Équation de plan, projeté, distance – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Plans de l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Dans $ax+by+cz+d=0$, $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$; d n'en fait pas partie, et une lettre absente donne un 0.
- Le terme d se calcule avec un point du plan : il ne se recopie pas d'un plan parallèle.
- Vecteurs normaux colinéaires : plans parallèles ; confondus seulement si un point de l'un est dans l'autre.
- Vecteurs normaux orthogonaux : plans perpendiculaires.
- Droite et plan : on remplace x, y, z par des expressions entières en t, avec des parenthèses.
- Distance au plan : $MH=|t|\times\|\vec{n}\|$, pas $|t|$.

Exercice 1 – Lire un vecteur normal, tester un point ★

Le repère est orthonormé. Donne un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, puis dis si le point est dans $\mathcal{P}$ (sauf consigne différente).

a) $\mathcal{P}\,:\,2x-y+3z-4=0$ et $A(1\,;\,1\,;\,1)$

b) $\mathcal{P}\,:\,x+5z+2=0$ et $B(3\,;\,7\,;\,-1)$

c) $\mathcal{P}\,:\,-x+4y-z=0$ et $C(2\,;\,1\,;\,3)$

d) $\mathcal{P}\,:\,z-3=0$ et $D(5\,;\,-2\,;\,3)$

e) $\mathcal{P}\,:\,3x-2y+z+6=0$ et $E(-1\,;\,2\,;\,1)$

f) $\mathcal{P}\,:\,4x+2y-6z+1=0$ et $F(1\,;\,0\,;\,1)$

g) Le plan $2x+y-z+d=0$ passe par $G(1\,;\,-3\,;\,2)$: trouve d.

h) Donne deux points du plan $x-2y+4z-8=0$.

Exercice 2 – Équation par un point et un vecteur normal ★

Le repère est orthonormé. Donne une équation cartésienne du plan.

a) Le plan passant par $A(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(3\,;\,-1\,;\,2)$.

b) Le plan passant par $B(0\,;\,-4\,;\,5)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$.

c) Le plan passant par $C(2\,;\,0\,;\,3)$ de vecteur normal $\vec{k}\,(0\,;\,0\,;\,1)$.

d) Le plan passant par $D(-1\,;\,3\,;\,2)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;\,0\,;\,-5)$.

e) Le plan passant par $E(1\,;\,1\,;\,1)$ et orthogonal à la droite d dirigée par $\vec{u}\,(4\,;\,-1\,;\,2)$.

f) Le plan médiateur de $[AB]$, avec $A(1\,;\,0\,;\,2)$ et $B(3\,;\,4\,;\,0)$ (plan passant par le milieu de $[AB]$ et orthogonal à (AB)).

g) Le plan passant par $F(2\,;\,1\,;\,-1)$ et parallèle au plan $\mathcal{Q}\,:\,x-3y+2z+7=0$.

h) Le plan passant par l'origine O et orthogonal à la droite (AB), avec $A(1\,;\,2\,;\,3)$ et $B(2\,;\,0\,;\,4)$.

Exercice 3 – Plans parallèles ou perpendiculaires ? ★

Le repère est orthonormé. Les plans sont-ils parallèles (strictement ou confondus), perpendiculaires, ou seulement sécants ?

a) $\mathcal{P} : 2x - y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : -4x + 2y - 2z + 5 = 0$

b) $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ et $\mathcal{Q} : x - 2y + z + 3 = 0$

c) $\mathcal{P} : 3x - y + 2 = 0$ et $\mathcal{Q} : x + 3y - z = 0$

d) $\mathcal{P} : x - 2y + 3z - 4 = 0$ et $\mathcal{Q} : 2x - 4y + 6z - 8 = 0$

e) $\mathcal{P} : 2x + y - z = 0$ et $\mathcal{Q} : x + y + z - 1 = 0$

f) $\mathcal{P} : z - 2 = 0$ et $\mathcal{Q} : x + y - 5 = 0$

g) $\mathcal{P} : mx + 2y - z + 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : x - y + 3z = 0$: trouve m pour que les plans soient perpendiculaires.

h) $\mathcal{P} : 2x + my - 4z = 0$ et $\mathcal{Q} : x - 3y - 2z + 1 = 0$: trouve m pour que les plans soient parallèles.

Exercice 4 – Plan passant par trois points ★★

Le repère est orthonormé. Donne une équation cartésienne du plan (ABC) (sauf consigne différente).

a) $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(2\,;\,1\,;\,0)$ et $C(0\,;\,1\,;\,3)$

b) $A(0\,;\,1\,;\,1)$, $B(2\,;\,0\,;\,3)$ et $C(1\,;\,2\,;\,0)$

c) $A(1\,;\,1\,;\,0)$, $B(1\,;\,3\,;\,2)$ et $C(2\,;\,1\,;\,1)$

d) $A(2\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,3\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,6)$

e) $A(1\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,1\,;\,0)$, $C(0\,;\,0\,;\,1)$ et $D(2\,;\,-3\,;\,2)$: les quatre points sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 – Intersection d'une droite et d'un plan ★★

Le repère est orthonormé. Étudie l'intersection de la droite et du plan ; s'il y a un point commun unique, donne ses coordonnées.

a) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{P} : 2x + y + z - 8 = 0$

b) $d : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{P} : x - y + 3z - 1 = 0$

c) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{P} : x - y - z + 3 = 0$

d) $d : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{P} : 2x + y - 7 = 0$

e) $A(1\,;\,-1\,;\,0)$, $B(3\,;\,1\,;\,2)$ et $\mathcal{P} : x + 2y - z + 3 = 0$: point d'intersection de (AB) et $\mathcal{P}$.

