# Épreuves indépendantes et schéma de Bernoulli – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Indépendance et épreuves répétées · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

***Durée : environ 1 h.*** *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

**Les pièges de cette fiche**

- Épreuves indépendantes : on multiplie le long d'un chemin, avec les mêmes probabilités à chaque étape.
- L'échec a pour probabilité $1-p$, pas $p$.
- « Exactement $k$ succès » correspond à **plusieurs** chemins de l'arbre : on les compte tous, puis on additionne.
- « Au moins un » : $1-P(\text{aucun}) = 1-(1-p)^n$ ; $n \times p$ n'est pas une probabilité.
- « Au plus $k$ » : $0, 1, \ldots, k$ succès ; « au moins deux sur trois » compte aussi le cas « trois ».
- Tirages sans remise : les épreuves ne sont pas indépendantes, le schéma de Bernoulli ne s'applique pas.

## **Exercice 1** – Deux épreuves indépendantes ★

Dans chaque cas, les deux épreuves sont indépendantes. Calcule la probabilité demandée.

a) On lance une pièce équilibrée puis un dé équilibré à six faces. Probabilité d'obtenir « face » et « 6 ».

b) On lance deux dés équilibrés. Probabilité d'obtenir deux 6.

c) Un bus est à l'heure avec la probabilité 0,9, un train avec la probabilité 0,7. Probabilité que les deux soient à l'heure.

d) Une urne contient 3 rouges et 2 vertes. On tire deux boules **avec remise**. Probabilité de tirer deux vertes.

e) Même urne, même tirage. Probabilité de tirer exactement une rouge.

f) Deux feux indépendants sont verts avec les probabilités 0,6 et 0,5. Probabilité d'avoir au moins un feu vert.

g) On lance une pièce puis un dé. Combien d'issues compte l'univers ? Probabilité d'obtenir « pile » et un nombre pair.

h) Une roue fait gagner avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$. On la tourne deux fois. Probabilité de gagner exactement une fois.

## **Exercice 2** – Reconnaître une épreuve de Bernoulli ★

Pour chaque épreuve, donne le succès $S$, sa probabilité $p$ et la probabilité de l'échec. Si ce n'est pas un schéma de Bernoulli, dis pourquoi.

a) On lance un dé équilibré ; succès : « obtenir 6 ».

b) On lance un dé équilibré ; succès : « obtenir un multiple de 3 ».

c) On tire une carte d'un jeu de 32 ; succès : « tirer un as ».

d) On répond au hasard à une question à 4 réponses dont une seule est juste ; succès : « répondre juste ».

e) Une urne contient 7 noires et 13 blanches ; on tire une boule ; succès : « noire ».

f) Une pièce truquée tombe sur « pile » avec la probabilité 0,35 ; succès : « pile ».

g) On lance deux dés ; succès : « obtenir un double ».

h) On tire trois cartes l'une après l'autre **sans remise** dans un jeu de 32 ; succès à chaque tirage : « tirer un cœur ».

### **Exercice 3** – Calculer sur un schéma de Bernoulli ★

On répète $n$ fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès $S$ et de paramètre $p$. Calcule la probabilité demandée.

a) $n = 2, p = 0{,}6$ : deux succès.

b) $n = 3, p = \dfrac{1}{2}$ : le chemin $SSS$.

c) $n = 3, p = 0{,}4$ : aucun succès.

d) $n = 2, p = 0{,}35$ : exactement un succès.

e) $n = 3, p = \dfrac{1}{3}$ : le chemin $S\overline{S}S$.

f) $n = 4, p = \dfrac{1}{2}$ : au moins un succès.

g) $n = 2, p = 0{,}15$ : au moins un succès.

h) $n = 3, p = 0{,}2$ : trois succès.

### **Exercice 4** – Trois lancers francs ★★

Une basketteuse réussit chaque lancer franc avec une probabilité de $0{,}7$, indépendamment des autres lancers. Elle tire trois lancers francs. On note $S$ « le lancer est réussi ».

1. Écris les huit chemins de l'arbre, avec le nombre de succès et la probabilité de chacun.
2. Calcule la probabilité qu'elle réussisse exactement deux lancers.
3. Calcule la probabilité qu'elle réussisse au moins deux lancers.
4. Vérifie que la somme des probabilités de 0, 1, 2 et 3 succès vaut 1.

### **Exercice 5** – Le QCM au hasard ★★

Un QCM comporte 4 questions ; chacune a 3 réponses dont une seule est juste. Un élève répond au hasard à chaque question, indépendamment. On note $S$ « la réponse est juste ».

1. Justifie qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli et donne ses paramètres.
2. Calcule la probabilité qu'il n'ait aucune réponse juste.
3. Calcule la probabilité qu'il ait au moins une réponse juste.
4. Calcule la probabilité qu'il ait exactement une réponse juste.
5. Calcule la probabilité qu'il ait au plus une réponse juste, puis au moins deux.

