## 1. Vecteur directeur et équation cartésienne

**Ex. 1** ★☆☆ **Lire un vecteur directeur, tester un vecteur ou un point**

(a) $a = 3$ et $b = 5$, donc $\vec{u}\,(-b\,;\,a) = (-5\,;\,3)$ dirige $d_1$ (et non $(3\,;\,5)$).

(b) $2y = 6 - 4x \iff 4x + 2y - 6 = 0$ : $a = 4$, $b = 2$, donc $(-2\,;\,4)$ dirige $d_2$ ($(-1\,;\,2)$ aussi, car il lui est colinéaire).

(c) Un vecteur directeur de $d_3$ est $(-3\,;\,5)$.
$\det\big((5\,;\,3),(-3\,;\,5)\big) = 5\times 5 - 3\times(-3) = 34 \neq 0$ : les vecteurs ne sont pas colinéaires, $(5\,;\,3)$ ne dirige pas $d_3$. C'est le piège $(a\,;\,b)$.

(d) $\det\big(\vec{w},(-3\,;\,5)\big) = 6\times 5 - (-10)\times(-3) = 30 - 30 = 0$ : $\vec{w}$ est colinéaire à $(-3\,;\,5)$ et non nul, donc il dirige $d_3$.

(e) $5\times(-1) + 3\times\frac{7}{3} - 2 = -5 + 7 - 2 = 0$ : les coordonnées vérifient l'équation, donc $E \in d_3$.

(f) $a = 1$ et $b = 0$, donc $(-0\,;\,1) = (0\,;\,1)$ dirige $d_4$. Comme $b = 0$, $d_4$ est la droite verticale $x = 7$, parallèle à l'axe des ordonnées.

(g) Non. Un vecteur directeur est toujours non nul :
$\det\big((0\,;\,0),(-5\,;\,3)\big) = 0\times 3 - 0\times(-5) = 0$, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs, il ne fixe donc aucune direction.

(h) $a = 1, b = 2$ : $\vec{u}\,(-2\,;\,1)$. $\overrightarrow{AB}\,(4-0\,;\,0-2) = (4\,;\,-2)$.
$\det(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = (-2)\times(-2) - 1\times 4 = 0$ : ils sont colinéaires
$(\overrightarrow{AB} = -2\vec{u})$.

**Ex. 2** ★☆☆ **Coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et déterminants**

(a) $\overrightarrow{AM}\,(x-2\,;\,y-(-3)) = (x-2\,;\,y+3)$ : arrivée moins départ.

(b) $\overrightarrow{AM}\,(x-(-4)\,;\,y-0{,}5) = (x+4\,;\,y-0{,}5)$.

(c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 3\times 4 - (-2)\times 5 = 12 + 10 = 22$.

(d) $\det(\vec{v},\vec{u}) = 5\times(-2) - 4\times 3 = -10 - 12 = -22$ : changer l'ordre change le signe
(mais pas le fait d'être nul ou non).

(e) $\overrightarrow{AM}\,(x-1\,;\,y+2)$, donc $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = (x-1)\times(-1) - (y+2)\times 4 = -x + 1 - 4y - 8 = -x - 4y - 7$.

**Ex. 2** (suite)

(f) $(-6)\times(-6) - 9\times 4 = 36 - 36 = 0$ : le déterminant est nul, les vecteurs sont colinéaires.

**Ex. 3** ★★☆ **Équation cartésienne par le déterminant**

(a) $\overrightarrow{AM}\,(x-(-2)\,;\,y-(-3)) = (x+2\,;\,y+3)$.

(b) $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = (x+2)\times 2 - (y+3)\times 5 = 2x + 4 - 5y - 15 = 2x - 5y - 11$.
$M \in d \iff 2x - 5y - 11 = 0$.

(c) $2\times(-2) - 5\times(-3) - 11 = -4 + 15 - 11 = 0$ : $A$ vérifie l'équation.

(d) $2\times 8 - 5\times 1 - 11 = 0$, donc $B \in d$. $2\times 6 - 5\times 1 - 11 = -4 \neq 0$, donc $C \notin d$.

(e) $-4x + 10y + 22 = 0$ s'obtient en multipliant $2x - 5y - 11 = 0$ par $-2$ : Inès a raison, c'est une autre équation de $d$. Pour Hugo, avec $A$ : $5\times(-2) - 2\times(-3) - 4 = -8 \neq 0$ : $A$ n'est pas sur sa droite, il a tort.

**Ex. 4** ★★☆ **L'erreur de Théo**

(a) $3\times 4 + 2\times(-1) - 14 = -4 \neq 0$ : $A$ n'est pas sur la droite de Théo, son équation est fausse. Erreur :
$y - (-1) = y + 1$, et non $y - 1$.

(b) $\overrightarrow{AM}\,(x-4\,;\,y+1)$ et $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = (x-4)\times 3 - (y+1)\times(-2) = 3x - 12 + 2y + 2 = 3x + 2y - 10$.
$d$ : $3x + 2y - 10 = 0$. Contrôle : $3\times 4 + 2\times(-1) - 10 = 0$.

(c) Non : un vecteur directeur est $(-b\,;\,a) = (-2\,;\,3)$, c'est-à-dire $\vec{u}$. $\det\big((3\,;\,2),\vec{u}\big) = 3\times 3 - 2\times(-2) = 13 \neq 0$ : $(3\,;\,2)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

(d) $G(-2\,;\,y)$ et $G \in d \iff 3\times(-2) + 2y - 10 = 0 \iff 2y = 16 \iff y = 8$ : $G(-2\,;\,8)$. Contrôle :
$\overrightarrow{AG}\,(-2-4\,;\,8-(-1)) = (-6\,;\,9)$ et $\det(\overrightarrow{AG},\vec{u}) = (-6)\times 3 - 9\times(-2) = -18 + 18 = 0$.

**Ex. 5** ★★★ **Démontrer la réciproque du théorème**

(a) Si $b \neq 0$ : $a\times 0 + b\times\left(-\frac{c}{b}\right) + c = -c + c = 0$, donc $A \in E$. Si $b = 0$ : $a$ et $b$ ne sont pas tous les deux nuls, donc $a \neq 0$, et on peut diviser par $a$ : $a\times\left(-\frac{c}{a}\right) + 0\times 0 + c = -c + c = 0$, donc $A \in E$.

**Ex. 5** **(suite)**

(b) $\vec{u} = \vec{0}$ signifierait $-b = 0$ et $a = 0$, c'est-à-dire $a$ et $b$ tous les deux nuls : c'est exclu. C'est indispensable : le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs, donc $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{0}) = 0$ pour TOUT point $M$. Il ne définit aucune direction : le vecteur nul n'est jamais un vecteur directeur.

(c) $\overrightarrow{AM}\,(x - x_A\,;\, y - y_A)$ et $\vec{u}\,(-b\,;\, a)$. $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x - x_A) \times a - (y - y_A) \times (-b) = ax - ax_A + by - by_A = ax + by - (ax_A + by_A)$. Or $A \in E$, donc $ax_A + by_A = -c$. Ainsi $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = ax + by + c$. Conclusion : $M \in E \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. $E$ est donc la droite passant par $A$ et dirigée par $\vec{u}\,(-b\,;\, a)$.

(d) $3y = 2x + 12 \iff -2x + 3y - 12 = 0 : a = -2, b = 3$, $c = -12$. Comme $b \neq 0 : A\left(0\,;\, -\frac{-12}{3}\right)$, soit $A(0\,;\, 4)$, et $\vec{u}\,(-3\,;\, -2)$. Contrôle avec $A : -2 \times 0 + 3 \times 4 - 12 = 0$.

(e) $2x = 5 \iff 2x + 0y - 5 = 0 : a = 2, b = 0, c = -5$. Comme $b = 0 : A\left(-\frac{-5}{2}\,;\, 0\right)$, soit $A\left(\frac{5}{2}\,;\, 0\right)$, et $\vec{u}\,(-0\,;\, 2) = (0\,;\, 2)$. Contrôle avec $A : 2 \times \frac{5}{2} - 5 = 0$. $E'$ est la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$, parallèle à l'axe des ordonnées
(droite verticale).

**Ex. 6** ★★★ **Trajectoire d'un drone**

(a) $\overrightarrow{AM}\,(x - (-5)\,;\, y - 3)$, soit $\overrightarrow{AM}\,(x + 5\,;\, y - 3)$. $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x + 5) \times (-2) - (y - 3) \times 4 = -2x - 10 - 4y + 12 = -2x - 4y + 2$.
Donc $d : -2x - 4y + 2 = 0$. Contrôle avec $A : -2 \times (-5) - 4 \times 3 + 2 = 10 - 12 + 2 = 0$.

(b) Oui. En multipliant $-2x - 4y + 2 = 0$ par le réel non nul $-\frac{3}{2}$, on obtient $3x + 6y - 3 = 0$ : c'est une autre équation de la même droite. Contrôle avec $A$ : $3 \times (-5) + 6 \times 3 - 3 = 0$. Une droite a une infinité d'équations cartésiennes.

(c) $B : -2 \times 7 - 4 \times (-3) + 2 = -14 + 12 + 2 = 0$, donc $B \in d$ : le drone survole la balise. $C : -2 \times 3 - 4 \times (-2) + 2 = -6 + 8 + 2 = 4 \neq 0$, donc $C \notin d$ : il ne passe pas au-dessus de l'arbre.

(d) $S \in d \iff -2t - 4 \times 4 + 2 = 0 \iff -2t - 14 = 0 \iff t = -7$. La station est en $S(-7\,;\, 4)$. Contrôle : $-2 \times (-7) - 16 + 2 = 0$.

**Ex. 6** **(suite)**

(e) $\overrightarrow{BM}\,(x - 7\,;\, y - (-3))$, soit $\overrightarrow{BM}\,(x - 7\,;\, y + 3)$. $\det(\overrightarrow{BM}, \vec{w}) = (x - 7) \times 0 - (y + 3) \times 3 = -3y - 9$. Donc $d' : -3y - 9 = 0$, c'est-à-dire $y = -3$. Ici $a = 0 : d'$ est parallèle à l'axe des abscisses (droite horizontale). Contrôle avec $B : -3 \times (-3) - 9 = 0$.

