Corrigé – Équation de plan, projeté, distance

Mathématiques – Terminale spécialité

Plans de l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Lire un vecteur normal, tester un point ★

Le repère est orthonormé. Donne un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, puis dis si le point est dans $\mathcal{P}$ (sauf consigne différente).

a) Les coefficients de x, y, z : $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ est normal à $\mathcal{P}$.
On remplace les coordonnées de A : $2\times 1-1+3\times 1-4=0$: $A\in\mathcal{P}$.

b) Les coefficients de x, y, z : $\vec{n}\,(1\,;\,0\,;\,5)$ est normal à $\mathcal{P}$.
On remplace les coordonnées de B : $3+5\times(-1)+2=0$: $B\in\mathcal{P}$.
Il n'y a pas de y : la 2e coordonnée de $\vec{n}$ est 0, et y peut prendre n'importe quelle valeur.

c) Les coefficients de x, y, z : $\vec{n}\,(-1\,;\,4\,;\,-1)$ est normal à $\mathcal{P}$.
On remplace les coordonnées de C : $-2+4\times 1-3=-1$, et $-1\neq 0$: $C\notin\mathcal{P}$.

d) Les coefficients de x, y, z : $\vec{n}\,(0\,;\,0\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{P}$.
On remplace les coordonnées de D : $3-3=0$: $D\in\mathcal{P}$.
$z-3=0$ s'écrit $z=3$: c'est un plan horizontal.

e) Les coefficients de x, y, z : $\vec{n}\,(3\,;\,-2\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{P}$.
On remplace les coordonnées de E : $3\times(-1)-2\times 2+1+6=0$: $E\in\mathcal{P}$.
Le 6 n'est pas une coordonnée de $\vec{n}$: c'est le terme constant d.

f) Les coefficients de x, y, z : $\vec{n}\,(4\,;\,2\,;\,-6)$ est normal à $\mathcal{P}$.
On remplace les coordonnées de F : $4\times 1+2\times 0-6\times 1+1=-1$, et $-1\neq 0$: $F\notin\mathcal{P}$.
On peut aussi prendre $\dfrac{1}{2}\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,-3)$, plus simple.

g) G est dans le plan : $2\times 1+(-3)-2+d=0$, donc $-3+d=0$, donc $d=3$.
Le plan a pour équation $2x+y-z+3=0$.

h) On choisit deux coordonnées et on calcule la troisième.
Avec $x=0$ et $y=0$: $4z-8=0$, donc $z=2$: le point $(0\,;\,0\,;\,2)$.
Avec $y=0$ et $z=0$: $x-8=0$, donc $x=8$: le point $(8\,;\,0\,;\,0)$.

Exercice 2 – Équation par un point et un vecteur normal ★

Le repère est orthonormé. Donne une équation cartésienne du plan.

a) Le plan a une équation de la forme $3x-y+2z+d=0$.
Il passe par A : $3\times 1-2+2\times(-1)+d=0$, donc $d=1$.
Équation : $3x-y+2z+1=0$.

b) Le plan a une équation de la forme $x+y+z+d=0$.
Il passe par B : $0+(-4)+5+d=0$, donc $d=-1$.
Équation : $x+y+z-1=0$.

c) Le plan a une équation de la forme $z + d = 0$.
Il passe par C : $3 + d = 0$, donc $d = -3$.
Équation : $z - 3 = 0$.
Autrement dit $z = 3$: le plan horizontal de cote 3.

d) Le plan a une équation de la forme $2x - 5z + d = 0$.
Il passe par D : $2 \times (-1) - 5 \times 2 + d = 0$, donc $d = 12$.
Équation : $2x - 5z + 12 = 0$.

e) d est orthogonale au plan : son vecteur directeur $\vec{u}$ est normal au plan.
Le plan a une équation de la forme $4x - y + 2z + d = 0$.
Il passe par E : $4 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + d = 0$, donc $d = -5$.
Équation : $4x - y + 2z - 5 = 0$.

f) Le milieu de $[AB]$ est $I(2\,;\,2\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,4\,;\,-2)$ est normal au plan.
Le plan a une équation de la forme $2x + 4y - 2z + d = 0$.
Il passe par I : $2 \times 2 + 4 \times 2 - 2 \times 1 + d = 0$, donc $d = -10$.
Équation : $2x + 4y - 2z - 10 = 0$.
On divise par 2 : $x + 2y - z - 5 = 0$.

