^{0,75-1,5t}$. Ainsi $y(0) = 3e^{0,75} \approx 6,35$ (arrondi au centième). Ici $C \neq 3$, car la condition est donnée en 0,5.

Ex. 12 ★★☆ **Les truites d'un étang des Vosges**

(a) Les solutions de $N' = 0,12N$ s'écrivent $N(t) = Ce^{0,12t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $N(0) = C = 800$, on obtient $N(t) = 800e^{0,12t}$.

Ex. 12 **(suite)**

(b) On cherche T tel que $e^{0,12T} = 2$, soit $0,12T = \ln 2$. Donc $T = \frac{\ln 2}{0,12} \approx 5,78$ (arrondi au centième). La population double environ tous les 5,78 ans.

(c) $N(t+5) = 800e^{0,12t+0,6} = e^{0,6} \times N(t)$. Sur toute période de 5 ans, la population est multipliée par $e^{0,6} \approx 1,82$.

(d) On résout $800e^{0,12t} > 3\,000 \iff e^{0,12t} > 3,75 \iff t > \frac{\ln 3,75}{0,12} \approx 11,01$. Vérification : $N(11) \approx 2\,995$ et $N(12) \approx 3\,377$. La population dépasse 3 000 truites au bout de 12 ans.

Ex. 13 ★★★ **Deux équations déguisées**

(a) (E_1) : on divise par 5 : $y' = \frac{2}{5}y = 0,4y$, donc $a = 0,4$ et les solutions sont $t \mapsto Ce^{0,4t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. (E_2) : $y' = -6y$, donc $a = -6$ (attention au signe) et les solutions sont $t \mapsto Ce^{-6t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. C peut être négatif ou nul : pour $C = 0$, on obtient la fonction nulle.

(b) Soit $f(t) = Ce^{-6t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Alors $f'(t) = -6Ce^{-6t}$, du signe de $-C$. Si $C > 0$: f est strictement décroissante et à valeurs positives. Si $C < 0$: f est strictement croissante et à valeurs négatives. Si $C = 0$: f est la fonction nulle. Dans tous les cas, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$.

(c) Oui. Si $f(t) = Ce^{-6t}$ et $g(t) = De^{-6t}$, avec $C, D \in \mathbb{R}$, alors $(f+g)(t) = (C+D)e^{-6t}$ et $-3f(t) = -3Ce^{-6t}$. Ce sont des fonctions de la forme Ke^{-6t} avec $K \in \mathbb{R}$, donc des solutions de (E_2). Romain a raison. Le coefficient $-3C$ peut être négatif : c'est permis, car K est un réel quelconque.

(d) Soit f une solution des deux équations. Pour tout réel t, $f'(t) = 0,4f(t)$ et $f'(t) = -6f(t)$. Par différence, $6,4f(t) = 0$, donc $f(t) = 0$. Réciproquement, la fonction nulle vérifie les deux équations. Il existe donc une seule fonction solution des deux équations : la fonction nulle.

(e) $g(t) = Ce^{0,4t}$, avec $C \in \mathbb{R}$, et $g(5) = Ce^2 = -3e$, donc $C = -3e^{-1}$ et $g(t) = -3e^{0,4t-1}$. Ensuite $g(t + 2,5 \ln 2) = -3e^{0,4t-1} \times e^{0,4 \times 2,5 \ln 2} = g(t) \times e^{\ln 2} = 2g(t)$. Interprétation : quelle que soit la valeur de t, au bout d'une durée $2,5 \ln 2 \approx 1,73$ (arrondi au centième), la valeur de g est multipliée par 2. C'est le temps de doublement $\frac{\ln 2}{a}$ avec $a = 0,4$ (ici $g < 0$: c'est $|g|$ qui double).

Ex. 14 ★★★ **L'antibiotique d'Inès**

(a) Les solutions de $Q' = aQ$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{at}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $Q(0) = Ce^0 = C = 400$, donc $Q(t) = 400e^{at}$.

(b) La quantité est divisée par deux en 6 h : $Q(6) = 200$, soit $400e^{6a} = 200$, donc $e^{6a} = \frac{1}{2}$ et $6a = -\ln 2$. Ainsi $a = -\frac{\ln 2}{6} \approx -0{,}1155$
($a < 0$: la quantité décroît, ce qui est cohérent).

(c) $24 = 4 \times 6$: il s'écoule quatre demi-vies. On a $Q(24) = 400e^{24a} = 400\left(e^{6a}\right)^4 = 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 25$. Au bout de 24 heures, il reste 25 mg d'antibiotique.

(d) $Q(t) < 10 \iff e^{at} < \frac{1}{40} \iff at < -\ln 40 \iff t > \frac{-\ln 40}{a}$ (on divise par $a < 0$, donc l'inégalité change de sens). On obtient $t > \frac{6\ln 40}{\ln 2} \approx 31{,}9$. La quantité passe sous 10 mg au bout d'environ 31,9 heures.

(e) Le programme augmente t d'une heure tant que $Q(t) \geqslant 10$. On a $Q(31) \approx 11{,}1$ et $Q(32) \approx 9{,}9$, donc `seuil(10)` renvoie 32. Interprétation : 32 heures est la première durée entière (en heures) à partir de laquelle il reste moins de 10 mg d'antibiotique dans le sang. C'est cohérent avec 31,9 h.

3. *Équation $y' = ay + b$: solution constante et solution générale*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : la solution constante**

(a) $a = 2$ et $b = -9$. On résout $2k - 9 = 0$, donc $k = 4{,}5$.

(b) $a = -3$ et $b = 15$. On résout $-3k + 15 = 0$, donc $k = 5$.

(c) Attention à l'ordre des termes : $a = -0{,}5$ et $b = 7$. On résout $-0{,}5k + 7 = 0$, donc $k = 14$
(et pas 7).

(d) On résout $0{,}5k + 3 = 0$, donc $k = -\frac{3}{0{,}5} = -6$: attention au signe.

(e) On divise par 2 : $y' = 0{,}5y - 5$. On résout $0{,}5k - 5 = 0$, donc $k = 10$.

(f) On passe le terme en y à droite : $y' = -4y + 2$. On résout $-4k + 2 = 0$, donc $k = 0{,}5$.