Exercice 6 – Projeté orthogonal sur un plan, distance ★★

Le repère est orthonormé. Détermine le projeté orthogonal H du point sur $\mathcal{P}$, puis la distance du point au plan.

a) $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 3 = 0$ et $M(3\,;\,-3\,;\,6)$

b) $\mathcal{P} : 2x + y + 2z - 4 = 0$ et $M(-1\,;\,-1\,;\,-1)$

c) $\mathcal{P} : x + y - z - 1 = 0$ et $M(4\,;\,3\,;\,-3)$

d) $\mathcal{P} : 4x - 3z + 1 = 0$ et $M(10\,;\,5\,;\,-3)$

e) $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 9 = 0$ et $O(0\,;\,0\,;\,0)$

Exercice 7 – Projeté orthogonal sur une droite ★★★

Dans un repère orthonormé, $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $M(6\,;\,0\,;\,1)$.

1. Montre que M n'est pas sur d.
2. H est le point de d de paramètre t. Exprime les coordonnées de $\overrightarrow{MH}$ en fonction de t, puis trouve t pour que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,2)$. Donne H.
3. Calcule la distance du point M à la droite d.
4. Donne une équation du plan $\mathcal{Q}$ passant par M et orthogonal à d, puis retrouve H comme intersection de d et $\mathcal{Q}$.

Exercice 8 – Le tétraèdre et sa hauteur ★★★

Dans un repère orthonormé, $A(3\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,3\,;\,0)$, $C(0\,;\,0\,;\,3)$ et $D(3\,;\,3\,;\,3)$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est $V = \dfrac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur.

1. Montre que le plan (ABC) a pour équation $x + y + z - 3 = 0$.
2. Détermine le projeté orthogonal H de D sur (ABC) et la distance DH.
3. Montre que le triangle ABC est équilatéral, puis calcule son aire avec le milieu I de $[BC]$.
4. Calcule le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $\mathcal{P} : 3x - y + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(3\,;\,-1\,;\,2)$.

b) Plan passant par $A(1\,;\,2\,;\,0)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$: $2(x-1) + (y-2) - z = 0$, donc $2x + y - z - 3 = 0$.

c) $\mathcal{P} : x + 2y - z + 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 2x + 4y - 2z + 2 = 0$: les constantes sont différentes ($1 \neq 2$), donc les plans sont strictement parallèles.

d) $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,3)$ et $\vec{n}'\,(3\,;\,0\,;\,-1)$ sont normaux à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$: $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3 + 0 - 3 = 0$, donc les plans sont parallèles.

e) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{P} : x + y + 3z - 4 = 0$: $1 + t + 2t + 3 - t - 4 = 0$, donc $2t = 0$, $t = 0$: le point d'intersection est $(1\,;\,0\,;\,3)$.

f) $\mathcal{P} : 2x - 2y + z + 1 = 0$, $M(4\,;\,-3\,;\,3)$: la droite $M + t\vec{n}$ coupe le plan pour $t = -2$, donc la distance de M au plan vaut 2.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Un vecteur normal au plan $2x - 5z + 1 = 0$ est :

   A $(2\,;\,-5\,;\,1)$ **B** $(2\,;\,-5\,;\,0)$ **C** $(2\,;\,0\,;\,-5)$ **D** $(0\,;\,2\,;\,-5)$

2. Le plan passant par $A(1\,;\,-1\,;\,2)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;\,3\,;\,-1)$ a pour équation :

   A $x+3y-z+4=0$ **B** $x+3y-z-4=0$ **C** $x-y+2z+4=0$ **D** $x+3y-z=0$

3. $\mathcal{P} : x-y+2z=0$ et $\mathcal{Q} : -2x+2y-4z+3=0$ sont :

   A confondus **B** perpendiculaires **C** sécants, non perpendiculaires **D** strictement parallèles

4. La droite $x=t$, $y=1+t$, $z=2-t$ coupe le plan $x+y+z-6=0$ au point :

   A $(0\,;\,1\,;\,2)$ **B** $(3\,;\,4\,;\,-1)$ **C** $(3\,;\,3\,;\,3)$ **D** aucun : elle est parallèle au plan

5. La distance de l'origine O au plan $2x+y+2z-18=0$ vaut :

   A 18 **B** 2 **C** $\dfrac{2}{3}$ **D** 6

6. Les plans $x+y-z+1=0$ et $2x-y+z=0$ sont :

   A perpendiculaires **B** parallèles **C** confondus **D** sécants, non perpendiculaires

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).