g) Deux plans parallèles ont le même vecteur normal : $\vec{n}\,(1\,;\,-3\,;\,2)$.
Le plan a une équation de la forme $x - 3y + 2z + d = 0$.
Il passe par F : $2 - 3 \times 1 + 2 \times (-1) + d = 0$, donc $d = 3$.
Équation : $x - 3y + 2z + 3 = 0$.
On garde $\vec{n}$, mais pas le 7 : d se recalcule avec le point F.

h) $\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,-2\,;\,1)$ est normal au plan.
Le plan a une équation de la forme $x - 2y + z + d = 0$.
Il passe par O : $0 - 2 \times 0 + 0 + d = 0$, donc $d = 0$.
Équation : $x - 2y + z = 0$.

Exercice 3 – Plans parallèles ou perpendiculaires ? ★

Le repère est orthonormé. Les plans sont-ils parallèles (strictement ou confondus), perpendiculaires, ou seulement sécants ?

a) $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'\,(-4\,;\,2\,;\,-2)$ à $\mathcal{Q}$.
On cherche k tel que $\vec{n}' = k\,\vec{n}$.
Les abscisses : $-4 = k \times 2$, donc $k = -2$.
Les ordonnées : $-2 \times (-1) = 2$: c'est bien 2.
Les cotes : $-2 \times 1 = -2$: c'est bien -2.
Les vecteurs normaux sont colinéaires : les plans sont parallèles.
On prend un point de $\mathcal{P}$, $K(0\,;\,0\,;\,1)$ $(2 \times 0 - 0 + 1 - 1 = 0)$, et on le teste dans $\mathcal{Q}$:
$-4 \times 0 + 2 \times 0 - 2 \times 1 + 5 = 3$, et $3 \neq 0$: $K \notin \mathcal{Q}$.
Les plans sont strictement parallèles.

b) $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'\,(1\,;\,-2\,;\,1)$ à $\mathcal{Q}$.
Les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les plans ne sont pas parallèles, ils sont sécants.
$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 0$.
Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les plans sont perpendiculaires.

c) $\vec{n}\,(3\,;\,-1\,;\,0)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'\,(1\,;\,3\,;\,-1)$ à $\mathcal{Q}$.
Les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les plans ne sont pas parallèles, ils sont sécants.
$\vec{n}\cdot\vec{n}' = 3\times 1 + (-1)\times 3 + 0\times(-1) = 0$.
Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les plans sont perpendiculaires.

d) $\vec{n}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'\,(2\,;\,-4\,;\,6)$ à $\mathcal{Q}$.
On cherche k tel que $\vec{n}' = k\,\vec{n}$.
Les abscisses : $2 = k\times 1$, donc $k = 2$.
Les ordonnées : $2\times(-2) = -4$: c'est bien -4.
Les cotes : $2\times 3 = 6$: c'est bien 6.
Les vecteurs normaux sont colinéaires : les plans sont parallèles.
On prend un point de $\mathcal{P}$, $K(4\,;\,0\,;\,0)$ $(4 - 2\times 0 + 3\times 0 - 4 = 0)$, et on le teste dans $\mathcal{Q}$:
$2\times 4 - 4\times 0 + 6\times 0 - 8 = 0$: $K\in\mathcal{Q}$.
Les plans sont confondus.
Les équations sont différentes, mais la seconde est la première multipliée par 2.

e) $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'\,(1\,;\,1\,;\,1)$ à $\mathcal{Q}$.
Les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les plans ne sont pas parallèles, ils sont sécants.
$\vec{n}\cdot\vec{n}' = 2\times 1 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = 2$.
$2\neq 0$: les plans sont sécants, mais pas perpendiculaires.

f) $\vec{n}\,(0\,;\,0\,;\,1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'\,(1\,;\,1\,;\,0)$ à $\mathcal{Q}$.
Les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les plans ne sont pas parallèles, ils sont sécants.
$\vec{n}\cdot\vec{n}' = 0\times 1 + 0\times 1 + 1\times 0 = 0$.
Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les plans sont perpendiculaires.

g) Il faut $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 0$, avec $\vec{n}\,(m\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{n}'\,(1\,;\,-1\,;\,3)$:
$m\times 1 + 2\times(-1) + (-1)\times 3 = 0$, donc $m - 5 = 0$, donc $m = 5$.

h) Il faut $\vec{n}\,(2\,;\,m\,;\,-4)$ colinéaire à $\vec{n}'\,(1\,;\,-3\,;\,-2)$: $\vec{n} = k\,\vec{n}'$.
Les abscisses donnent $k = 2$; les cotes : $2\times(-2) = -4$, c'est bien vérifié.
Les ordonnées : $m = 2\times(-3) = -6$.
Pour $m = -6$, les plans sont parallèles (O est dans $\mathcal{P}$ mais pas dans $\mathcal{Q}$: strictement parallèles).