(g) On isole y' : $y' = 4y - 6$ (attention au signe). On résout $4k - 6 = 0$, donc $k = 1{,}5$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : la solution générale en une ligne**

(a) $t \mapsto Ce^{5t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(b) La solution constante vaut 8, donc les solutions sont $t \mapsto Ce^{-2t} + 8$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Ex. 16 **(suite)**

(c) La solution constante vaut $-\frac{3}{1{,}5} = -2$, donc les solutions sont $t \mapsto Ce^{1{,}5t} - 2$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(d) Ici $a = -0{,}25$ et $b = 8$. La solution constante vaut $\frac{8}{0{,}25} = 32$, donc les solutions sont $t \mapsto Ce^{-0{,}25t} + 32$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(e) On divise par 3 : $y' = 2y + 3$. La solution constante vaut $-1{,}5$, donc les solutions sont $t \mapsto Ce^{2t} - 1{,}5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(f) Ici $a = -1$ et $b = -4$. La solution constante vaut -4, donc les solutions sont $t \mapsto Ce^{-t} - 4$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Ex. 17 ★★☆ **Solution ou pas ?**

(a) $f'(t) = 0$ et $0{,}4 \times 5 - 2 = 0$: oui, c'est la solution constante.

(b) $f'(t) = 1{,}2e^{0{,}4t}$ et $0{,}4f(t) - 2 = 1{,}2e^{0{,}4t} + 2 - 2 = 1{,}2e^{0{,}4t}$: oui.

(c) $f'(t) = 0{,}4e^{0{,}4t}$, mais $0{,}4f(t) - 2 = 0{,}4e^{0{,}4t} - 2{,}8$: non. On a ajouté b au lieu de $k = 5$.

(d) $f'(t) = 0{,}4e^{0{,}4t+5}$, mais $0{,}4f(t) - 2 = 0{,}4e^{0{,}4t+5} - 2$: non. Cette fonction est solution de $y' = 0{,}4y$, pas de (E).

(e) $f'(t) = -2{,}8e^{0{,}4t}$ et $0{,}4f(t) - 2 = -2{,}8e^{0{,}4t} + 2 - 2 = -2{,}8e^{0{,}4t}$: oui
(C peut être négatif).

(f) $f'(t) = -0{,}8e^{-0{,}4t}$, mais $0{,}4f(t) - 2 = 0{,}8e^{-0{,}4t}$: non. L'exposant doit être $0{,}4t$.

Ex. 18 ★★☆ **La copie d'Inès**

(a) $5y' = -2y + 6$, donc $y' = -0{,}4y + 1{,}2$: $a = -0{,}4$ et $b = 1{,}2$. Inès n'a ni passé $2y$ à droite ni divisé par 5.

(b) On résout $-0{,}4k + 1{,}2 = 0$, donc $k = 3$.

(c) Inès oublie la constante C : elle n'écrit qu'une seule fonction. Les solutions sont $t \mapsto Ce^{-0{,}4t} + 3$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(d) $f(0) = C + 3 = 7$, donc $C = 4$ et $f(t) = 4e^{-0{,}4t} + 3$. Vérification : $f(0) = 4 + 3 = 7$. Comme $-0{,}4 < 0$, $e^{-0{,}4t} \to 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 3$, la valeur d'équilibre.

Ex. 19 ★★☆ **Démonstration guidée et condition en t = 5**

(a) On résout $0{,}2k - 3 = 0$, donc $k = \frac{3}{0{,}2} = 15$.

(b) $z = y - 15$, donc $z' = y' = 0{,}2y - 3 = 0{,}2(z + 15) - 3 = 0{,}2z$.

Ex. 19 **(suite)**

(c) z vérifie $z' = 0{,}2z$, donc $z(t) = Ce^{0,2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Ainsi $y(t) = z(t) + 15 = Ce^{0,2t} + 15$, avec $C \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, ces fonctions vérifient (E) : $(Ce^{0,2t} + 15)' = 0{,}2Ce^{0,2t} = 0{,}2(Ce^{0,2t} + 15) - 3$.

(d) $f(5) = Ce^{0,2\times 5} + 15 = Ce + 15$.
Donc $Ce + 15 = 12$, d'où $Ce = -3$ et $C = -3e^{-1}$. Ainsi $f(t) = 15 - 3e^{0,2t-1}$. Vérification :
$f(5) = 15 - 3e^{0} = 12$. Puis $f(10) = 15 - 3e^{2-1} = 15 - 3e \approx 6{,}85$.

(e) $f'(t) = -3 \times 0{,}2e^{0,2t-1} = -0{,}6e^{0,2t-1} < 0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $0{,}2 > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{0,2t-1} = +\infty$. Puisque $C = -3e^{-1} < 0$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$.

Ex. 20 ★★★ **Vrai ou faux : cinq pièges sur y' = ay + b**

(a) Faux. Ici $a = 0$ et $b = 4$, donc la formule $-\frac{b}{a}$ n'a pas de sens (le théorème exige $a \neq 0$). Une fonction constante a une dérivée nulle, et $0 \neq 4$: il n'y a donc aucune solution constante. Les solutions sont les primitives de 4, c'est-à-dire les fonctions $t \mapsto 4t + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(b) Faux. On écrit l'équation sous la forme $y' = -0{,}3y + 2{,}1$: $a = -0{,}3$ et $b = 2{,}1$. La solution constante vérifie $-0{,}3k + 2{,}1 = 0$, donc $k = \frac{-2{,}1}{-0{,}3} = 7$. Vérification : $2{,}1 - 0{,}3 \times 7 = 0$. La bonne valeur est 7, pas -7.

(c) Vrai. La solution constante vérifie $-3k + 6 = 0$, donc $k = 2$. Or $e^{-3t+6} = e^{6} \times e^{-3t}$, donc la fonction s'écrit $Ce^{-3t} + 2$ avec $C = e^{6}$. Vérification : $f'(t) = -3e^{-3t+6}$ et $-3f(t) + 6 = -3e^{-3t+6} - 6 + 6 = -3e^{-3t+6}$. Sans le « $+2$ », ce ne serait pas une solution.

(d) Faux. La solution constante est juste : $0{,}6k - 2{,}4 = 0$ donne $k = 4$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{0,6t} + 4$, avec $C \in \mathbb{R}$. Mais la condition porte sur $t = 1$: la fonction de Malo vaut $-3e^{0,6} + 4 \approx -1{,}47 \neq 1$ en 1. On écrit $Ce^{0,6} + 4 = 1$, donc $C = -3e^{-0,6}$ et $y(t) = 4 - 3e^{0,6t-0,6}$.