**Ex. 7** ★★★ **Vrai ou faux autour d'une même droite**

(a) Faux. Ici $a = -1$ et $b = 3$ : un vecteur directeur est $(-b\,;\, a)$, soit $\vec{u}\,(-3\,;\, -1)$. Le vecteur $(-1\,;\, 3)$ est $(a\,;\, b)$ : $\det((-1\,;\, 3), \vec{u}) = (-1) \times (-1) - 3 \times (-3) = 1 + 9 = 10 \neq 0$, ils ne sont pas colinéaires.

(b) Vrai. $\det((6\,;\, 2), \vec{u}) = 6 \times (-1) - 2 \times (-3) = -6 + 6 = 0$ : $(6\,;\, 2)$ est colinéaire à $\vec{u}\,(-3\,;\, -1)$ (c'est $-2\vec{u}$) et il n'est pas nul, donc il dirige $d$.

(c) Vrai. $-\frac{5}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + 1 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$ : les coordonnées de $E$ vérifient l'équation, donc $E \in d$.

(d) Faux. Contre-exemple : pour $k = 0$, on obtient le vecteur nul $(0\,;\, 0)$, qui n'est jamais un vecteur directeur. (Pour $k \neq 0$, c'est vrai : $3k \times (-1) - k \times (-3) = 0$ et le vecteur est non nul.)

(e) Vrai. $d_m$ est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $b = 0$, c'est-à-dire $m - 2 = 0$, soit $m = 2$ seulement. Alors $a = 2 \neq 0$ et $d_2 : 2x + 4 = 0$, c'est-à-dire $x = -2$ : c'est bien une droite verticale. Pour $m \neq 2$, $b \neq 0$ et $d_m$ n'est pas verticale.

## 2. *Équation réduite, pente et ordonnée à l'origine*

**Ex. 8** ★☆☆ **Automatismes : pente et ordonnée à l'origine**

(a) On met d'abord le terme en $x$ : $y = -2x + 3{,}5$. Le nombre devant $x$, avec son signe, est $-2$.
Donc $m = -2$ et $p = 3{,}5$.

(b) On divise tout par 2 : $y = \frac{5}{2} - \frac{6}{2}x$, soit $y = -3x + 2{,}5$. Attention : ce n'est pas $y = -6x + 2{,}5$.

(c) $3y = x - 2$, donc $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. On a $m = \frac{1}{3}$ et $p = -\frac{2}{3}$. On garde les fractions : 0,33 ne serait qu'une valeur approchée.

(d) $5x = 15$, donc $x = 3$ : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées. Elle n'a ni pente ni équation réduite.

(e) $4y = -8$, donc $y = -2$, c'est-à-dire $y = 0x - 2$. La pente est 0 et l'ordonnée à l'origine est $-2$. La droite est horizontale : elle est parallèle à l'axe des abscisses.

**Ex. 8** **(suite)**

(f) Faux. $2y = 4x - 8$ n'est pas une équation réduite. En divisant tout par 2, on retrouve $y = 2x - 4$. Une droite a plusieurs équations cartésiennes, mais une seule équation réduite.

**Ex. 9** ★☆☆ **Automatismes : pente et vecteur directeur**

(a) La droite $y = mx + p$ est dirigée par $(1\,;\,m)$. Ici, $m = -4$, donc $\vec{u}\,(1\,;\,-4)$ convient.

(b) $m = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$. Attention : ce n'est pas $\frac{4}{-6}$.

(c) La droite est dirigée par $\left(1\,;\,-\frac{3}{4}\right)$. On multiplie par 4 : $\vec{v}\,(4\,;\,-3)$ convient, et sa pente vaut bien $\frac{-3}{4}$.

(d) Ici $\alpha = 0$, et on ne peut pas diviser par 0. $\vec{t}$ est colinéaire à $(0\,;\,1)$ : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées. Elle n'a pas de pente.

(e) $P(-3\,;\,-1)$ et $Q(2\,;\,1)$, donc $\vec{u}\,(2-(-3)\,;\,1-(-1))$, soit $\vec{u}\,(5\,;\,2)$. La pente vaut $m = \frac{2}{5}$, et non $\frac{5}{2}$.

(f) Faux. La droite est dirigée par $(1\,;\,2)$. $\det\left(\vec{u},(1\,;\,2)\right) = 2\times 2 - 1\times 1 = 3 \neq 0$ : les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On peut aussi dire que la pente de $\vec{u}$ est $\frac{1}{2}$, pas 2.

**Ex. 10** ★★☆ **Une droite par un point et sa pente**

(a) $p = y_A - mx_A = 5 - (-2)\times(-3) = 5 - 6 = -1$.
Donc $d : y = -2x - 1$. Contrôle : $-2\times(-3) - 1 = 5 = y_A$.

(b) $p = -1 - \frac{2}{3}\times 6 = -1 - 4 = -5$.
Donc $d' : y = \frac{2}{3}x - 5$. Contrôle : $\frac{2}{3}\times 6 - 5 = -1 = y_B$.

(c) Contrôle de la réponse de Léa : $3\times(-2) - 2 = -8 \neq 4$, donc $C$ n'est pas sur sa droite. Léa a écrit $y_C + mx_C$ au lieu de $y_C - mx_C$. Correction : $p = 4 - 3\times(-2) = 10$, donc $y = 3x + 10$. Contrôle : $3\times(-2) + 10 = 4$.

(d) Pente nulle : $y = 0x - 3$, soit $y = -3$. C'est une droite horizontale. Parallèle à l'axe des ordonnées : $x = 4$. C'est la droite $x = 4$ qui n'a ni pente ni équation réduite.

**Ex. 11** ★★☆ **Carte d'un jeu vidéo : lire des équations réduites**

(a) $(AB)$ coupe l'axe des ordonnées en $A(0\,;\,-2)$, donc $p = -2$. De $A$ à $B(3\,;\,2)$, on avance de 3 carreaux vers la droite et on monte de $4$ : $m = \frac{4}{3}$.
Donc $(AB) : y = \frac{4}{3}x - 2$. Contrôle : $\frac{4}{3}\times 3 - 2 = 2 = y_B$.

**Ex. 11** **(suite)**

(b) De $C(-4\,;\,3)$ à $D(2\,;\,0)$, on avance de 6 vers la droite et on descend de 3 : $m = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$. La route coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,1)$, donc $p = 1$. Ainsi $(CD) : y = -\frac{1}{2}x + 1$. Contrôle : $-\frac{1}{2}\times(-4) + 1 = 3 = y_C$.

(c) $E(5\,;\,-3)$ et $F(5\,;\,2)$ ont la même abscisse 5 : la route est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = 5$. Elle n'a ni pente ni équation réduite. L'équation $y = 5$ correspondrait à une droite horizontale.

(d) $T \in (AB)$, donc $\frac{4}{3}a - 2 = 6$, soit $\frac{4}{3}a = 8$. On obtient $a = 8\times\frac{3}{4} = 6$, donc $T(6\,;\,6)$. Contrôle : $\frac{4}{3}\times 6 - 2 = 6$.

**Ex. 12** ★★★ **Trajectoires de deux drones**

(a) $\vec{w}\,(4\,;\,3)$ dirige $d$ et son abscisse 4 n'est pas nulle. La pente vaut donc $m = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}$ (et non $\frac{4}{3}$) : on divise l'ordonnée par l'abscisse.

(b) $p = y_A - mx_A = -1 - \frac{3}{4}\times(-3) = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$, donc $d : y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. Contrôle avec le point $A + \vec{w}$, soit $(1\,;\,2) : \frac{3}{4}\times 1 + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$. Le point est bien sur $d$.

(c) Axe des ordonnées : $x = 0$ donne $y = p = \frac{5}{4}$, d'où le point $\left(0\,;\,\frac{5}{4}\right)$. Axe des abscisses : $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$ donne $3x + 5 = 0$, soit $x = -\frac{5}{3}$, d'où le point $\left(-\frac{5}{3}\,;\,0\right)$.

(d) $2y - 7 = 0$ donne $y = \frac{7}{2} = 3{,}5$ : $d'$ est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses), sa pente est nulle. Pour l'intersection, on résout $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = \frac{7}{2}$, soit $3x + 5 = 14$, donc $x = 3$, puis $y = 3{,}5$. Les trajectoires se croisent en $I(3\,;\,3{,}5)$. Contrôle : $\frac{3}{4}\times 3 + \frac{5}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5$.

**Ex. 13** ★★★ **Corriger la copie de Lina**

(a) Lina a bien isolé $y$ en divisant tout par 4 : $y = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}x$. En revanche, elle a inversé la pente et l'ordonnée à l'origine. La pente est le nombre qui multiplie $x$, avec son signe. On écrit donc $y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ : $m = -\frac{5}{2}$ et $p = \frac{1}{2}$.

(b) La droite $y = mx + p$ est dirigée par $(1\,;\,m)$, pas par $(m\,;\,1)$. Le vecteur de Lina a pour pente $\frac{1}{2/5} = \frac{5}{2} \neq \frac{2}{5}$, donc il ne dirige pas $d_2$. Un bon vecteur directeur est $\vec{u}\,\left(1\,;\,\frac{2}{5}\right)$, ou $5\vec{u}\,(5\,;\,2)$, qui lui est colinéaire et a des coordonnées entières.

(c) $3x + 12 = 0$ donne bien $x = -4$. Mais une droite d'équation $x = k$ est parallèle à l'axe des ordonnées : $d_3$ n'a ni pente ni équation réduite ($-4$ est l'abscisse de tous ses points). Elle est dirigée par $(0\,;\,1)$.

**Ex. 13** **(suite)**

(d) $-5y + 10 = 0$ donne $y = \frac{-10}{-5} = 2$, c'est-à-dire $y = 0x + 2$. La droite $d_4$ est horizontale : elle a une pente nulle, $m = 0$, et $p = 2$. C'est une droite $x = k$ qui n'aurait pas de pente.

(e) La formule $p = y_B - mx_B$ est la bonne, mais Lina s'est trompée de signe : $\left(-\frac{3}{2}\right) \times (-4) = 6$ (produit de deux négatifs), donc $p = 1 - 6 = -5$ et $y = -\frac{3}{2}x - 5$. Contrôle : $-\frac{3}{2} \times (-4) - 5 = 6 - 5 = 1 = y_B$. Avec l'équation de Lina, on trouverait $6 + 7 = 13 \neq 1$.