Exercice 4 – Plan passant par trois points ★★

Le repère est orthonormé. Donne une équation cartésienne du plan (ABC) (sauf consigne différente).

a) $\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,1\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires : les points définissent un plan.
On cherche $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ avec $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$:
$\begin{cases}a+b-2c=0\\-a+b+c=0\end{cases}$
Deux équations pour trois inconnues : on choisit $c=2$, et le système devient $\begin{cases}a+b=4\\-a+b=-2\end{cases}$
La 1re équation donne $a=4-b$.
On remplace dans la 2e équation : $-(4-b)+b=-2$, donc $2b-4=-2$, donc $2b=2$, donc $b=1$.
Puis $a=3$ (on remplace b par 1).
Donc $\vec{n}\,(3\,;\,1\,;\,2)$.
Le plan a une équation $3x+y+2z+d=0$; avec A : $3\times1+0+2\times2+d=0$, donc $d=-7$.
Vérification : B donne $3\times2+1+2\times0-7=0$ et C donne $3\times0+1+2\times3-7=0$.
(ABC) : $3x+y+2z-7=0$

b) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$ ne sont pas colinéaires : les points définissent un plan.
On cherche $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ avec $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$:
$\begin{cases}2a-b+2c=0\\a+b-c=0\end{cases}$
Deux équations pour trois inconnues : on choisit $c=3$, et le système devient $\begin{cases}2a-b=-6\\a+b=3\end{cases}$
La 1re équation donne $b=2a+6$.
On remplace dans la 2e équation : $a+(2a+6)=3$, donc $3a+6=3$, donc $3a=-3$, donc $a=-1$.
Puis $b=4$ (on remplace a par -1).
Donc $\vec{n}\,(-1\,;\,4\,;\,3)$.
Le plan a une équation $-x+4y+3z+d=0$; avec A : $-0+4\times1+3\times1+d=0$, donc $d=-7$.
Vérification : B donne $-2+4\times0+3\times3-7=0$ et C donne $-1+4\times2+3\times0-7=0$.
(ABC) : $-x+4y+3z-7=0$

c) $\overrightarrow{AB}\,(0\,;\,2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires : les points définissent un plan.
On cherche $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ avec $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$:
$\begin{cases}2b+2c=0\\a+c=0\end{cases}$
Deux équations pour trois inconnues : on choisit $c=1$, et le système devient $\begin{cases}2b=-2\\a=-1\end{cases}$
La 1re équation s'écrit $2b=-2$, donc $b=-1$.
La 2e équation s'écrit $a=-1$.
Donc $\vec{n}\,(-1\,;\,-1\,;\,1)$.
Le plan a une équation $-x-y+z+d=0$; avec A : $-1-1+0+d=0$, donc $d=2$.
Vérification : B donne $-1-3+2+2=0$ et C donne $-2-1+1+2=0$.
(ABC) : $-x-y+z+2=0$
En multipliant par -1, on peut aussi écrire $x+y-z-2=0$.

d) $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;\,3\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;\,0\,;\,6)$ ne sont pas colinéaires : les points définissent un plan.
On cherche $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ avec $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$:
$\begin{cases}-2a+3b=0\\-2a+6c=0\end{cases}$
Deux équations pour trois inconnues : on choisit $c=1$, et le système devient $\begin{cases}-2a+3b=0\\-2a=-6\end{cases}$
La 2e équation s'écrit $-2a=-6$, donc $a=3$.
On remplace dans la 1re équation : $-2\times3+3b=0$, donc $3b=6$, donc $b=2$.
Donc $\vec{n}\,(3\,;\,2\,;\,1)$.
Le plan a une équation $3x+2y+z+d=0$; avec A : $3\times2+2\times0+0+d=0$, donc $d=-6$.
Vérification : B donne $3\times0+2\times3+0-6=0$ et C donne $3\times0+2\times0+6-6=0$.
(ABC) : $3x+2y+z-6=0$