(e) Vrai. La solution constante vérifie $-0{,}8k + 2 = 0$, donc $k = 2{,}5$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0,8t} + 2{,}5$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $-0{,}8 < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,8t} = 0$, donc toutes les solutions tendent vers 2,5. Si $y(0) = 1$, alors $C + 2{,}5 = 1$, donc $C = -1{,}5$. Ensuite, $y'(t) = -0{,}8 \times (-1{,}5)e^{-0,8t} = 1{,}2e^{-0,8t} > 0$: cette solution est croissante.

Ex. 21 ★★★ **Perfusion à Rennes : démonstration et seuil**

(a) On isole y' : $3y' = -0{,}45y + 5{,}4$. On divise par 3 : $y' = -0{,}15y + 1{,}8$, donc $a = -0{,}15$ et $b = 1{,}8$ (et non $b = 5{,}4$). On résout $-0{,}15k + 1{,}8 = 0$, donc $k = \frac{1{,}8}{0{,}15} = 12$.

(b) Les solutions de (E) sont les $t \mapsto Ce^{-0,15t} + 12$, avec $C \in \mathbb{R}$. La condition $y(0) = 0$ donne $C + 12 = 0$, donc $C = -12$ et $y(t) = 12 - 12e^{-0,15t}$.

(c) Comme $-0{,}15 < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,15t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 12$. À long terme, la quantité se stabilise vers 12 mg. Elle n'atteint jamais cette valeur, car $12e^{-0,15t} > 0$ donne $y(t) < 12$ pour tout t.

(d) On résout $12 - 12e^{-0,15t} \geqslant 9$. Cela équivaut à $e^{-0,15t} \leqslant \frac{1}{4}$, puis à $-0{,}15t \leqslant -\ln 4$, soit $t \geqslant \frac{\ln 4}{0{,}15} \approx 9{,}242$. Or $0{,}242 \times 60 \approx 14{,}5$. Le médicament est donc efficace au bout d'environ 9 h 15 min.

4. *Condition initiale et allure des courbes*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : trouver C avec une condition en 0**

(a) Ici $b = 0$: la solution constante est $k = 0$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{3t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = C = -2$, donc $f(t) = -2e^{3t}$.

(b) $-2k + 6 = 0$ donne $k = 3$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-2t} + 3$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$ (et pas $C = 1$) et $f(t) = -2e^{-2t} + 3$.

(c) $0{,}5k - 4 = 0$ donne $k = 8$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{0,5t} + 8$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $C + 8 = 5$, donc $C = -3$ et $f(t) = -3e^{0,5t} + 8$.

(d) $-0{,}25k - 2 = 0$ donne $k = -8$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0,25t} - 8$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $C - 8 = 0$, donc $C = 8$ et $f(t) = 8e^{-0,25t} - 8$.

(e) $4k + 10 = 0$ donne $k = -2{,}5$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{4t} - 2{,}5$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $C - 2{,}5 = -2{,}5$, donc $C = 0$: f est la solution constante, $f(t) = -2{,}5$.

(f) $-k + 1{,}5 = 0$ donne $k = 1{,}5$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-t} + 1{,}5$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $C + 1{,}5 = 4$, donc $C = 2{,}5$ et $f(t) = 2{,}5e^{-t} + 1{,}5$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : lire l'allure d'une solution**

(a) $f'(t) = -0{,}6e^{-0{,}2t} < 0$: f est décroissante. Comme $-0{,}2 < 0$, $e^{-0{,}2t} \to 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$. L'asymptote est $y = 5$, et la courbe est au-dessus car $C = 3 > 0$.

(b) $f'(t) = 6e^{-1{,}5t} > 0$: f est croissante. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$. L'asymptote est $y = 2$, et la courbe est au-dessous car $C = -4 < 0$.

(c) $f'(t) = 0{,}6e^{0{,}3t} > 0$: f est croissante. Comme $0{,}3 > 0$ et $C = 2 > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

(d) $f'(t) = -0{,}4e^{0{,}8t} < 0$: f est décroissante. Comme $0{,}8 > 0$ et $C = -0{,}5 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

(e) $f(t) = -2e^{-0{,}4t} + 5$, donc $C = -2$. $f'(t) = 0{,}8e^{-0{,}4t} > 0$: f est croissante. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$. L'asymptote est $y = 5$, et la courbe est au-dessous car $C < 0$.

Ex. 24 ★★☆ **La copie d'Inès**

(a) $-0{,}8k + 2 = 0$ donne $k = \frac{2}{0{,}8} = 2{,}5$. La solution constante est $t \mapsto 2{,}5$.

(b) Première erreur : la constante à ajouter est $-\frac{b}{a} = 2{,}5$, pas $b = 2$. Deuxième erreur : $f(0) = Ce^0 + k = C + k$, donc $C = f(0) - k$ et pas $C = f(0)$. D'ailleurs, sa fonction donne $6 + 2 = 8 \neq 6$.

(c) Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0{,}8t} + 2{,}5$, avec $C \in \mathbb{R}$. $C + 2{,}5 = 6$ donne $C = 3{,}5$, donc $f(t) = 3{,}5e^{-0{,}8t} + 2{,}5$. Vérification : $f(0) = 3{,}5 + 2{,}5 = 6$.

(d) $f'(t) = -2{,}8e^{-0{,}8t} < 0$: f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme $-0{,}8 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2{,}5$. L'asymptote est $y = 2{,}5$, et la courbe est au-dessus car $C = 3{,}5 > 0$.

Ex. 25 ★★☆ **Les carpes d'un étang près d'Annecy**

(a) $0{,}4k - 6 = 0$ donne $k = 15$. Les solutions de (E) sont les $t \mapsto Ce^{0{,}4t} + 15$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(b) $N(5) = Ce^2 + 15 = 20$, donc $Ce^2 = 5$ et $C = 5e^{-2}$. Ainsi $N(t) = 5e^{-2}e^{0{,}4t} + 15 = 5e^{0{,}4t-2} + 15$.

(c) $N(0) = 5e^{-2} + 15 \approx 15{,}68$. Il y avait environ 1 568 carpes au départ.