**Ex. 14** ★★★ **Une famille de droites avec un paramètre**

(a) $d_a$ est parallèle à l'axe des ordonnées lorsque le coefficient de $y$ est nul : $a - 1 = 0$, soit $a = 1$. L'équation devient $3x + 6 = 0$, c'est-à-dire $x = -2$. Cette droite n'a ni pente ni équation réduite.

(b) Pour $a = -1$, l'équation s'écrit $3x - 2y + 6 = 0$, donc $-2y = -3x - 6$. On divise TOUT par $-2$ : $y = \frac{3}{2}x + 3$. La pente est $m = \frac{3}{2}$ et l'ordonnée à l'origine $p = 3$. Contrôle avec $(0\,;\,3)$ : $3 \times 0 - 2 \times 3 + 6 = 0$.

(c) $A \in d_a \iff 3 \times 2 + (a-1) \times (-3) + 6 = 0 \iff 15 - 3a = 0 \iff a = 5$. On obtient $d_5$ : $3x + 4y + 6 = 0$, donc $4y = -3x - 6$ et $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$. Contrôle : $-\frac{3}{4} \times 2 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$. C'est bien $y_A$.

(d) Pour $a \neq 1$ : $(a-1)y = -3x - 6$, donc $y = -\frac{3}{a-1}x - \frac{6}{a-1}$. La pente vaut $-\frac{3}{a-1}$. On veut $-\frac{3}{a-1} = -\frac{3}{5}$, soit $a - 1 = 5$, donc $a = 6$. Contrôle : $3x + 5y + 6 = 0$ donne $y = -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5}$.

(e) Le point de $d_{-1}$ d'abscisse 0 a pour ordonnée $\frac{3}{2} \times 0 + 3 = 3$, et $y = m'x + p'$ donne $p' = 3$. Le point d'abscisse 1 a pour ordonnée $\frac{3}{2} \times 1 + 3 = \frac{9}{2}$, donc $m' + p' = \frac{9}{2}$ et $m' = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$. On retrouve $m$ et $p$ : une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une seule équation réduite. Elle a en revanche une infinité d'équations cartésiennes, par exemple $-6x + 4y - 12 = 0$.

## 3. *Tracer une droite, lire une équation sur un graphique*

**Ex. 15** ★☆☆ **Lire une équation sur un graphique**

(a) La droite coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,-1)$, donc $p = -1$. En partant de ce point, 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut ramènent sur la droite : $m = \frac{2}{3}$ (déplacement vertical ÷ déplacement horizontal, et non $\frac{3}{2}$). Équation : $y = \frac{2}{3}x - 1$.

**Ex. 15** **(suite)**

(b) La droite descend, donc sa pente est négative. Elle coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,4)$, donc $p = 4$. Attention : 3 est l'abscisse du point où elle coupe l'axe des abscisses, ce n'est pas $p$. De $(0\,;\,4)$ à $(3\,;\,0)$, on avance de 3 et on descend de 4 : $m = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$ (déplacement vertical ÷ déplacement horizontal). Équation : $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

(c) Tous les points de la droite ont pour abscisse $-3$. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = -3$. Elle n'a pas de pente : quand on se déplace sur la droite, le déplacement horizontal vaut 0 et on ne peut pas diviser par 0.

(d) La droite est horizontale : de $(-4\,;\,-2)$ à $(3\,;\,-2)$, on avance de 7 et on ne monte pas. Donc $m = \frac{0}{7} = 0$. Elle coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,-2)$, donc l'équation réduite est $y = -2$.

(e) On compte en unités, pas en carreaux. La droite coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,-6)$ (3 carreaux, mais 6 unités), donc $p = -6$. De $(0\,;\,-6)$ à $(4\,;\,6)$ : $m = \frac{6-(-6)}{4-0} = \frac{12}{4} = 3$. Équation : $y = 3x - 6$.

**Ex. 16** ★★☆ **Tracer une droite à partir de son équation**

(a) Pour $x = 0$ : $y = -5$, donc on a le point $(0\,;\,-5)$. Pour $x = 4$ : $y = 2 \times 4 - 5 = 3$, donc on a le point $(4\,;\,3)$. On trace la droite passant par ces deux points.

(b) Les deux points sont trop proches (une seule unité d'écart en abscisse), et 0,6 est difficile à placer : le tracé sera imprécis. Il vaut mieux prendre une abscisse multiple de 5 : pour $x = 5$, $y = -\frac{2}{5} \times 5 + 1 = -1$. On trace donc la droite passant par $(0\,;\,1)$ et $(5\,;\,-1)$.

(c) $3y = x - 6$, donc $y = \frac{1}{3}x - 2$. Pour $x = 0$ : $(0\,;\,-2)$. Pour $x = 6$ : $y = \frac{1}{3} \times 6 - 2 = 0$, donc $(6\,;\,0)$. Contrôle dans l'équation de départ : $3 \times 0 - 6 + 6 = 0$.

(d) On a $y = -0{,}75x + 1{,}5$ : la pente est $-0{,}75$ (le nombre qui multiplie $x$) et $p = 1{,}5$. Pour $x = 0$ : $(0\,;\,1{,}5)$. Pour $x = 4$ : $y = 1{,}5 - 0{,}75 \times 4 = -1{,}5$, donc $(4\,;\,-1{,}5)$.

(e) $4x = 10$, donc $x = 2{,}5$. C'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées : elle n'a pas de point $(0\,;\,p)$. On peut prendre par exemple $(2{,}5\,;\,0)$ et $(2{,}5\,;\,3)$.

**Ex. 17** ★★☆ **Associer équations et droites**

(a) $(AB) : m = \frac{3-0}{2-(-4)} = \frac{1}{2}$. Elle coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,2)$, donc $p = 2$ (et non $-4$, qui est l'abscisse de $A$, sur l'axe des abscisses). $(CD) : m = \frac{-3-3}{2-(-1)} = -2$ (elle descend) et $p = 3 - (-2) \times (-1) = 1$. $(EF) : m = \frac{1-(-3)}{4-(-4)} = \frac{1}{2}$ et $p = 1 - \frac{1}{2} \times 4 = -1$.

(b) (1) $y = -2x + 1$. (2) $y = \frac{1}{2}x + 2$. (3) $2y = x - 2$, donc $y = \frac{1}{2}x - 1$. (4) $y = 2x + 1$.

(c) $(AB)$ : pente $\frac{1}{2}$ et $p = 2$, c'est l'équation (2). $(CD)$ : pente $-2$ et $p = 1$, c'est l'équation (1). $(EF)$ : pente $\frac{1}{2}$ et $p = -1$, c'est l'équation (3). L'intrus est (4). Malo se trompe : dans $y = 1 - 2x$, la pente est $-2$ (le nombre qui multiplie $x$, avec son signe) et 1 est l'ordonnée à l'origine. La droite (4) a une pente $2 > 0$ : elle monte, alors que $(CD)$ descend.

(d) Sur la figure, on lit environ $K(1\,;\,-0{,}5)$. Cette lecture est seulement approchée. Calcul : $-2x + 1 = \frac{1}{2}x - 1$ donne $-2{,}5x = -2$, donc $x = 0{,}8$. Puis $y = -2 \times 0{,}8 + 1 = -0{,}6$.
Donc $K(0{,}8\,;\,-0{,}6)$. Contrôle : $\frac{1}{2} \times 0{,}8 - 1 = -0{,}6$.

**Ex. 18** ★★☆ **Un laser qui sort du cadre**

(a) $A(6\,;\,1)$ et $B(8\,;\,6)$. $m = \frac{6-1}{8-6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Yanis a divisé le déplacement horizontal par le déplacement vertical. La pente se calcule dans l'autre sens : vertical ÷ horizontal.

(b) La droite coupe l'axe des ordonnées en dehors de la figure, donc on ne peut pas lire $p$. On le calcule avec $A$ : $p = y_A - mx_A = 1 - 2{,}5 \times 6 = -14$.

(c) $y = 2{,}5x - 14$. Contrôle avec $B$ : $2{,}5 \times 8 - 14 = 6 = y_B$. ✓

(d) $2{,}5 \times (-4) - 14 = -24 \neq -23$ : le point $C$ n'est pas sur la droite, donc le laser ne touche pas la cible.

(e) $T$ est sur le laser si et seulement si $2{,}5a - 14 = 11$, c'est-à-dire $2{,}5a = 25$, donc $a = 10$.

**Ex. 19** ★★★ **Graduations de 2 en 2**

(a) On compte 2 unités par carreau : $A(-6\,;\,-6)$, $B(6\,;\,2)$, $C(-2\,;\,6)$ et $D(4\,;\,-6)$.

(b) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-6)}{6-(-6)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. $(AB)$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;\,-2)$, donc $p = -2$. Équation réduite : $(AB) : y = \frac{2}{3}x - 2$. Contrôle avec $B$ : $\frac{2}{3} \times 6 - 2 = 4 - 2 = 2 = y_B$.

**Ex. 19** **(suite)**

(c) Un carreau représente 2 unités, et non 1 : un carreau sous $O$ correspond donc à l'ordonnée $-2$, d'où $p = -2$ et pas $-1$. Contrôle avec $A$ : $\frac{2}{3} \times (-6) - 2 = -4 - 2 = -6 = y_A$, donc l'équation est correcte.

(d) $m' = \frac{-6-6}{4-(-2)} = \frac{-12}{6} = -2$, puis $p' = y_C - m'x_C = 6 - (-2) \times (-2) = 6 - 4 = 2$ (on retrouve bien le point $(0\,;\,2)$, un carreau au-dessus de $O$). Équation réduite : $(CD) : y = -2x + 2$. Contrôle avec $D$ : $-2 \times 4 + 2 = -6 = y_D$. La pente est négative parce que la droite descend de gauche à droite : de $C$ à $D$, $x$ augmente de 6 et $y$ diminue de 12.

(e) Sur la figure, $I$ est entre deux graduations : on lit environ $I(1{,}5\,;\,-1)$. Calcul exact : $\frac{2}{3}x - 2 = -2x + 2 \iff \frac{8}{3}x = 4 \iff x = \frac{3}{2}$, puis $y = -2 \times \frac{3}{2} + 2 = -1$.
Donc $I\left(\frac{3}{2}\,;\,-1\right)$. Une lecture graphique est toujours approchée (en particulier entre deux graduations) : seul le calcul donne les coordonnées exactes et permet de conclure.