e) On cherche une équation de (ABC), puis on teste D.
$\overrightarrow{AB}\,(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;\,0\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires : les points définissent un plan.
On cherche $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ avec $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$:
$\begin{cases}-a+b=0\\-a+c=0\end{cases}$
Deux équations pour trois inconnues : on choisit $c=1$, et le système devient $\begin{cases}-a+b=0\\-a=-1\end{cases}$
La 2e équation s'écrit $-a=-1$, donc $a=1$.
On remplace dans la 1re équation : $-1+b=0$, donc $b=1$.
Donc $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$.
Le plan a une équation $x+y+z+d=0$; avec A : $1+0+0+d=0$, donc $d=-1$.
Vérification : B donne $0+1+0-1=0$ et C donne $0+0+1-1=0$.
(ABC) : $x+y+z-1=0$
On teste D : $2+(-3)+2-1=0$: $D\in(ABC)$.
Les quatre points sont coplanaires.

Exercice 5 – Intersection d'une droite et d'un plan ★★

Le repère est orthonormé. Étudie l'intersection de la droite et du plan ; s'il y a un point commun unique, donne ses coordonnées.

a) On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :
$2\,(1+t)+(2-t)+3t-8=0$
$\iff 4t-4=0$
$\iff 4t=4$
$\iff t=1$

On remplace t par 1 dans la représentation : $I(2\,;\,1\,;\,3)$.

b) On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}&2t-(-1+t)+3(4-t)-1=0\\&\iff 12-2t=0\\&\iff -2t=-12\\&\iff t=6\end{aligned}$$

On remplace t par 6 dans la représentation : $I(12\,;\,5\,;\,-2)$.

c) On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}&(1+2t)-t-(2+t)+3=0\\&\iff 2=0\end{aligned}$$

L'égalité $2=0$ est impossible : aucun t ne convient.
La droite et le plan n'ont aucun point commun : la droite est strictement parallèle au plan.
Contrôle : $\vec{u}\,(2\,;\,1\,;\,1)$ et $\vec{n}\,(1\,;\,-1\,;\,-1)$ vérifient $\vec{u}\cdot\vec{n}=2-1-1=0$.

d) On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}&2(3-t)+(1+2t)-7=0\\&\iff 0=0\end{aligned}$$

L'égalité est vraie pour tout t : tous les points de la droite sont dans le plan, la droite est incluse dans le plan.

e) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,2\,;\,2)$, donc (AB) : $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+2t\\z=2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}&(1+2t)+2(-1+2t)-2t+3=0\\&\iff 4t+2=0\\&\iff 4t=-2\\&\iff t=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

On remplace t par $-\dfrac{1}{2}$ dans la représentation : $I(0\,;\,-2\,;\,-1)$.

Exercice 6 – Projeté orthogonal sur un plan, distance ★★

Le repère est orthonormé. Détermine le projeté orthogonal H du point sur $\mathcal{P}$, puis la distance du point au plan.

a) La droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$ est dirigée par $\vec{n}\,(1\,;\,-2\,;\,2)$:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 6 + 2t \end{cases}$$

On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} &(3+t) - 2\,(-3-2t) + 2\,(6+2t) - 3 = 0 \\ \iff\ & 9t + 18 = 0 \\ \iff\ & 9t = -18 \\ \iff\ & t = -2 \end{aligned}$$

On remplace t par -2 dans la représentation : $H(1\,;\,1\,;\,2)$.

$\overrightarrow{MH} = -2\,\vec{n}$, donc la distance est :

$$\begin{aligned} MH &= |-2| \times \|\vec{n}\| \\ &= 2 \times \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

b) La droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$ est dirigée par $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} &2\,(-1+2t) + (-1+t) + 2\,(-1+2t) - 4 = 0 \\ \iff\ & 9t - 9 = 0 \\ \iff\ & 9t = 9 \\ \iff\ & t = 1 \end{aligned}$$

On remplace t par 1 dans la représentation : $H(1\,;\,0\,;\,1)$.

$\overrightarrow{MH} = 1\,\vec{n}$, donc la distance est :

$$\begin{aligned} MH &= |1| \times \|\vec{n}\| \\ &= 1 \times \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= 1 \times 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

c) La droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$ est dirigée par $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$:

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3 - t \end{cases}$$

On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} &(4+t) + (3+t) - (-3-t) - 1 = 0 \\ &\iff 3t + 9 = 0 \\ &\iff 3t = -9 \\ &\iff t = -3 \end{aligned}$$

On remplace t par -3 dans la représentation : $H(1\,;\,0\,;\,0)$.