(d) $N'(t) = 0{,}4 \times 5e^{0{,}4t-2} = 2e^{0{,}4t-2} > 0$: N est croissante. Comme $0{,}4 > 0$ et $C = 5e^{-2} > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = +\infty$. Dans ce modèle, la population de carpes augmente sans limite.

Ex. 25 (suite)

(e) On cherche la solution y de (E) telle que $y(0) = 15$. On a $C + 15 = 15$, donc $C = 0$: c'est la solution constante $y(t) = 15$. Le nombre de carpes reste égal à 1 500 : la croissance compense exactement la pêche. C'est la valeur d'équilibre.

Ex. 26 ★★☆ **Vrai ou faux sur une même équation**

(a) Faux. $-0{,}6k + 9 = 0$ donne $k = 15$: les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0{,}6t} + 15$, avec $C \in \mathbb{R}$. La fonction proposée vaut $5e^{-3} + 15 \approx 15{,}25$ en $t = 5$, et pas 20 : c'est en $t = 0$ qu'elle vaut 20. La condition est en $t = 5$: $Ce^{-3} + 15 = 20$ donne $C = 5e^3$. La bonne solution est donc $t \mapsto 5e^{3-0{,}6t} + 15$.

(b) Vrai. Comme $-0{,}6 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}6t} = 0$, donc $Ce^{-0{,}6t} + 15$ tend vers 15, quel que soit C.

(c) Vrai. $C + 15 = 10$ donne $C = -5$, donc $g(t) = -5e^{-0{,}6t} + 15$. Alors $g'(t) = 3e^{-0{,}6t} > 0$: g est croissante.

(d) Faux. Si $f(t_1) = 15$ pour un réel t_1, alors $Ce^{-0{,}6t_1} + 15 = 15$, donc $Ce^{-0{,}6t_1} = 0$. Une exponentielle n'est jamais nulle, donc $C = 0$: f est la solution constante $t \mapsto 15$. Une solution non constante s'approche de 15 sans jamais l'atteindre.

(e) Faux. Une fonction constante a une dérivée nulle. Or $-0{,}6 \times 9 + 9 = 3{,}6 \neq 0$. La seule solution constante est $t \mapsto 15$.

Ex. 27 ★★★ **Des courbes qui ne se croisent jamais**

(a) Une constante k est solution si et seulement si $0 = -0{,}25k + 3$, soit $k = 12$. Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0{,}25t} + 12$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(b) $g(0) = C + 12 = 20$ car $e^0 = 1$, donc $C = 8$ (et non 20) : $g(t) = 8e^{-0{,}25t} + 12$. Pour f : $Ce^{-0{,}25\times4} + 12 = 4$, soit $Ce^{-1} = -8$, donc $C = -8e$. On obtient $f(t) = -8e \times e^{-0{,}25t} + 12 = -8e^{1-0{,}25t} + 12$.

(c) $f'(t) = -0{,}25 \times (-8e^{1-0{,}25t}) = 2e^{1-0{,}25t} > 0$: f est strictement croissante. $g'(t) = -0{,}25 \times 8e^{-0{,}25t} = -2e^{-0{,}25t} < 0$: g est strictement décroissante. Comme $-0{,}25 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}25t} = 0$, donc f et g tendent toutes les deux vers 12 : la droite $y = 12$ est asymptote horizontale. $f(t) - 12 = -8e^{1-0{,}25t} < 0$: la courbe de f est sous la droite (car $C < 0$) et monte vers elle. $g(t) - 12 = 8e^{-0{,}25t} > 0$: la courbe de g est au-dessus (car $C > 0$) et descend vers elle.

Ex. 27 (suite)

(d) Non. Il n'existe qu'une seule solution de (E) qui vaut 4 en $t = 4$: c'est f. Sa courbe passe bien par A. Mais $f(0) = 12 - 8e \approx -9{,}75 \neq 0$, donc elle ne passe pas par B. Aucune solution ne passe par les deux points.

(e) $0{,}25k - 3 = 0$ donne $k = 12$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{0{,}25t} + 12$ avec $C \in \mathbb{R}$, et $y(0) = C + 12$ donne $C = y_0 - 12$. Comme $0{,}25 > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{0{,}25t} = +\infty$. Si $y_0 > 12$, alors $C > 0$ et la limite est $+\infty$. Si $y_0 < 12$, alors $C < 0$ et la limite est $-\infty$. Si $y_0 = 12$, alors $C = 0$: la solution est constante égale à 12, et sa limite vaut 12. L'équilibre 12 est le même que pour (E), mais les solutions s'en éloignent.

Ex. 28 ★★★ Le gâteau d'une pâtisserie de Dijon

(a) $y' = -0{,}05y + 1$, donc $a = -0{,}05$ et $b = 1$. La solution constante vérifie $-0{,}05k + 1 = 0$, soit $k = 20$: c'est la température de la cuisine. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0{,}05t} + 20$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(b) La condition est donnée en $t = 10$: $Ce^{-0{,}5} + 20 = 100$, donc $Ce^{-0{,}5} = 80$ et $C = 80e^{0{,}5}$. Ainsi $f(t) = 80e^{0{,}5}e^{-0{,}05t} + 20 = 80e^{-0{,}05(t-10)} + 20$. On a alors $f(0) = 80e^{0{,}5} + 20 \approx 151{,}9$. Le gâteau sort du four à environ 151,9 °C.

(c) $f'(t) = -0{,}05 \times 80e^{-0{,}05(t-10)} = -4e^{-0{,}05(t-10)} < 0$: f est strictement décroissante. Comme $-0{,}05 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}05(t-10)} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$. Le gâteau refroidit et sa température se rapproche de 20 °C par au-dessus ($C > 0$), sans jamais descendre en dessous.

(d) On résout $f(t) \leqslant 40$: $80e^{-0{,}05(t-10)} \leqslant 20$, soit $e^{-0{,}05(t-10)} \leqslant \frac{1}{4}$, donc $-0{,}05(t-10) \leqslant -\ln 4$. On obtient $t \geqslant 10 + 20\ln 4 = 10 + 40\ln 2 \approx 37{,}7$. On peut démouler le gâteau au bout d'environ 37,7 minutes.