**Ex. 20** ★★★ **Corriger une copie, puis compléter la figure**

(a) $E(-2\,;\,6)$ et $F(2\,;\,0)$. Avec $E$ : $-\frac{2}{3} \times (-2) + 2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3} \neq 6$. $E$ ne vérifie pas l'équation de Sacha, alors qu'il est sur $(EF)$ : son équation est donc fausse.

(b) Erreur 1 : 2 est l'abscisse du point où $(EF)$ coupe l'axe des ABSCISSES (le point $F$). Or $p$ se lit sur l'axe des ordonnées. Erreur 2 : Sacha a inversé la pente, qui vaut déplacement vertical ÷ déplacement horizontal.
Calcul : $m = \frac{0-6}{2-(-2)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$ et $p = 6 - \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-2) = 6 - 3 = 3$ (la droite coupe bien l'axe des ordonnées en $(0\,;\,3)$).
Donc $(EF) : y = -\frac{3}{2}x + 3$. Contrôle avec $F$ : $-\frac{3}{2} \times 2 + 3 = 0 = y_F$.

(c) Tous les points de $(GH)$ ont pour abscisse $-4$ : $(GH) : x = -4$. C'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées ($y = -4$ serait une droite horizontale, de pente nulle). Entre $G$ et $H$, le déplacement horizontal vaut 0, et on ne peut pas diviser par 0. La droite est dirigée par $(0\,;\,1)$, qui n'a pas la forme $(1\,;\,m)$ : elle n'a ni pente ni équation réduite.

(d) $p = y_K - mx_K = -4 - \frac{2}{5} \times (-5) = -4 + 2 = -2$, donc $d : y = \frac{2}{5}x - 2$ et $d$ passe par $(0\,;\,-2)$. Pour $x = 5$ : $y = \frac{2}{5} \times 5 - 2 = 0$, d'où le point $(5\,;\,0)$, bien espacé du premier. On trace $d$ en passant par $(0\,;\,-2)$ et $(5\,;\,0)$ (elle passe aussi par $K$).

**Ex. 20** **(suite)**

(e) Sur $(GH)$, on a $x = -4$, donc $y = \frac{2}{5} \times (-4) - 2 = -\frac{8}{5} - 2 = -\frac{18}{5} = -3{,}6$. Le point d'intersection est $(-4\,;\,-3{,}6)$. Son ordonnée n'est pas entière : sur la figure, on n'en lirait qu'une valeur approchée.

**Ex. 21** ★★★ **Le plan d'un parc**

(a) $A(-5\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,3)$. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-1)}{3-(-5)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (déplacement vertical ÷ déplacement horizontal).

(b) $(AB)$ coupe l'axe des ordonnées entre 1 et 2, et pas sur un nœud du quadrillage : on lit seulement environ 1,5. Calcul : $p = y_B - m x_B = 3 - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$. Donc $(AB) : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Contrôle avec $A$ : $\frac{1}{2} \times (-5) + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1 = y_A$.

(c) $4y = 20 - 3x \iff y = -\frac{3}{4}x + 5$ : la pente vaut $-\frac{3}{4}$ (le nombre devant $x$) et $p = 5$. Points : pour $x = 0$, $y = 5$, d'où $(0\,;\,5)$ ; pour $x = 4$, $y = -\frac{3}{4} \times 4 + 5 = 2$, d'où $(4\,;\,2)$. On trace $\Delta$ en passant par ces deux points (elle descend, car sa pente est négative).

(d) Test de $B(3\,;\,3)$ sur $\Delta$ : $4 \times 3 = 12$, alors que $20 - 3 \times 3 = 11$. Comme $12 \neq 11$, $B \notin \Delta$ et Lina se trompe : sa lecture n'est qu'approchée. Calcul : $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}x + 5 \iff \frac{5}{4}x = \frac{7}{2} \iff x = \frac{14}{5}$, puis $y = \frac{1}{2} \times \frac{14}{5} + \frac{3}{2} = \frac{7}{5} + \frac{3}{2} = \frac{29}{10}$. Les chemins se croisent au point $\left(\frac{14}{5}\,;\,\frac{29}{10}\right) = (2{,}8\,;\,2{,}9)$, tout près de $B$ mais différent de $B$. Contrôle sur $\Delta$ : $-\frac{3}{4} \times \frac{14}{5} + 5 = -2{,}1 + 5 = 2{,}9$.

(e) $K \in (AB) \iff \frac{1}{2}a + \frac{3}{2} = 5 \iff \frac{1}{2}a = \frac{7}{2} \iff a = 7$. Donc $K(7\,;\,5)$. Contrôle : $\frac{1}{2} \times 7 + \frac{3}{2} = 5$.

## 4. *Droite passant par deux points*

**Ex. 22** ★☆☆ **Automatismes — pente de la droite (AB)**

(a) $m = \frac{11-(-1)}{5-2} = \frac{12}{3} = 4$.

(b) $m = \frac{-5-5}{2-(-3)} = \frac{-10}{5} = -2$.

(c) $m = \frac{7-(-5)}{5-(-1)} = \frac{12}{6} = 2$. Attention : $7 - (-5) = 12$.

(d) $m = \frac{6-1}{1-(-2)} = \frac{5}{3}$. C'est la valeur exacte : on n'écrit pas 1,67.

(e) $x_A = x_B = 3$ : on ne peut pas diviser par $x_B - x_A = 0$, donc il n'y a pas de pente. La droite $(AB)$ est parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = 3$.

(f) $m = \frac{2-2}{1-(-6)} = \frac{0}{7} = 0$ : la droite $(AB)$ est horizontale.

(g) $m = \frac{4-1}{2-0{,}5} = \frac{3}{1{,}5} = 2$.

**Ex. 23** ★☆☆ **Automatismes — équation de la droite (AB)**

(a) $m = \frac{6-(-4)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$, puis $p = -4 - 5 \times 1 = -9$. Donc $(AB) : y = 5x - 9$. Contrôle avec $B$ : $5 \times 3 - 9 = 6$.

(b) $m = \frac{1-5}{1-(-4)} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$, puis $p = 5 - \left(-\frac{4}{5}\right) \times (-4) = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$. Donc $(AB) : y = -\frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$. Contrôle avec $B$ : $-\frac{4}{5} \times 1 + \frac{9}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

(c) $m = \frac{1-(-7)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$, puis $p = -7 - 2 \times (-1) = -7 + 2 = -5$. Donc $(AB) : y = 2x - 5$. Contrôle avec $B$ : $2 \times 3 - 5 = 1$.

(d) $x_A = x_B = -2$ : la droite $(AB)$ n'a pas de pente. Elle a pour équation $x = -2$.

(e) $m = \frac{-3-(-3)}{7-1} = 0$ et $p = -3 - 0 \times 1 = -3$. Donc $(AB) : y = -3$ (droite horizontale). Contrôle : $B$ a bien pour ordonnée $-3$.

(f) $m = \frac{-5-4}{3-0} = \frac{-9}{3} = -3$, et $p = 4 - (-3) \times 0 = 4$ ($A$ est sur l'axe des ordonnées). Donc $(AB) : y = -3x + 4$. Contrôle avec $B$ : $-3 \times 3 + 4 = -5$.

**Ex. 24** ★★☆ **Par le déterminant, et l'erreur de Lina**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(3 - (-3)\,;\,-3 - 1)$, donc $\overrightarrow{AB}\,(6\,;\,-4)$.

(b) $\overrightarrow{AM}\,(x + 3\,;\,y - 1)$. Donc $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (x+3) \times (-4) - (y-1) \times 6 = -4x - 12 - 6y + 6 = -4x - 6y - 6$. Or $M \in (AB) \iff -4x - 6y - 6 = 0$. On divise par $-2$ : $(AB) : 2x + 3y + 3 = 0$.

(c) $3y = -2x - 3$, donc $y = -\frac{2}{3}x - 1$. Contrôle avec $A$ : $-\frac{2}{3} \times (-3) - 1 = 2 - 1 = 1$. Contrôle avec $B$ : $-\frac{2}{3} \times 3 - 1 = -3$.

(d) Lina a inversé la fraction : en haut, c'est la différence des ordonnées $y_B - y_A$, en bas celle des abscisses $x_B - x_A$. Elle a calculé l'inverse de la pente. Le bon calcul : $m = \frac{-3-1}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$. On retrouve bien la pente de la question précédente.

(e) On remplace les coordonnées de $C$ dans l'équation : $2 \times (-6) + 3 \times 2 + 3 = -12 + 6 + 3 = -3 \neq 0$. Donc $C \notin (AB)$ : les points $A$, $B$, $C$ ne sont pas alignés.

**Ex. 25** ★★☆ **Python : pente et ordonnée à l'origine**

(a) $m = \frac{-4-4}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$, puis $p = 4 - (-2) \times (-1) = 4 - 2 = 2$. Le programme affiche (-2.0, 2.0).
Donc $(AB) : y = -2x + 2$. Contrôle avec $B$ : $-2 \times 3 + 2 = -4$.

(b) $m = \frac{3-1}{3-0} = \frac{2}{3}$ : 0.6666666666666666 n'est qu'une valeur approchée. Et $p = 1$. La droite a pour équation $y = \frac{2}{3}x + 1$.

(c) Ici $x_B - x_A = 2 - 2 = 0$ : Python doit diviser par zéro et s'arrête sur une erreur (ZeroDivisionError). En effet, la droite $(CD)$ n'a pas de pente : elle est parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = 2$.

(d) Programme complet :

```
def droite(xa, ya, xb, yb):
    if xa == xb:
        return "x = " + str(xa)
    m = (yb - ya) / (xb - xa)
    p = ya - m * xa
    return m, p
```

Avec droite(2, 1, 2, 5), il renvoie maintenant « x = 2 ».

**Ex. 26** ★★★ **Démontrer la formule de la pente, puis l'appliquer**

(a) Comme $x_A \neq x_B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$ a une première coordonnée non nulle : il n'est pas colinéaire à $\vec{j}\,(0\,;\,1)$. La droite $(AB)$ n'est donc pas parallèle à l'axe des ordonnées, et d'après le cours elle a une équation réduite $y = mx + p$. Comme $A \in (AB)$ : $y_A = mx_A + p$. Comme $B \in (AB)$ : $y_B = mx_B + p$.

(b) On soustrait : $y_B - y_A = mx_B + p - mx_A - p = m(x_B - x_A)$. Comme $x_A \neq x_B$, on a $x_B - x_A \neq 0$ : on peut diviser par $x_B - x_A$, d'où $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. La première égalité donne ensuite $p = y_A - mx_A$.