$\overrightarrow{MH} = -3\,\vec{n}$, donc la distance est :

$$\begin{aligned} MH &= |-3| \times \|\vec{n}\| \\ &= 3 \times \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \\ &= 3 \times \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

d) La droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$ est dirigée par $\vec{n}\,(4\,;\,0\,;\,-3)$:

$$\begin{cases} x = 10 + 4t \\ y = 5 \qquad\quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} &4\,(10+4t) - 3\,(-3-3t) + 1 = 0 \\ &\iff 25t + 50 = 0 \\ &\iff 25t = -50 \\ &\iff t = -2 \end{aligned}$$

On remplace t par -2 dans la représentation : $H(2\,;\,5\,;\,3)$.

$\overrightarrow{MH} = -2\,\vec{n}$, donc la distance est :

$$\begin{aligned} MH &= |-2| \times \|\vec{n}\| \\ &= 2 \times \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} \\ &= 2 \times 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$\|\vec{n}\| = 5$, *pas* 1 *: la distance n'est pas* $|t|$.

e) La droite passant par O et orthogonale à $\mathcal{P}$ est dirigée par $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,2)$:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} &2 \times 2t - (-t) + 2 \times 2t - 9 = 0 \\ &\iff 9t - 9 = 0 \\ &\iff 9t = 9 \\ &\iff t = 1 \end{aligned}$$

On remplace t par 1 dans la représentation : $H(2\,;\,-1\,;\,2)$.

$\overrightarrow{OH} = 1\,\vec{n}$, donc la distance est :

$$\begin{aligned} OH &= |1| \times \|\vec{n}\| \\ &= 1 \times \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= 1 \times 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Exercice 7 – Projeté orthogonal sur une droite ★★★

1. Les abscisses : $1 + t = 6$ donne $t = 5$.
   Les ordonnées : $2 \times 5 = 10$, et $10 \neq 0$.
   Aucun t ne convient : $M \notin d$.

2. $H(1 + t\,;\,2t\,;\,-1 + 2t)$, donc $\overrightarrow{MH}\,(t - 5\,;\,2t\,;\,2t - 2)$.
   On écrit $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$:
   $$\begin{aligned} &(t - 5) + 2 \times 2t + 2 \times (2t - 2) = 0 \\ &\iff 9t - 9 = 0 \quad \textit{(on développe et on réduit)} \\ &\iff t = 1 \quad \textit{(on ajoute } 9\textit{, puis on divise par } 9\textit{)} \end{aligned}$$

   Donc $t = 1$ et $H(2\,;\,2\,;\,1)$: c'est le projeté orthogonal de M sur d.

3. La distance de M à d est MH, avec $\overrightarrow{MH}\,(-4\,;\,2\,;\,0)$:
   $$\begin{aligned} MH &= \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{16 + 4} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

4. $\vec{u}$ est normal à $\mathcal{Q} : x + 2y + 2z + d = 0$.
   Avec $M : 6 + 2 \times 0 + 2 \times 1 + d = 0$, donc $d = -8$.
   $\mathcal{Q} : x + 2y + 2z - 8 = 0$.
   On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :
   $(1 + t) + 2 \times 2t + 2(-1 + 2t) - 8 = 0$
   $\iff 9t - 9 = 0$
   $\iff 9t = 9$
   $\iff t = 1$

   On remplace t par 1 dans la représentation : $H(2\,;\,2\,;\,1)$.
   On retrouve bien le point H de la question 2.

Exercice 8 – Le tétraèdre et sa hauteur ★★★

1. $\overrightarrow{AB}(-3\,;\,3\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;\,0\,;\,3)$ ne sont pas colinéaires : A, B, C définissent un plan.
   $A : 3 + 0 + 0 - 3 = 0$; $B : 0 + 3 + 0 - 3 = 0$; $C : 0 + 0 + 3 - 3 = 0$.
   Les trois points vérifient l'équation : c'est bien une équation du plan (ABC).

2. La droite passant par D et orthogonale à (ABC) est dirigée par $\vec{n}(1\,;\,1\,;\,1)$:
   $$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$$
   On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :
   $(3 + t) + (3 + t) + (3 + t) - 3 = 0$
   $\iff 3t + 6 = 0$
   $\iff 3t = -6$
   $\iff t = -2$

   On remplace t par -2 dans la représentation : $H(1\,;\,1\,;\,1)$.
   $\overrightarrow{DH} = -2\,\vec{n}$, donc la distance est :
   $DH = |-2| \times \|\vec{n}\|$
   $= 2 \times \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$
   $= 2 \times \sqrt{3}$
   $= 2\sqrt{3}$

   Remarque : H est le centre de gravité du triangle ABC, car $\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1$ (de même pour y et z).