(e) Non. Le second gâteau suit la solution $h(t) = 160e^{-0{,}05t} + 20$, puisque $h(0) = C + 20 = 180$ donne $C = 160$. Si h et f prenaient la même valeur à un instant t_0, ce seraient deux solutions de (E) avec la même condition en t_0, donc la même fonction (unicité). Or $h(0) = 180$ et $f(0) \approx 151{,}9$. On peut aussi calculer : $h(t) - f(t) = (160 - 80e^{0{,}5})e^{-0{,}05t}$, avec $160 - 80e^{0{,}5} \approx 28{,}1 > 0$. Le second gâteau reste toujours plus chaud, même si l'écart tend vers 0.

5. *Modéliser : refroidissement, population, médicament ; équilibre et seuil*

Ex. 29 ★☆☆ Automatismes — Traduire un énoncé en équation

(a) L'effectif augmente, donc le coefficient est positif : $N'(t) = 0{,}12\,N(t)$. On a $a = 0{,}12$ en h^{-1} et $b = 0$.

(b) La masse diminue, donc le coefficient est négatif : $m'(t) = -0{,}0866\,m(t)$. On a $a = -0{,}0866$ en jour^{-1} et $b = 0$.

(c) La soupe refroidit, donc $\theta'(t) = -0{,}05\big(\theta(t) - 22\big) = -0{,}05\,\theta(t) + 1{,}1$. On a $a = -0{,}05$ en min^{-1}, et $b = 1{,}1$ en °C par minute.

(d) La baisse de 4 % par an donne $-0{,}04P$, et l'apport donne $+250$: $P'(t) = -0{,}04\,P(t) + 250$. On a $a = -0{,}04$ en an^{-1}, et $b = 250$ en cerfs par an.

(e) L'apport est constant ($+6$) et l'élimination retire $0{,}2\,Q(t)$: $Q'(t) = -0{,}2\,Q(t) + 6$. On a $a = -0{,}2$ en h^{-1}, et $b = 6$ en mg par heure.

(f) $u'(t) = 0{,}5\big(12 - u(t)\big) = -0{,}5\,u(t) + 6$. On a $a = -0{,}5$ en ms^{-1}, et $b = 6$ en V par ms.

Ex. 30 ★☆☆ Automatismes — Valeur d'équilibre et limite

(a) La solution constante vaut $-\frac{10}{-0{,}4} = 25$, donc $y(t) = Ce^{-0{,}4t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $a = -0{,}4 < 0$, $e^{-0{,}4t} \to 0$: la limite vaut 25.

(b) La solution constante vaut $-\frac{1{,}26}{-0{,}06} = 21$, et $a < 0$. Donc $\theta(t) \to 21$: la pièce est à 21 °C.

(c) La solution constante vaut $-\frac{4{,}5}{-0{,}15} = 30$, et $a < 0$. Donc $Q(t)$ tend vers un palier de 30 mg, sans l'atteindre si $Q(0) \neq 30$.

(d) $Q(t) = Ce^{-0{,}3t}$, avec $C \in \mathbb{R}$, et $Q(0) = 80$ donne $C = 80$. Comme $e^{-0{,}3t} \to 0$, $Q(t) \to 0$: le médicament est éliminé.

(e) Non. La solution constante vaut $-\frac{7}{-2} = 3{,}5$, donc $y(t) = Ce^{-2t} + 3{,}5$. On trouve $C = -2{,}5$ pour l'une et $C = 5{,}5$ pour l'autre. Comme $a < 0$, les deux tendent vers 3,5 : la limite ne dépend pas de la condition initiale.

(f) La solution constante vaut $-\frac{-4}{0{,}5} = 8$, donc $y(t) = Ce^{0{,}5t} + 8$, et $y(0) = 10$ donne $C = 2$. Ici $a > 0$ et $C > 0$, donc $e^{0{,}5t} \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$: la valeur 8 n'est pas une limite.

Ex. 31 ★☆☆ **Seuil : inéquations avec ln**

(a) $e^{-0,2t} \leqslant 0,75 \iff -0,2t \leqslant \ln 0,75 \iff t \geqslant \frac{\ln \frac{4}{3}}{0,2} \approx 1,44$ (on divise par $-0,2 < 0$, donc le sens change). Le plus petit entier solution est 2.

(b) $60e^{-0,1t} \leqslant 15 \iff e^{-0,1t} \leqslant 0,25 \iff -0,1t \leqslant \ln 0,25 \iff t \geqslant \frac{\ln 4}{0,1} \approx 13,86$. Le plus petit entier solution est 14.

(c) $e^{0,4t} \geqslant 20 \iff 0,4t \geqslant \ln 20 \iff t \geqslant \frac{\ln 20}{0,4} \approx 7,49$ (on divise par un positif, donc le sens est conservé). Le plus petit entier solution est 8.

(d) $-90e^{-0,5t} \geqslant -20 \iff e^{-0,5t} \leqslant \frac{2}{9}$ (on divise par $-90 < 0$, donc le sens change) $\iff -0,5t \leqslant \ln \frac{2}{9} \iff t \geqslant 2\ln \frac{9}{2} \approx 3,01$ (le sens change encore avec $-0,5$). Le plus petit entier solution est 4, et non 3 : on arrondit par excès.

(e) $e^{-0,05t} > 0,18 \iff -0,05t > \ln 0,18 \iff t < \frac{\ln \frac{50}{9}}{0,05} \approx 34,30$. Le plus grand entier solution est 34.

Ex. 32 ★★☆ **Le café de Malo**

(a) $\theta' = -k(\theta - 19) = -k\theta + 19k$, avec $a = -k \neq 0$. La solution constante vaut $-\frac{19k}{-k} = 19$, donc $\theta(t) = Ce^{-kt} + 19$, avec $C \in \mathbb{R}$.

(b) $\theta(0) = C + 19 = 80$ donne $C = 61$: $\theta(t) = 61e^{-kt} + 19$.

(c) $\theta(10) = 50 \iff 61e^{-10k} = 31 \iff -10k = \ln \frac{31}{61} \iff k = \frac{1}{10}\ln \frac{61}{31} \approx 0,068\ \text{min}^{-1}$.