(c) $A$ et $B$ sont distincts et ont la même abscisse : leurs ordonnées sont donc forcément différentes, $y_A \neq y_B$. On a $\overrightarrow{AB}\,(0\,;\,y_B - y_A)$ et $\overrightarrow{AM}\,(x - x_A\,;\,y - y_A)$.
Donc $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A) \times 0 = (x - x_A)(y_B - y_A)$. Comme $y_B - y_A \neq 0$, ce produit est nul si et seulement si $x = x_A$.
Donc $(AB)$ a pour équation $x = x_A$.

(d) Ici $x_A \neq x_B$. $m = \frac{-6-4}{1-(-3)} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$ (fraction irréductible). $p = 4 - \left(-\frac{5}{2}\right) \times (-3) = 4 - \frac{15}{2} = -\frac{7}{2}$.
Donc $(AB) : y = -\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$. Contrôle avec $B$ : $-\frac{5}{2} \times 1 - \frac{7}{2} = -\frac{12}{2} = -6 = y_B$.

**Ex. 26** **(suite)**

(e) Les abscisses de $E$ et de $F$ sont égales (2,5), donc $x_F - x_E = 0$ : on ne peut pas diviser par 0, et la droite $(EF)$ n'a pas de pente. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = 2{,}5$.

**Ex. 27** ★★★ **Le laser de la tour : erreur de Théo et alignements**

(a) En haut, Théo calcule $y_B - y_A$ ; en bas, il calcule $x_A - x_B$ : il n'a pas soustrait dans le même ordre, ce qui change le signe. Correction : $m = \frac{1-(-5)}{5-(-3)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

(b) $p = -5 - \frac{3}{4} \times (-3) = -5 + \frac{9}{4} = -\frac{11}{4}$.
Donc $(AB) : y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$. Contrôle avec $B$ : $\frac{3}{4} \times 5 - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} - \frac{11}{4} = \frac{4}{4} = 1 = y_B$.

(c) $\frac{3}{4} \times (-7) - \frac{11}{4} = -\frac{21}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{32}{4} = -8 = y_C$. Les coordonnées de $C$ vérifient l'équation, donc $C \in (AB)$ : les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

(d) Critère : comme $x_A \neq x_B$ et $x_A \neq x_D$, $A$, $B$ et $D$ sont alignés si et seulement si $(AB)$ et $(AD)$ ont la même pente. $m_{AB} = \frac{3}{4}$ et $m_{AD} = \frac{-1-(-5)}{1-(-3)} = \frac{4}{4} = 1$. Comme $1 \neq \frac{3}{4}$, les points $A$, $B$ et $D$ ne sont pas alignés.

(e) $E \in (AB) \iff b = \frac{3}{4} \times 3 - \frac{11}{4} = \frac{9}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.
Donc $b = -\dfrac{1}{2}$.

**Ex. 28** ★★★ **Le robot tondeuse et la clôture**

(a) $x_P \neq x_Q$. $m = \frac{-2{,}5-6{,}5}{4-(-2)} = \frac{-9}{6} = -1{,}5$. $p = 6{,}5 - (-1{,}5) \times (-2) = 6{,}5 - 3 = 3{,}5$.
Donc $(PQ) : y = -1{,}5x + 3{,}5$. Contrôle avec $Q$ : $-1{,}5 \times 4 + 3{,}5 = -6 + 3{,}5 = -2{,}5 = y_Q$.

(b) Vrai. $3x + 2y - 7 = 0 \iff 2y = -3x + 7 \iff y = -1{,}5x + 3{,}5$ : c'est l'équation réduite de $(PQ)$. On peut aussi vérifier avec deux points : $3 \times (-2) + 2 \times 6{,}5 - 7 = -6 + 13 - 7 = 0$ et $3 \times 4 + 2 \times (-2{,}5) - 7 = 12 - 5 - 7 = 0$. Une seule droite passe par deux points distincts : c'est donc $(PQ)$.

(c) $R$ et $S$ ont la même abscisse ($x_R = x_S = 3$) : on aurait $x_S - x_R = 0$ au dénominateur, donc pas de pente. La droite $(RS)$ est parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = 3$.

(d) Sur la clôture, $x = 3$. Le point est aussi sur $(PQ)$, donc $y = -1{,}5 \times 3 + 3{,}5 = -4{,}5 + 3{,}5 = -1$. Le robot rencontre la clôture au point $(3\,;\,-1)$.

(e) Sur le chemin, $y = 0$ : $-1{,}5x + 3{,}5 = 0 \iff 1{,}5x = 3{,}5 \iff x = \frac{3{,}5}{1{,}5} = \frac{7}{3}$. Le robot traverse le chemin au point $\left(\frac{7}{3}\,;\,0\right)$
(valeur exacte, et non 2,33).

## 5. *Un point appartient-il à la droite ? Alignement*

**Ex. 29** ★☆☆ **Le point est-il sur la droite ?**

(a) $3y = 3 \times (-1) = -3$ et $2x - 9 = 2 \times 3 - 9 = -3$. Les deux membres sont égaux : $A \in d$.

(b) $3y = 3 \times 0 = 0$ et $2x - 9 = 2 \times 4{,}5 - 9 = 0$. Égaux : $D \in d$.

(c) Lucas a échangé les coordonnées : l'abscisse $-1$ remplace $x$ et l'ordonnée 3 remplace $y$. $3y = 3 \times 3 = 9$ et $2x - 9 = 2 \times (-1) - 9 = -11$. Comme $9 \neq -11$ : $B \notin d$.

(d) $3y = 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -7$ et $2x - 9 = 2 \times 1 - 9 = -7$. Égaux : $G \in d$.

(e) $3y = 3 \times (-4) = -12$ et $2x - 9 = 2 \times (-3) - 9 = -15$. Comme $-12 \neq -15$ : $H \notin d$.

(f) Faux. $3y = 3 \times 1{,}1 = 3{,}3$ et $2x - 9 = 2 \times 6 - 9 = 3$. Comme $3{,}3 \neq 3$ : $E \notin d$. L'écart de 0,1 ne se voit pas sur un dessin : seul le calcul permet de conclure.

**Ex. 30** ★☆☆ **À rebours : la coordonnée manquante**

(a) $C \in (AB) \iff 4 = -3a + 2 \iff -3a = 2 \iff a = -\frac{2}{3}$. Contrôle : $-3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 2 + 2 = 4$.

(b) $0 = 0{,}4a - 2 \iff 0{,}4a = 2 \iff a = \frac{2}{0{,}4} = 5$.

(c) La droite $y = 4$ est horizontale : tous ses points ont pour ordonnée 4, quelle que soit l'abscisse.
Donc $b = 4$.

(d) La droite $x = -2$ est parallèle à l'axe des ordonnées : tous ses points ont pour abscisse $-2$, quelle que soit l'ordonnée.
Donc $a = -2$.

(e) $-2a + 5 \times 2 - 4 = 0 \iff -2a + 6 = 0 \iff a = 3$.

(f) $4b = 2 - 3 \times (-2) \iff 4b = 8 \iff b = 2$. Contrôle : $4 \times 2 = 8$ et $2 - 3 \times (-2) = 2 + 6 = 8$.

**Ex. 31** ★★☆ **Alignés ou non ? Plusieurs méthodes**

(a) $x_A \neq x_B$. $m = \frac{5-(-1)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = 1{,}5$, puis $p = -1 - 1{,}5 \times (-2) = -1 + 3 = 2$.
Donc $(AB) : y = 1{,}5x + 2$. Contrôle avec $B$ : $1{,}5 \times 2 + 2 = 5 = y_B$.

(b) $1{,}5 \times 4 + 2 = 8 = y_C$ : les coordonnées de $C$ vérifient l'équation, donc $C \in (AB)$ et les points $A$, $B$, $C$ sont alignés.

(c) $m_{AB} = 1{,}5$ et $m_{AC} = \frac{8-(-1)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = 1{,}5$. Même pente à partir de $A$ : $A$, $B$, $C$ sont alignés.

**Ex. 31** (suite)

(d) $\overrightarrow{AB}\,(4\,;\,6)$ et $\overrightarrow{AC}\,(6\,;\,9)$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \times 9 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$. Le déterminant est nul : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc $A$, $B$, $C$ sont alignés.

(e) Non : $x_D = x_A = -2$, donc $x_D - x_A = 0$ et on ne peut pas diviser par 0. La droite $(AD)$ est parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = -2$. $\overrightarrow{AB}\,(4\,;\,6)$ et $\overrightarrow{AD}\,(0\,;\,5)$ : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 4 \times 5 - 6 \times 0 = 20 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : $A$, $B$, $D$ ne sont pas alignés.

**Ex. 32** ★★☆ **Python : tester un alignement**

(a) On code le déterminant avec des produits en croix :

```
def alignes(xa, ya, xb, yb, xc, yc):
    d = (xb - xa) * (yc - ya) - (yb - ya) * (xc - xa)
    return d == 0
```

(b) $\overrightarrow{AB}\,(4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(10\,;\,5)$ : $d = 4 \times 5 - 2 \times 10 = 0$.
L'appel renvoie `True` : les points sont alignés.

(c) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{AC}\,(0\,;\,5)$ : $d = 2 \times 5 - 3 \times 0 = 10 \neq 0$.
L'appel renvoie `False` : les points ne sont pas alignés.

(d) Ici $x_C = x_A = 1$, donc `xc - xa` vaut 0 : Python s'arrête sur une erreur de division par zéro (`ZeroDivisionError`). Le test `d == 0` ne fait aucune division. Avec des coordonnées entières, il ne calcule que des entiers, donc des valeurs exactes. Les quotients, eux, sont des flottants arrondis, et deux pentes égales peuvent paraître différentes.

**Ex. 33** ★★★ **Démontrer puis utiliser le critère des pentes**

(a) « … leur ordonnée à l'origine vaut $p = y_A - mx_A$ dans les deux cas. Elles ont la même équation réduite $y = mx + p$, elles sont confondues, donc $C \in (AB)$. »
Avec la propriété admise, $A$, $B$, $C$ sont alignés.