3. $AB = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$, et de même $AC = BC = 3\sqrt{2}$: le triangle est équilatéral.
   $I(0\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{AI}\,(-3\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2})$; $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC} = 0+0+0 = 0$ (avec $\overrightarrow{BC}\,(0\,;\,-3\,;\,3)$) : $[AI]$ est la hauteur issue de A.
   $$\begin{aligned} AI &= \sqrt{9+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{27}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} \text{Aire} &= \frac{1}{2}\times BC\times AI \\ &= \frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{12}}{4} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
4. La hauteur issue de D est $DH = 2\sqrt{3}$ (question 2) :
   $$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{3}\times 9\times 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$
   Le volume du tétraèdre est 9 unités de volume.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *Le 2 est le terme constant, pas un coefficient de z.*
Il n'y a pas de z : $\vec{n}\,(3\,;\,-1\,;\,0)$.

b) *Erreur de développement :* $2(x-1) = 2x-2$, *puis* $-2-2=-4$.
$2x-2+y-2-z=0$, donc $2x+y-z-4=0$.
Contrôle avec A : $2+2-0-4=0$.

c) *On compare les plans avec un point, pas avec les constantes.*
$\vec{n'} = 2\vec{n}$: les plans sont parallèles.
Le point $(-1\,;\,0\,;\,0)$ de $\mathcal{P}$ vérifie $2\times(-1)+0-0+2=0$: il est dans $\mathcal{Q}$.
Les plans sont confondus ($\mathcal{Q}$ s'obtient en multipliant par 2).

d) *Des vecteurs normaux orthogonaux donnent des plans perpendiculaires ; parallèles, c'est quand ils sont colinéaires.*
$\vec{n}\cdot\vec{n'} = 0$: les plans sont perpendiculaires.

e) *Le 3 multiplie toute l'expression de z :* $3(3-t) = 9-3t$.

On remplace x, y et z par leurs expressions en t dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}&(1+t)+2t+3\,(3-t)-4=0\\ &\quad\iff 6=0\end{aligned}$$

L'égalité $6=0$ est impossible : aucun t ne convient.

La droite et le plan n'ont aucun point commun : la droite est strictement parallèle au plan.

f) *La distance est $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$, et ici $\|\vec{n}\| \neq 1$.*

$$\begin{aligned}&\|\vec{n}\|\\ &\quad=\sqrt{4+4+1}\\ &\quad=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&MH\\ &\quad=|-2|\times 3\\ &\quad=6\end{aligned}$$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un vecteur normal au plan $2x-5z+1=0$ est :

Réponse C : $(2\,;\,0\,;\,-5)$

Les coefficients de x, y, z : 2, 0 (pas de y) et -5.

2. Le plan passant par $A(1\,;\,-1\,;\,2)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;\,3\,;\,-1)$ a pour équation :

Réponse A : $x+3y-z+4=0$

$1-3-2+d=0$, donc $d=4$.

3. $\mathcal{P} : x-y+2z=0$ et $\mathcal{Q} : -2x+2y-4z+3=0$ sont :

Réponse D : strictement parallèles

$\vec{n}' = -2\vec{n}$: parallèles ; O est dans $\mathcal{P}$ mais pas dans $\mathcal{Q}$ ($3\neq 0$).

4. La droite $x=t$, $y=1+t$, $z=2-t$ coupe le plan $x+y+z-6=0$ au point :

Réponse B : $(3\,;\,4\,;\,-1)$

$t+1+t+2-t-6=0$, soit $t-3=0$ et $t=3$.

5. La distance de l'origine O au plan $2x+y+2z-18=0$ vaut :

Réponse D : 6

$O+t\vec{n}$ dans l'équation : $9t-18=0$, $t=2$; distance $|2|\times\|\vec{n}\| = 2\times 3 = 6$ (2 oublie $\|\vec{n}\|$).

6. Les plans $x+y-z+1=0$ et $2x-y+z=0$ sont :

Réponse A : perpendiculaires

$\vec{n}\cdot\vec{n}' = 2-1-1=0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).