(d) $\theta(t) \leqslant 40 \iff e^{-kt} \leqslant \frac{21}{61} \iff -kt \leqslant \ln \frac{21}{61}$. On divise par $-k < 0$, donc le sens change : $t \geqslant \frac{10\ln \frac{61}{21}}{\ln \frac{61}{31}} \approx 15,75$. On arrondit par excès : le café est buvable au bout de 16 minutes.

(e) Non. On a $e^{-60k} = \left(e^{-10k}\right)^6 = \left(\frac{31}{61}\right)^6$, donc $\theta(60) = 61\left(\frac{31}{61}\right)^6 + 19 \approx 20,05\ ^\circ\text{C}$. Et comme $61e^{-kt} > 0$, on a toujours $\theta(t) > 19$: le café tend vers 19 °C sans jamais l'atteindre.

Ex. 33 ★★☆ **Élimination d'un médicament et demi-vie**

(a) La quantité diminue, donc $Q' = -0,14Q$ ($a = -0,14$, $b = 0$). Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0,14t}$, avec $C \in \mathbb{R}$, et $Q(0) = 150$ donne $C = 150$: $Q(t) = 150e^{-0,14t}$.

(b) $Q(T) = 75 \iff e^{-0,14T} = \frac{1}{2} \iff -0,14T = -\ln 2 \iff T = \frac{\ln 2}{0,14} \approx 4,951$ h. Comme $0,951 \times 60 \approx 57$, la demi-vie vaut environ 4 h 57 min.

(c) $Q(t) < 20 \iff e^{-0,14t} < \frac{2}{15} \iff -0,14t < \ln \frac{2}{15} \iff t > \frac{\ln 7,5}{0,14} \approx 14,39$. On arrondit par excès : le médicament n'agit plus à partir de 15 heures.

Ex. 33 (suite)

(d) Non. Après deux demi-vies, $Q = 150 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 37,5$ mg. Et comme $150e^{-0,14t} > 0$ pour tout t, la quantité tend vers 0 sans jamais l'atteindre.

Ex. 34 ★★★ **Les truites du lac de Gérardmer**

(a) La population diminue de 3 % par an, donc le terme de perte est $-0,03P$. Les arrivées ajoutent $+400$: $P' = -0,03P + 400$.
Donc $a = -0,03$ en an^{-1}, et $b = 400$ en truites par an.

(b) La solution constante vaut $-\frac{b}{a} = -\frac{400}{-0,03} = \frac{40\,000}{3} \approx 13\,333,33$. La solution générale est $P(t) = Ce^{-0,03t} + \frac{40\,000}{3}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Avec $P(0) = 20\,000$, on trouve $C = 20\,000 - \frac{40\,000}{3} = \frac{20\,000}{3}$.
Donc $P(t) = \frac{20\,000}{3}e^{-0,03t} + \frac{40\,000}{3}$.

(c) $C = \frac{20\,000}{3} > 0$ et $t \mapsto e^{-0,03t}$ est décroissante, donc P est décroissante sur $[0;+\infty[$. Comme $-0,03 < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,03t} = 0$, d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \frac{40\,000}{3} \approx 13\,333$. La population baisse et se rapproche d'environ 13 333 truites, sans jamais descendre jusqu'à cette valeur.

(d) On a $\frac{20\,000}{3}e^{-0,03t} + \frac{40\,000}{3} \leqslant 15\,000 \iff \frac{20\,000}{3}e^{-0,03t} \leqslant \frac{5\,000}{3}$. Cela donne $e^{-0,03t} \leqslant \frac{1}{4}$, puis $-0,03t \leqslant -\ln 4$. On divise par $-0,03 < 0$, donc le sens change : $t \geqslant \frac{\ln 4}{0,03} \approx 46,21$. On vérifie avec les entiers voisins : $P(46) \approx 15\,011$ et $P(47) \approx 14\,961$. Le lac compte au plus 15 000 truites au bout de 47 ans.

(e) Noé a tort. L'équilibre est la solution constante $-\frac{b}{a} = \frac{40\,000}{3}$. Il dépend de a et b, mais pas de $P(0)$: en partant de 18 000, la population tend encore vers environ 13 333. Avec un apport de D truites par an, l'équilibre vaut $\frac{D}{0,03}$. On veut $\frac{D}{0,03} = 18\,000$, donc $D = 540$. Il faudrait introduire 540 truites par an.

Ex. 35 ★★★ **Perfusion à l'hôpital de Rennes : demi-vie et palier**

(a) Les solutions de $y' = -ky$ sont les $y(t) = y_0e^{-kt}$, avec $y_0 = y(0)$. À l'instant T, la quantité vaut la moitié de y_0 : $y_0e^{-kT} = \frac{y_0}{2}$, donc $e^{-kT} = \frac{1}{2}$. On applique ln : $-kT = -\ln 2$, donc $k = \frac{\ln 2}{T}$. Avec $T = 4$ h : $k = \frac{\ln 2}{4} \approx 0,173\ \text{h}^{-1}$.

(b) La perfusion apporte 12 mg/h et l'élimination retire kQ : $Q' = -\frac{\ln 2}{4}Q + 12$.
Donc $a = -\frac{\ln 2}{4}$ et $b = 12$. La solution constante vaut $-\frac{b}{a} = \frac{48}{\ln 2}$. La solution générale est $Q(t) = Ce^{-\frac{\ln 2}{4}t} + \frac{48}{\ln 2}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Avec $Q(0) = 0$, on trouve $C = -\frac{48}{\ln 2}$.
Donc $Q(t) = \frac{48}{\ln 2}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{4}t}\right)$.

Ex. 35 (suite)

(c) $C < 0$ et $t \mapsto e^{-\frac{\ln 2}{4}t}$ est décroissante, donc Q est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $a < 0$, l'exponentielle tend vers 0 et $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = \frac{48}{\ln 2} \approx 69{,}25$ mg. La quantité augmente vers un palier d'environ 69,25 mg, qu'elle n'atteint jamais.

(d) $Q(t) \geqslant 60 \iff 1 - e^{-kt} \geqslant \frac{60\ln 2}{48} \iff e^{-kt} \leqslant 1 - \frac{5\ln 2}{4}$. On applique ln : $-kt \leqslant \ln\left(1 - \frac{5\ln 2}{4}\right)$. On divise par $-k < 0$, donc le sens change : $t \geqslant -\frac{4}{\ln 2}\ln\left(1 - \frac{5\ln 2}{4}\right) \approx 11{,}62$. On vérifie : $Q(11) \approx 58{,}96$ et $Q(12) \approx 60{,}59$. Le traitement est efficace au bout de 12 heures.