(b) « … donc $(AC) = (AB)$, car une seule droite passe par deux points distincts. Les deux droites sont les mêmes, elles ont donc la même pente : $m_{AC} = m_{AB}$. »

(c) $m_{AB} = \frac{4-2}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $m_{AC} = \frac{\frac{1}{2}-2}{-6-(-3)} = \frac{-\frac{3}{2}}{-3} = \frac{1}{2}$. On a $x_A \neq x_B$, $x_A \neq x_C$ et $m_{AB} = m_{AC}$ : les droites $(AB)$ et $(AC)$ ont la même pente, donc $A$, $B$, $C$ sont alignés.

**Ex. 33 (suite)**

(d) $x_D = x_A = -3$, donc $x_D - x_A = 0$ : la pente de $(AD)$ demanderait une division par 0. La droite $(AD)$ est verticale, d'équation $x = -3$. Autre méthode, avec $(AB)$ : $m = \frac{1}{2}$ et $p = 2 - \frac{1}{2} \times (-3) = \frac{7}{2}$, donc $(AB)$ : $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. Pour $D$ : $\frac{1}{2} \times (-3) + \frac{7}{2} = 2$ et $y_D = -1$. Comme $2 \neq -1$, $D \notin (AB)$ : $A$, $B$, $D$ ne sont pas alignés. (On peut aussi dire que $x_B = 1 \neq -3$, donc $B \notin (AD)$.)

**Ex. 34 ★★★ Jeu vidéo : le laser touche-t-il les cibles ?**

(a) $x_L \neq x_M$. $m = \frac{1-(-3)}{2-(-4)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, puis $p = -3 - \frac{2}{3} \times (-4) = -3 + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$.
Donc $(LM)$ : $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Contrôle avec $M$ : $\frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 = y_M$.

(b) $\frac{2}{3} \times 5 - \frac{1}{3} = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 3$ et $y_T = 3$ : les coordonnées de $T$ vérifient l'équation, donc $T \in (LM)$ et la cible est touchée.

(c) Membre de droite : $\frac{2}{3} \times (-1) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1$. Membre de gauche : $y = -0{,}9$. Comme $-0{,}9 \neq -1$, $T_2 \notin (LM)$ : la cible n'est pas touchée. Il manque 0,1, ce qu'on ne voit pas à l'écran : seul le calcul permet de conclure.

(d) Yanis a remplacé $x$ par l'ordonnée 2 et comparé le résultat à l'abscisse 1 : il a inversé les coordonnées. Il faut remplacer $x$ par l'abscisse 1 : $\frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, puis comparer avec $y_P = 2$. Comme $\frac{1}{3} \neq 2$, $P \notin (LM)$ : la cible n'est pas touchée.

(e) $K \in (LM) \iff 2a = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3} \iff \frac{4}{3}a = -\frac{1}{3} \iff a = -\frac{1}{4}$.
Donc $K\left(-\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$. Contrôle : $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{2}$.

**Ex. 35 ★★★ Plan d'une ville : la ligne de tram**

(a) $\overrightarrow{AM}\,(x+2\,;\,y-5)$ et $\overrightarrow{AB}\,(4-(-2)\,;\,-4-5)$, soit $\overrightarrow{AB}\,(6\,;\,-9)$. $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (x+2) \times (-9) - (y-5) \times 6 = -9x - 18 - 6y + 30 = -9x - 6y + 12$. $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \iff -9x - 6y + 12 = 0$. Contrôle avec $B$ : $-9 \times 4 - 6 \times (-4) + 12 = -36 + 24 + 12 = 0$.

**Ex. 35 (suite)**

(b) Faux. En divisant $-9x - 6y + 12 = 0$ par $-3$, on obtient $3x + 2y - 4 = 0$. L'équation de Hugo est celle-ci multipliée par 2 : $6x + 4y - 8 = 2(3x + 2y - 4)$. Et $y = -1{,}5x + 2 \iff 2y = -3x + 4 \iff 3x + 2y - 4 = 0$. Les trois équations décrivent la même droite : une droite a plusieurs équations cartésiennes. Contrôle de l'équation de Lina avec $A$ : $-1{,}5 \times (-2) + 2 = 5 = y_A$.

(c) $\overrightarrow{AB}\,(6\,;\,-9)$ et $\overrightarrow{AC}\,(0{,}8+2\,;\,0{,}8-5)$, soit $\overrightarrow{AC}\,(2{,}8\,;\,-4{,}2)$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 6 \times (-4{,}2) - (-9) \times 2{,}8 = -25{,}2 + 25{,}2 = 0$. Le déterminant est nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et $A$, $B$, $C$ sont alignés.

(d) Le pont est sur $(AB)$ et sur l'axe des abscisses, donc $y = 0$. On obtient $3x + 2 \times 0 - 4 = 0$, donc $x = \frac{4}{3}$. Le pont est au point $\left(\frac{4}{3}\,;\,0\right)$. Distance à l'origine : $\frac{4}{3} \times 100 \approx 133$ m.

## 6. Droites parallèles ou sécantes

**Ex. 36 ★☆☆ Comparer pentes et ordonnées à l'origine**

(a) $m = m' = 3$ et $p = -4 \neq p' = 1$ : les droites sont strictement parallèles.

(b) $\frac{4}{7} \neq 0{,}57$ car $\frac{4}{7} - 0{,}57 = \frac{400-399}{700} = \frac{1}{700} \neq 0$. Les pentes sont différentes : les droites sont sécantes (en $(0\,;\,3)$), même si elles sont presque parallèles.

(c) On développe : $2(x-3) = 2x - 6$.
Donc $m = m' = 2$ et $p = p' = -6$ : les droites sont confondues. Ce sont deux écritures de la même droite.

(d) Les deux droites sont horizontales : $m = m' = 0$ et $p = 5 \neq p' = -2$. Elles sont strictement parallèles.

(e) Deux droites verticales sont parallèles. Ici $-3 \neq 4$ : elles sont strictement parallèles.

(f) $d_1$ est verticale et $d_2$ ne l'est pas : elles sont sécantes. Pour $x = 2$, $y = -2 + 2 = 0$ : elles se coupent en $(2\,;\,0)$.

(g) Même ordonnée à l'origine, mais $m = -4 \neq m' = 4$ : les droites sont sécantes (en $(0\,;\,1)$). Avoir le même $p$ ne suffit pas pour être parallèles.

**Ex. 37** ★☆☆ **Critère avec des équations cartésiennes**

(a) $ab' - a'b = 3 \times 2 - (-1) \times (-6) = 6 - 6 = 0$ : $d \parallel d'$. Les coefficients sont proportionnels, pas besoin d'équation réduite. Le point $(1\,;\,-2)$ est sur $d'$ ($-1 - 4 + 5 = 0$) mais pas sur $d$ : $3 \times 1 - 6 \times (-2) + 3 = 18 \neq 0$. Les droites sont strictement parallèles.

(b) Tom a calculé $aa' - bb'$ : ce n'est pas le critère. Le bon calcul est $ab' - a'b = 2 \times 2 - 5 \times 5 = 4 - 25 = -21 \neq 0$ : les droites sont sécantes.

(c) On écrit $d'$ : $8x - 2y + 6 = 0$. $ab' - a'b = 4 \times (-2) - 8 \times (-1) = -8 + 8 = 0$ : elles sont parallèles. $(0\,;\,3)$ est sur $d$ ($0 - 3 + 3 = 0$) et sur $d'$ ($2 \times 3 = 6 = 8 \times 0 + 6$) : les droites sont confondues.

(d) $ab' - a'b = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$ : elles sont parallèles (toutes deux verticales). $(3\,;\,0) \in d$ mais $2 \times 3 - 7 = -1 \neq 0$ : $(3\,;\,0) \notin d'$. Les droites sont strictement parallèles ($x = 3$ et $x = 3{,}5$).

(e) $a = 0$, $b = 1$, $a' = 3$, $b' = 0{,}5$ : $ab' - a'b = 0 \times 0{,}5 - 3 \times 1 = -3 \neq 0$. Les droites sont sécantes.

**Ex. 38** ★★☆ **Rues parallèles sur un plan**

(a) On garde la pente $m = -\frac{2}{3}$. $p = y_F - mx_F = -1 - \left(-\frac{2}{3}\right) \times 3 = -1 + 2 = 1$. La rue a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 1$. Contrôle : $-\frac{2}{3} \times 3 + 1 = -1$.

(b) On multiplie par 3 : $3y = -2x + 12$, soit $2x + 3y - 12 = 0$. Contrôle avec $(6\,;\,0)$ : $12 + 0 - 12 = 0$.

(c) $a = 2$, $b = 3$, $a' = 4$, $b' = k$. $d_k \parallel d \iff ab' - a'b = 0 \iff 2k - 4 \times 3 = 0 \iff k = 6$.

(d) $d_6$ : $4x + 6y - 24 = 0$. $(0\,;\,4) \in d$ (ordonnée à l'origine). $4 \times 0 + 6 \times 4 - 24 = 0$ : $(0\,;\,4) \in d_6$. Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont confondues. D'ailleurs $4x + 6y - 24 = 2(2x + 3y - 12)$.

(e) La droite $x = 3$ est verticale et $d$ ne l'est pas : elles sont sécantes. Pour $x = 3$ : $y = -\frac{2}{3} \times 3 + 4 = 2$. Le point commun est $(3\,;\,2)$.

**Ex. 39** ★★☆ **L'enclos du jeu vidéo**

(a) $m_{AB} = \frac{-1-2}{1-(-5)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ et $m_{DC} = \frac{2-5}{4-(-2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

(b) $m_{AD} = \frac{5-2}{-2-(-5)} = \frac{3}{3} = 1$ et $m_{BC} = \frac{2-(-1)}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$. $(DC)$ : $y = -\frac{1}{2}x + p$ avec $p = 5 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) = 4$. Pour $x = -5$ : $-\frac{1}{2} \times (-5) + 4 = 6{,}5 \neq 2$, donc $A \notin (DC)$ et $(AB)$, $(DC)$ sont strictement parallèles. De même $(AD) \parallel (BC)$. Les côtés opposés sont parallèles deux à deux : $ABCD$ est un parallélogramme.

**Ex. 39** (suite)

(c) $m_{D'C} = \frac{2-3}{4-2} = -\frac{1}{2} = m_{AB}$. Et $(D'C)$ est la droite $(DC)$ (même pente, passe par $C$), donc $A \notin (D'C)$ : $(AB)$ et $(D'C)$ sont strictement parallèles. $m_{AD'} = \frac{3-2}{2-(-5)} = \frac{1}{7} \neq 1 = m_{BC}$ : $(AD')$ et $(BC)$ sont sécantes. $ABCD'$ est un trapèze de côtés parallèles $[AB]$ et $[D'C]$.