### **Exercice 6** – La roue et la pièce ★★

On fait tourner une roue : rouge avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, verte avec $\dfrac{1}{3}$, bleue sinon. Puis on lance une pièce équilibrée, indépendamment de la roue. On gagne si on obtient « rouge et pile », ou « bleu » quel que soit le côté de la pièce.

1. Calcule la probabilité de « bleu », puis construis l'arbre de l'expérience.
2. Combien d'issues compte l'expérience ? Calcule la probabilité de « vert et face ».
3. Calcule la probabilité d'obtenir « pile ».
4. Calcule la probabilité de gagner.

### **Exercice 7** – Au moins un 6 ★★

On lance $n$ fois un dé équilibré à six faces ($n \leqslant 4$). Calculatrice autorisée.

1. Montre que la probabilité d'obtenir au moins un 6 est $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
2. Complète le tableau, avec des fractions puis des valeurs arrondies au millième.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | | | | |

3. Combien de lancers faut-il au minimum pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un 6 ?

### **Exercice 8** – Le paramètre inconnu ★★★

Une machine produit des pièces ; chacune est défectueuse avec la même probabilité $p$, indépendamment des autres. On prélève deux pièces : la probabilité qu'aucune ne soit défectueuse vaut $0{,}9025$.

1. Détermine $p$.
2. On prélève trois pièces. Calcule la probabilité qu'exactement une soit défectueuse.
3. Calcule la probabilité qu'au moins une des trois pièces soit défectueuse.

### **Exercice 9** – Deux réponses possibles ★★★

Un archer atteint la cible avec une probabilité $p$ à chaque tir, indépendamment des autres tirs. Sur deux tirs, la probabilité qu'il atteigne la cible exactement une fois vaut $0{,}42$.

1. Montre que $p$ vérifie $p^2 - p + 0{,}21 = 0$.
2. Résous cette équation. Les deux solutions conviennent-elles ?
3. On apprend que l'archer atteint la cible plus d'une fois sur deux. Calcule la probabilité qu'il l'atteigne au moins une fois en trois tirs.

### **Exercice 10** – Combien de parties ? ★★★

À un jeu, on gagne une partie avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$, indépendamment des autres parties. Calculatrice autorisée.

1. Exprime, en fonction de $n$, la probabilité de gagner au moins une partie sur $n$.
2. Combien de parties faut-il jouer au minimum pour gagner au moins une fois avec une probabilité d'au moins $0{,}95$ ?
3. On joue trois parties. Calcule la probabilité de gagner au plus une fois.

### **Exercice 11** – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) $n = 3$, $p = 0{,}4$. « Exactement deux succès : $0{,}4^2 \times 0{,}6 = 0{,}096$. »

b) $n = 3$, $p = 0{,}2$. « Au moins un succès : $3 \times 0{,}2 = 0{,}6$. »

c) $n = 2$, $p = 0{,}3$. « Aucun succès : $1 - 0{,}3^2 = 0{,}91$. »

d) $n = 2$, $p = 0{,}9$. « Deux échecs : $0{,}9^2 = 0{,}81$. »

e) $n = 3$, $p = \dfrac{1}{2}$. « Au moins deux succès : trois chemins de probabilité $\dfrac{1}{8}$, donc $\dfrac{3}{8}$. »

f) Une urne contient 4 blanches et 2 noires ; on tire deux boules sans remise. « Schéma de Bernoulli : $P(\text{deux noires}) = \left(\dfrac{2}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$. »

## **QCM** – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $n = 4$, $p = \dfrac{1}{2}$. La probabilité d'obtenir exactement deux succès est :

   **A** $\dfrac{1}{16}$ **B** $\dfrac{1}{4}$ **C** $\dfrac{3}{8}$ **D** $\dfrac{1}{2}$

2. On lance deux fois un dé équilibré. La probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre inférieur ou égal à 2 est :

   **A** $\dfrac{2}{3}$ **B** $\dfrac{5}{9}$ **C** $\dfrac{1}{9}$ **D** $\dfrac{4}{9}$

3. Sur l'arbre de cinq épreuves, le nombre de chemins à exactement un succès est :

   **A** $1$ **B** $2$ **C** $32$ **D** $5$

4. Dans quel cas les épreuves sont-elles identiques et indépendantes ?

   **A** On lance trois fois le même dé **B** On tire trois cartes sans remise

   **C** On tire trois boules d'une urne sans les remettre **D** On choisit trois élèves différents d'une classe

5. Sur deux épreuves, la probabilité de n'avoir aucun succès vaut $0{,}64$. Alors $p$ vaut :

   **A** $0{,}8$ **B** $0{,}2$ **C** $0{,}36$ **D** $0{,}6$

6. $n = 3$, $p = 0{,}1$. La probabilité d'avoir au plus un succès est :

   **A** $0{,}243$ **B** $0{,}729$ **C** $0{,}271$ **D** $0{,}972$

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*