(e) Yanis a tort. Après l'arrêt, il n'y a plus d'apport : $y' = -ky$, avec $y(0) = Q(24)$ si t compte les heures depuis l'arrêt. L'équilibre devient 0 et la quantité décroît vers 0. On a $Q(24) = \frac{48}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{47{,}25}{\ln 2} \approx 68{,}17$ mg. On résout $Q(24)e^{-kt} < 10 \iff t > \frac{4}{\ln 2}\ln\left(\frac{4{,}725}{\ln 2}\right) \approx 11{,}08$. Il reste moins de 10 mg au bout de 12 heures après l'arrêt.

6. *Méthode d'Euler*

Ex. 36 ★☆☆ Automatismes : écrire la relation d'Euler

(a) $y_{n+1} = y_n + 0{,}1(2y_n - 6) = y_n + 0{,}2y_n - 0{,}6$, donc $y_{n+1} = 1{,}2y_n - 0{,}6$.

(b) $y_{n+1} = y_n + 0{,}5(-0{,}3y_n + 9) = y_n - 0{,}15y_n + 4{,}5$, donc $y_{n+1} = 0{,}85y_n + 4{,}5$.

(c) $y_{n+1} = y_n + 0{,}2 \times (-4y_n) = y_n - 0{,}8y_n = 0{,}2y_n$. Ici $b = 0$: (y_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

(d) $1 + 0{,}1a = 0{,}7$, donc $0{,}1a = -0{,}3$ et $a = -3$. $0{,}1b = 1{,}2$, donc $b = 12$. L'équation est $y' = -3y + 12$.

(e) On écrit d'abord $y' = -y + 5$, donc $a = -1$ et $b = 5$. $y_{n+1} = y_n + 0{,}4(-y_n + 5) = y_n - 0{,}4y_n + 2 = 0{,}6y_n + 2$.

(f) Non. Le pas h multiplie toute la dérivée $0{,}5y_n + 3$, pas seulement $0{,}5y_n$: $y_{n+1} = y_n + 0{,}2(0{,}5y_n + 3) = y_n + 0{,}1y_n + 0{,}6 = 1{,}1y_n + 0{,}6$.

Ex. 37 ★☆☆ Automatismes : pas, étapes et premier pas

(a) $n = \frac{3-0}{0{,}2} = 15$ étapes.

(b) $n = \frac{4-1}{0{,}25} = \frac{3}{0{,}25} = 12$ étapes.

(c) $t_7 = t_0 + 7h = 0 + 7 \times 0{,}1 = 0{,}7$.

(d) $t_6 = 2 + 6 \times 0{,}5 = 5$: y_6 est une valeur approchée de $y(5)$.

Ex. 37 (suite)

(e) On part de la condition initiale $y_0 = 10$: $y_1 = 10 + 0{,}2(-0{,}5 \times 10 + 4) = 10 + 0{,}2 \times (-1) = 9{,}8$. C'est une valeur approchée de $y(0{,}2)$.

(f) Première erreur : dans la dérivée, on remplace y par $y_0 = 5$, pas par $t_0 = 0$: $0{,}2 \times 5 + 1 = 2$, donc $y_1 = 5 + 0{,}5 \times 2 = 6$. Deuxième erreur : y_1 n'est qu'une valeur approchée, on écrit $y(0{,}5) \approx 6$.

Ex. 38 ★★☆ Perfusion à Brest : le tableau d'Euler

(a) $y_{k+1} = y_k + 0{,}5(-0{,}4y_k + 6) = y_k - 0{,}2y_k + 3 = 0{,}8y_k + 3$.

(b) On part de $y_0 = 5$ et t avance de 0,5 à chaque étape : $y_1 = 0{,}8 \times 5 + 3 = 7$; $y_2 = 0{,}8 \times 7 + 3 = 8{,}6$; $y_3 = 0{,}8 \times 8{,}6 + 3 = 9{,}88$; $y_4 = 0{,}8 \times 9{,}88 + 3 = 10{,}904$.

k	t_k	y_k
0	0	5
1	0,5	7
2	1	8,6
3	1,5	9,88
4	2	10,904

(c) (E) s'écrit $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}4$ et $b = 6$. Solution constante : $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-0{,}4} = 15$. Solutions : $y(t) = Ce^{-0{,}4t} + 15$, avec $C \in \mathbb{R}$. $y(0) = C + 15 = 5$ donne $C = -10$, donc $y(t) = 15 - 10e^{-0{,}4t}$.

(d) $y(2) = 15 - 10e^{-0{,}8} \approx 10{,}507$. Écart : $10{,}904 - 10{,}507 \approx 0{,}397$. Au bout de 2 h, le modèle donne environ 10,5 mg de médicament. La méthode d'Euler donne environ 10,9 mg : c'est une approximation à environ 0,4 mg près.

Ex. 39 ★★☆ Condensateur à Lorient : corriger un programme

(a) $y_{k+1} = y_k + 0{,}1(-2{,}5y_k + 15) = y_k - 0{,}25y_k + 1{,}5 = 0{,}75y_k + 1{,}5$. On part de $y_0 = 0$: $y_1 = 1{,}5$ et $y_2 = 0{,}75 \times 1{,}5 + 1{,}5 = 2{,}625$.

(b) Il faut $n = \frac{0{,}5-0}{0{,}1} = 5$ étapes. `range(5)` fait exactement 5 tours de boucle : on passe `n = 5`.

Ex. 39 **(suite)**

(c) Erreur 1 : la dérivée `d` est calculée après `y`. Au premier tour, on utilise `d = 0` et non la dérivée en y_0. Erreur 2 : `t` n'est jamais mis à jour. Pour `euler(5)`, le programme de Malo renvoie donc $(0\,;4{,}102)$, en retard d'une étape. Fonction corrigée :

```
def euler(n):
    h = 0.1
    t = 0
    y = 0
    for k in range(n):
        d = -2.5 * y + 15
        y = y + h * d
        t = t + h
    return t, y
```

(d) Il renvoie $t \approx 0{,}5$ et $y \approx 4{,}576$ (c'est y_5). La tension approchée au bout de 0,5 s est d'environ 4,576 V.