(d) $(AD')$ a pour pente $\frac{1}{7}$ et $p = 2 - \frac{1}{7} \times (-5) = 2 + \frac{5}{7} = \frac{19}{7}$ : $y = \frac{1}{7}x + \frac{19}{7}$. Contrôle avec $D'$ : $\frac{1}{7} \times 2 + \frac{19}{7} = \frac{21}{7} = 3$. Elle coupe l'axe des ordonnées pour $x = 0$ : le portail est en $\left(0\,;\,\frac{19}{7}\right)$.

**Ex. 40** ★★★ **Du critère au réel k**

(a) $d$ est dirigée par $\vec{u}\,(-b\,;\,a)$ et $d'$ par $\vec{u'}\,(-b'\,;\,a')$. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, c'est-à-dire si $\det(\vec{u}, \vec{u'}) = (-b) \times a' - a \times (-b') = ab' - a'b = 0$.

(b) Lou a oublié le signe de $a' = -6$ : $a'b = (-6) \times k$. Le bon calcul est $ab' - a'b = 3 \times 4 - (-6) \times k = 12 + 6k$. Il est nul si et seulement si $6k = -12$, soit $k = -2$. Avec $k = 2$, on trouve $3 \times 4 - (-6) \times 2 = 24 \neq 0$.

(c) Avec $k = -2$, $d_{-2}$ : $3x - 2y - 1 = 0$. Le point $(1\,;\,1)$ est sur $d_{-2}$ car $3 \times 1 - 2 \times 1 - 1 = 0$. Dans l'équation de $\Delta$ : $-6 \times 1 + 4 \times 1 + 5 = 3 \neq 0$, donc ce point n'est pas sur $\Delta$. Les droites sont parallèles et ont un point qui n'est pas commun : elles sont strictement parallèles.

(d) $(1\,;\,1)$ est sur $d_{-2}$. Il doit donc vérifier $-6 \times 1 + 4 \times 1 + c = 0$, soit $c = 2$. Contrôle : $-2 \times (3x - 2y - 1) = -6x + 4y + 2$, c'est donc bien la même droite.

(e) Vrai. $ab' - a'b = 12 + 6k$ est non nul dès que $k \neq -2$ : les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc les droites sont sécantes. Pour $k = 0$, $d_0$ : $3x - 1 = 0$ est la droite verticale $x = \frac{1}{3}$ et $\Delta$ n'est pas verticale ($b' = 4 \neq 0$) : elles sont bien sécantes ($12 + 6 \times 0 = 12 \neq 0$).

**Ex. 41** ★★★ **La pelouse du parc**

(a) $m_{(AB)} = \frac{1-(-2)}{6-(-3)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ et $m_{(DC)} = \frac{4-2}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Les deux droites ont la même pente, donc $(AB) \parallel (DC)$.

(b) $x_A = x_D = -3$ : la droite $(AD)$ est verticale, d'équation $x = -3$. Pour $(BC)$, $m = \frac{4-1}{3-6} = \frac{3}{-3} = -1$ : cette droite n'est pas verticale. Une droite verticale et une droite non verticale sont sécantes. $ABCD$ a donc deux côtés opposés parallèles, $[AB]$ et $[DC]$, et deux côtés opposés non parallèles : c'est un trapèze, mais pas un parallélogramme.

**Ex. 41** **(suite)**

(c) $m = \frac{1}{3}$ et $p = y_A - mx_A = -2 - \frac{1}{3} \times (-3) = -2 + 1 = -1$, donc $(AB) : y = \frac{1}{3}x - 1$. Contrôle avec $B$ : $\frac{1}{3} \times 6 - 1 = 1 = y_B$.

(d) Non. $0{,}33 = \frac{33}{100}$ et $\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{100-99}{300} = \frac{1}{300} \neq 0$. Les pentes sont différentes, donc $\Delta$ et $(AB)$ sont sécantes, même si elles paraissent parallèles sur le plan.

(e) On résout $\frac{1}{3}x - 1 = 0{,}33x + 3$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{3} - 0{,}33\right) x = 4$, soit $\frac{1}{300}x = 4$, donc $x = 1200$. Alors $y = \frac{1}{3} \times 1200 - 1 = 399$. Contrôle : $0{,}33 \times 1200 + 3 = 396 + 3 = 399$. Le point d'intersection est $(1200\,;\,399)$, à environ 12 km du parc !

**Ex. 42** ★★★ **Les rails de l'entrepôt**

(a) $2y = 6 - 4x \iff 4x + 2y - 6 = 0$. Pour $E$ : $4 \times 1 + 2 \times 1 - 6 = 0$, donc $E \in d_1$.

(b) Le premier test calcule $ab' - a'b$ et le second teste si le point de $d$ est sur $d'$ :

```
def position(a, b, c, a2, b2, c2, x0, y0):
    # (x0 ; y0) est un point de d
    if a * b2 - a2 * b != 0:
        return "secantes"
    if a2 * x0 + b2 * y0 + c2 == 0:
        return "confondues"
    return "strictement paralleles"
```

Les coefficients sont entiers, donc le test d'égalité est exact.

(c) $4 \times (-3) - (-6) \times 2 = -12 + 12 = 0$ : les droites sont parallèles. Puis $-6 \times 1 - 3 \times 1 + 9 = 0$ : $E$ est aussi sur $d_2$. La fonction renvoie « confondues ». Les deux équations sont différentes, mais $d_2$ est la même droite que $d_1$ : on a d'ailleurs $-6x - 3y + 9 = -\frac{3}{2}(4x + 2y - 6)$.

(d) Le calcul $ab' - a'b = 4 \times 1 - 2 \times 2 = 0$ prouve seulement que $d_1 \parallel d_3$. On teste $E \in d_1$ dans $d_3$ : $2 \times 1 + 1 + 5 = 8 \neq 0$.
Donc $E \notin d_3$ : les rails sont strictement parallèles, et position(4, 2, -6, 2, 1, 5, 1, 1) renvoie « strictement paralleles ».

(e) On garde $a = 4$ et $b = 2$ : le rail a une équation $4x + 2y + c = 0$. $B$ est dessus, donc $4 \times (-2) + 2 \times 3 + c = 0$, soit $-2 + c = 0$ et $c = 2$. Le rail a pour équation $4x + 2y + 2 = 0$ (ou $2x + y + 1 = 0$).

## 7. *Point d'intersection de deux droites sécantes*

**Ex. 43** ★☆☆ **Point d'intersection exact**

(a) Pentes $3 \neq -1$ : les droites sont sécantes. $3x - 4 = -x + 8 \iff 4x = 12 \iff x = 3$. Puis $y = 3 \times 3 - 4 = 5$ ; contrôle : $-3 + 8 = 5$. Le point d'intersection est $(3\,;\,5)$.

(b) Pentes $-2 \neq 0{,}5$ : sécantes. $-2x + 1 = 0{,}5x - 4 \iff -2{,}5x = -5 \iff x = 2$. Puis $y = -2 \times 2 + 1 = -3$ ; contrôle : $0{,}5 \times 2 - 4 = -3$. Le point d'intersection est $(2\,;\,-3)$.

(c) Pentes $0 \neq -3$ : sécantes. $-3x + 2 = 5 \iff -3x = 3 \iff x = -1$. Avec $d$, $y = 5$ ; contrôle : $-3 \times (-1) + 2 = 5$. Le point d'intersection est $(-1\,;\,5)$.

(d) Pentes $2 = 2$ et ordonnées à l'origine $7 \neq -1$ : les droites sont strictement parallèles. L'équation $2x + 7 = 2x - 1$ donne $7 = -1$, ce qui est impossible : il n'y a aucun point d'intersection.

(e) Sur la figure, on lit environ $(1{,}7\,;\,3{,}7)$. Pentes $1 \neq 4$ : sécantes. $x + 2 = 4x - 3 \iff -3x = -5 \iff x = \frac{5}{3}$. Puis $y = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$ ; contrôle : $4 \times \frac{5}{3} - 3 = \frac{20}{3} - \frac{9}{3} = \frac{11}{3}$. Le point exact est $\left(\frac{5}{3}\,;\,\frac{11}{3}\right)$ : la lecture graphique ne donnait qu'une valeur approchée.

**Ex. 44** ★☆☆ **Avec une droite verticale ou avec les axes**

(a) Axe des ordonnées $(x = 0)$ : $y = -2 \times 0 + 5 = 5$, d'où le point $(0\,;\,5)$. Axe des abscisses $(y = 0)$ : $-2x + 5 = 0 \iff x = 2{,}5$, d'où le point $(2{,}5\,;\,0)$.

(b) On remplace $x$ par $-1{,}5$ : $y = 3 \times (-1{,}5) + 2 = -4{,}5 + 2 = -2{,}5$. Le point d'intersection est $(-1{,}5\,;\,-2{,}5)$.

(c) On remplace $x$ par 2 : $y = \frac{2}{3} \times 2 - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$. Le point d'intersection est $\left(2\,;\,\frac{1}{3}\right)$ ; sur la figure, on ne lit qu'environ 0,3 pour l'ordonnée.

(d) Avec $x = 0$ : $-3y + 6 = 0 \iff y = 2$, d'où le point $(0\,;\,2)$. Avec $y = 0$ : $2x + 6 = 0 \iff x = -3$, d'où le point $(-3\,;\,0)$.

(e) Faux. Le point $(4\,;\,0)$ a pour ordonnée $0 \neq 4$ : il n'est pas sur la droite. La droite $y = 4$ et l'axe des abscisses ( $y = 0$) ont la même pente 0 et des ordonnées à l'origine différentes $(4 \neq 0)$ : ils sont strictement parallèles et n'ont aucun point commun.

**Ex. 45** ★★☆ **Deux équations cartésiennes en désordre**

(a) $d_1 : 2y = -4x + 6 \iff y = -2x + 3$. $d_2 : 3y = x - 1 \iff y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

(b) Les pentes sont $-2$ et $\frac{1}{3}$. Comme $-2 \neq \frac{1}{3}$, les droites $d_1$ et $d_2$ sont sécantes.