(e) $y(0{,}5) = 6 - 6e^{-1{,}25} \approx 4{,}281$ V. Écart : $4{,}576 - 4{,}281 \approx 0{,}295$ V. La valeur d'Euler n'est qu'une approximation de la tension, à environ 0,3 V près.

Ex. 40 ★★☆ **Truites près de Gérardmer : l'effet du pas**

(a) $y_{n+1} = y_n + 1 \times 0{,}3y_n = 1{,}3y_n$: (y_n) est géométrique de raison 1,3 et de premier terme $y_0 = 200$.
Donc $y_2 = 200 \times 1{,}3^2 = 338$.

(b) $n = \frac{2-0}{0{,}5} = 4$ étapes. Ici $y_{n+1} = y_n + 0{,}5 \times 0{,}3y_n = 1{,}15y_n$, donc $y_4 = 200 \times 1{,}15^4 = 349{,}801\,25 \approx 350$ truites.

(c) Les solutions de $y' = 0{,}3y$ sont $y(t) = Ce^{0{,}3t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. $y(0) = C = 200$, donc $y(t) = 200e^{0{,}3t}$. Alors $y(2) = 200e^{0{,}6} \approx 364$ truites.

(d) Avec $h = 1$: $200e^{0{,}6} - 338 \approx 26{,}4$. Avec $h = 0{,}5$: $200e^{0{,}6} - 349{,}801\,25 \approx 14{,}6$. Le pas $h = 0{,}5$ donne la meilleure estimation : plus le pas est petit, plus la valeur d'Euler se rapproche des 364 truites prévues par le modèle.

Ex. 41 ★★★ **Thé à Colmar : Euler, seuil et programme**

(a) $y_{k+1} = y_k + 0{,}5(-0{,}2y_k + 4) = y_k - 0{,}1y_k + 2 = 0{,}9y_k + 2$. Le pas h multiplie toute la dérivée. On obtient $y_1 = 0{,}9 \times 90 + 2 = 83$ et $y_2 = 0{,}9 \times 83 + 2 = 76{,}7$.

k	t_k	y_k
0	0	90
1	0,5	83
2	1	76,7

D'après Euler, le thé est à environ 76,7 °C au bout de 1 min.

(b) (E) s'écrit $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}2$ et $b = 4$. La solution constante vaut $-\frac{4}{-0{,}2} = 20$. Les solutions sont donc $t \mapsto Ce^{-0{,}2t} + 20$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) = C + 20 = 90$, on a $C = 70$ et $f(t) = 20 + 70e^{-0{,}2t}$. Alors $f(1) = 20 + 70e^{-0{,}2} \approx 77{,}31$. L'écart vaut environ $77{,}31 - 76{,}7 = 0{,}61$ °C : la valeur d'Euler n'est qu'une approximation.

(c) La boucle continue tant que $y_k > 50$. On calcule $y_{k+1} = 0{,}9y_k + 2$ de proche en proche :

k	t_k	y_k
7	3,5	53,48
8	4	50,13
9	4,5	47,12

On a $y_8 \approx 50{,}13 > 50$ puis $y_9 \approx 47{,}12 \leqslant 50$. La boucle s'arrête donc après 9 étapes, et le programme affiche $t = 9 \times 0{,}5 = 4{,}5$: d'après Euler, le thé passe sous 50 °C au bout de 4,5 min.

(d) Programme d'Inès : `t` n'est jamais mis à jour. La boucle s'arrête quand même, car `y` diminue, mais le programme affiche 0. Programme de Hugo : le calcul de `y` n'utilise pas `t`, donc échanger les deux lignes ne change rien. Il affiche aussi 4,5.

(e) On résout $20 + 70e^{-0{,}2t} = 50$, soit $e^{-0{,}2t} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$, donc $-0{,}2t = \ln\frac{3}{7}$ et $t = -5\ln\frac{3}{7} = 5\ln\frac{7}{3} \approx 4{,}24$. Le thé atteint 50 °C au bout d'environ 4,24 min. Le programme affiche 4,5 min, car il n'avance que par pas de 0,5 et travaille sur des valeurs approchées : à 4 min, la valeur d'Euler est encore au-dessus de 50 °C (50,13).

Ex. 42 ★★★ **Désintégration à Grenoble : nombre d'étapes et précision**

(a) (E) est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0{,}04$. Ses solutions sont donc $t \mapsto Ce^{-0{,}04t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) = C = 400$, on obtient $f(t) = 400e^{-0{,}04t}$. On cherche t tel que $400e^{-0{,}04t} = 200$, soit $e^{-0{,}04t} = \frac{1}{2}$, donc $-0{,}04t = -\ln 2$ et $t = \frac{\ln 2}{0{,}04} = 25\ln 2 \approx 17{,}33$. La demi-vie vaut environ 17,33 ans.

(b) $y_{n+1} = y_n + 2 \times (-0{,}04 y_n) = y_n - 0{,}08 y_n = 0{,}92 y_n$. La suite (y_n) est donc géométrique, de raison 0,92 et de premier terme $y_0 = 400$. Ainsi $y_n = 400 \times 0{,}92^n$.

(c) On part de $t_0 = 0$ et on veut atteindre $T = 14$: il faut $n = \frac{14-0}{2} = 7$ étapes. Alors $y_7 = 400 \times 0{,}92^7 \approx 223{,}14$. Avec ce pas, il resterait environ 223,14 mg au bout de 14 ans.

(d) Yanis a tort. `range(14)` fait 14 étapes de 0,5, et t avance de $14 \times 0{,}5 = 7$. Son appel donne donc une valeur approchée de $f(7)$, pas de $f(14)$. Pour atteindre $t = 14$, il faut $n = \frac{14}{0{,}5} = 28$ étapes : le bon appel est `euler(0.5, 28)`.

(e) $f(14) = 400e^{-0{,}56} \approx 228{,}48$. Les écarts valent environ $228{,}48 - 223{,}14 = 5{,}34$ pour $h = 2$, puis $228{,}48 - 227{,}19 = 1{,}29$ pour $h = 0{,}5$, et enfin $228{,}48 - 228{,}23 = 0{,}25$ pour $h = 0{,}1$. Plus le pas est petit, plus la valeur d'Euler est proche de la masse exacte, environ 228,48 mg. Elle reste cependant une valeur approchée.