(c) $-2x + 3 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \iff -2x - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} - 3 \iff -\frac{7}{3}x = -\frac{10}{3} \iff x = \frac{10}{7}$. Puis $y = -2 \times \frac{10}{7} + 3 = \frac{1}{7}$. Contrôle dans $d_2$ : $-\frac{10}{7} + 3 \times \frac{1}{7} + 1 = -\frac{7}{7} + 1 = 0$. On obtient $I\left(\frac{10}{7} ; \frac{1}{7}\right)$.

(d) Première erreur : en passant 3 à droite, Noé a gardé $+3$. Il faut écrire $-\frac{1}{3} - 3 = -\frac{10}{3}$ et non $\frac{8}{3}$, ce qui donne $x = \frac{10}{7}$. Seconde erreur : il ne donne que $x$, alors que la réponse est un point, $I\left(\frac{10}{7} ; \frac{1}{7}\right)$.

**Ex. 46** ★★☆ **Deux robots dans un entrepôt**

(a) $m = \frac{4-(-4)}{1-(-3)} = \frac{8}{4} = 2$ et $p = 4 - 2 \times 1 = 2$, donc $(AB)$ : $y = 2x + 2$ ; contrôle avec $A$ : $2 \times (-3) + 2 = -4$. Puis $m' = \frac{-1-3}{4-(-4)} = -0{,}5$ et $p' = 3 - (-0{,}5) \times (-4) = 1$, donc $(CD) : y = -0{,}5x + 1$ ; contrôle avec $D$ : $-0{,}5 \times 4 + 1 = -1$.

(b) Les pentes sont 2 et $-0{,}5$. Comme $2 \neq -0{,}5$, les droites sont sécantes : les trajectoires se croisent.

(c) $2x + 2 = -0{,}5x + 1 \iff 2{,}5x = -1 \iff x = -0{,}4$. Puis $y = 2 \times (-0{,}4) + 2 = 1{,}2$ ; contrôle : $-0{,}5 \times (-0{,}4) + 1 = 1{,}2$. On obtient $I(-0{,}4 ; 1{,}2)$.

(d) Pour $x = 0$, l'équation de $(AB)$ donne $y = 2 \times 0 + 2 = 2 \neq 1$ : le point $(0 ; 1)$ n'est pas sur $(AB)$, donc ce n'est pas $I$. Une lecture graphique ne donne qu'une valeur approchée.

(e) On pose $y = 0$ : $-0{,}5x + 1 = 0 \iff x = 2$. La trajectoire de R2 coupe le mur au point $(2 ; 0)$.

**Ex. 47** ★★★ **Un triangle découpé par trois droites**

(a) $4x - 2y + 6 = 0 \iff 2y = 4x + 6 \iff y = 2x + 3$. $2x + 2y - 10 = 0 \iff 2y = -2x + 10 \iff y = -x + 5$. Les pentes sont 2 et $-1$. Comme $2 \neq -1$, les droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

(b) $2x + 3 = -x + 5 \iff 2x + x = 5 - 3 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$. On calcule $y$ avec $d_1$ : $y = 2 \times \frac{2}{3} + 3 = \frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{13}{3}$. Contrôle avec $d_2$ : $2 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{13}{3} - 10 = \frac{4}{3} + \frac{26}{3} - 10 = 10 - 10 = 0$. Le point d'intersection est $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{13}{3}\right)$. Sur la figure, on ne lit qu'une valeur approchée, environ $(0{,}7 ; 4{,}3)$ : $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ n'a pas d'écriture décimale exacte, seul le calcul donne les coordonnées exactes.

**Ex. 47** (suite)

(c) On remplace $x$ par $-2$. Dans $d_1$ : $y = 2 \times (-2) + 3 = -1$, donc $J(-2 ; -1)$. Dans $d_2$ : $y = -(-2) + 5 = 7$, donc $K(-2 ; 7)$.

(d) $-6x + 3y - 9 = 0 \iff 3y = 6x + 9 \iff y = 2x + 3$. L'équation $2x + 3 = 2x + 3$ est vraie pour tout réel $x$. Critère : $d_1$ et $d_4$ ont la même pente 2 et la même ordonnée à l'origine 3. Elles sont donc confondues : tous leurs points sont communs, il n'y a pas « un » point d'intersection.

(e) $x - 4y + 16 = 0 \iff 4y = x + 16 \iff y = 0{,}25x + 4$. Les pentes sont $-1$ et 0,25 : comme $-1 \neq 0{,}25$, les droites sont sécantes. $-x + 5 = 0{,}25x + 4 \iff -x - 0{,}25x = 4 - 5 \iff -1{,}25x = -1 \iff x = 0{,}8$. On calcule $y$ avec $d_2$ : $y = -0{,}8 + 5 = 4{,}2$. Contrôle avec $d_5$ : $0{,}8 - 4 \times 4{,}2 + 16 = 0{,}8 - 16{,}8 + 16 = 0$. Le point d'intersection est $(0{,}8 ; 4{,}2)$.

**Ex. 48** ★★★ **Une erreur, puis trois droites concourantes**

(a) Étape oubliée : vérifier d'abord que les pentes sont différentes ($-3 \neq 1{,}5$, donc les droites sont sécantes). Erreur 1 : quand on passe $1{,}5x$ dans le membre de gauche, il change de signe. On obtient $-3x - 1{,}5x = -4{,}5x$, et non $-3x + 1{,}5x$. Erreur 2 : la réponse doit être un point, avec deux coordonnées. Donner seulement $x$ ne suffit pas.

(b) $-3x + 2 = 1{,}5x - 4 \iff -3x - 1{,}5x = -4 - 2 \iff -4{,}5x = -6 \iff x = \frac{-6}{-4{,}5} = \frac{4}{3}$. On calcule $y$ avec $d$ : $y = -3 \times \frac{4}{3} + 2 = -4 + 2 = -2$. Contrôle avec $d'$ : $1{,}5 \times \frac{4}{3} - 4 = 2 - 4 = -2$. Le point d'intersection est $I\left(\frac{4}{3} ; -2\right)$.

(c) $I \in \Delta_a \iff -2 = a \times \frac{4}{3} + 6 \iff \frac{4}{3}a = -8 \iff a = -8 \times \frac{3}{4} = -6$. Contrôle : $-6 \times \frac{4}{3} + 6 = -8 + 6 = -2$. Pour $a = -6$, la droite $\Delta_{-6} : y = -6x + 6$ passe par $I$.

(d) Deux droites de pentes différentes sont sécantes. $\Delta_a$ et $d$ n'ont donc pas un unique point d'intersection seulement si elles ont la même pente : $a = -3$. Leurs ordonnées à l'origine sont alors 6 et 2. Comme $6 \neq 2$, elles sont strictement parallèles. D'ailleurs, l'équation $-3x + 6 = -3x + 2$ donne $6 = 2$, ce qui est impossible : elles n'ont aucun point commun.

**Ex. 48** **(suite)**

(e) Les pentes sont 2 et 1,5. Comme $2 \neq 1{,}5$, les droites sont sécantes. $2x + 6 = 1{,}5x - 4 \iff 2x - 1{,}5x = -4 - 6 \iff 0{,}5x = -10 \iff x = -20$. On calcule $y$ avec $\Delta_2$ : $y = 2 \times (-20) + 6 = -34$. Contrôle avec $d'$ : $1{,}5 \times (-20) - 4 = -34$. Le point d'intersection est $(-20\,;\,-34)$. Il est très loin de la partie du repère dessinée (de $-8$ à $8$) : les pentes sont proches, donc les droites se croisent loin. Seul le calcul permet de le trouver.

**Ex. 49** ★★★ **Lasers sur la carte d'un jeu vidéo**

(a) $2y = 3x + 4 \iff y = 1{,}5x + 2$. Pour $(EF)$ : $m = \frac{3-6}{2-(-4)} = \frac{-3}{6} = -0{,}5$, puis $p = y_E - mx_E = 6 - (-0{,}5) \times (-4) = 6 - 2 = 4$.
Donc $(EF) : y = -0{,}5x + 4$. Contrôle avec $F$ : $-0{,}5 \times 2 + 4 = 3$, c'est bien $y_F$.

(b) Les pentes sont 1,5 et $-0{,}5$. Comme $1{,}5 \neq -0{,}5$, les deux droites sont sécantes. $1{,}5x + 2 = -0{,}5x + 4 \iff 1{,}5x + 0{,}5x = 4 - 2 \iff 2x = 2 \iff x = 1$. On calcule $y$ avec $L_1$ : $y = 1{,}5 \times 1 + 2 = 3{,}5$. Contrôle avec $L_2$ : $-0{,}5 \times 1 + 4 = 3{,}5$. Le bonus est au point $(1\,;\,3{,}5)$.

(c) Sur l'axe des abscisses, $y = 0$. Pour $L_1$ : $1{,}5x + 2 = 0 \iff x = \frac{-2}{1{,}5} = -\frac{4}{3}$, donc Lina traverse $L_1$ au point $\left(-\frac{4}{3}\,;\,0\right)$. Pour $L_2$ : $-0{,}5x + 4 = 0 \iff x = 8$, donc elle traverse $L_2$ au point $(8\,;\,0)$.

(d) $L_3$ est parallèle à $L_1$, donc elle a la même pente 1,5. Comme $G$ est sur l'axe des ordonnées, $p = -3$.
Donc $L_3 : y = 1{,}5x - 3$. L'affirmation est fausse : les pentes sont égales et les ordonnées à l'origine différentes ($-3 \neq 2$), donc les droites sont strictement parallèles. L'équation $1{,}5x - 3 = 1{,}5x + 2$ donne $-3 = 2$, ce qui est impossible. Les lasers ne se croisent jamais, même hors de la carte.

(e) Les pentes sont 1,5 et $-0{,}5$. Comme $1{,}5 \neq -0{,}5$, les droites sont sécantes. $1{,}5x - 3 = -0{,}5x + 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2}$. On calcule $y$ avec $L_3 : y = 1{,}5 \times \frac{7}{2} - 3 = \frac{21}{4} - \frac{12}{4} = \frac{9}{4}$. Contrôle avec $L_2 : -0{,}5 \times \frac{7}{2} + 4 = -\frac{7}{4} + \frac{16}{4} = \frac{9}{4}$. Le point de croisement est $\left(\frac{7}{2}\,;\,\frac{9}{4}\right)$, soit $(3{,}5\,;\,2{,}25)$.