Corrigé – Épreuves indépendantes et schéma de Bernoulli

Mathématiques – Première spécialité

Indépendance et épreuves répétées · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Deux épreuves indépendantes ★

Dans chaque cas, les deux épreuves sont indépendantes. Calcule la probabilité demandée.

a) Épreuves indépendantes : on multiplie.
$P = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$.

b) $P = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$.

c) $P = 0{,}9 \times 0{,}7 = 0{,}63$.

d) Avec remise, l'urne est la même au second tirage : les tirages sont indépendants.
$P = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$.

e) Deux chemins : (rouge, verte) et (verte, rouge).
$P = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{25} + \dfrac{6}{25} = \dfrac{12}{25}$.

f) Contraire : deux feux rouges, $0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$.
$P = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

g) Univers produit : $2 \times 6 = 12$ issues équiprobables.
Issues favorables : (pile ; 2), (pile ; 4), (pile ; 6).
$P = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$, c'est aussi $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{6}$.

h) Deux chemins : $G\overline{G}$ et $\overline{G}G$, chacun de probabilité $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$.
$P = 2 \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{8}$.

Exercice 2 – Reconnaître une épreuve de Bernoulli ★

Pour chaque épreuve, donne le succès S, sa probabilité p et la probabilité de l'échec. Si ce n'est pas un schéma de Bernoulli, dis pourquoi.

a) Deux issues : 6 ou pas 6.
$p = \dfrac{1}{6}$ et $P(\overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

b) Multiples de 3 : 3 et 6.
$p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{2}{3}$.

c) 4 as sur 32 cartes.
$p = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{7}{8}$.

d) $p = \dfrac{1}{4}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{3}{4}$.

e) 20 boules.
$p = \dfrac{7}{20}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{13}{20}$.

f) $p = 0{,}35$ et $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

g) 6 doubles sur 36 issues.
$p = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{5}{6}$.

h) *Ce n'est pas un schéma de Bernoulli.*
Chaque tirage est bien une épreuve de Bernoulli, mais sans remise, la probabilité de « cœur » change d'un tirage à l'autre.
Les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes.

Exercice 3 – Calculer sur un schéma de Bernoulli ★

On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre p. Calcule la probabilité demandée.

a) Un seul chemin, SS.
$P = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

b) $P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

c) Un seul chemin, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$, avec $P(\overline{S}) = 0{,}6$.
$P = 0{,}6^3 = 0{,}216$.

d) Deux chemins : $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$, chacun de probabilité $0{,}35 \times 0{,}65 = 0{,}2275$.
$P = 2 \times 0{,}2275 = 0{,}455$.

e) $P = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}$.

f) Contraire : aucun succès, un seul chemin, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$.
$P = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

g) Contraire : aucun succès, $0{,}85^2 = 0{,}7225$.
$P = 1 - 0{,}7225 = 0{,}2775$.

h) Un seul chemin, SSS.
$P = 0{,}2^3 = 0{,}008$.

Exercice 4 – Trois lancers francs ★★

1. Chaque chemin est un produit de trois facteurs : 0,7 par succès, 0,3 par échec.

Chemin	**Succès**	**Probabilité**
SSS	3	0,343
$SS\overline{S}$	2	0,147
$S\overline{S}S$	2	0,147
$S\overline{SS}$	1	0,063
$\overline{S}SS$	2	0,147
$\overline{S}S\overline{S}$	1	0,063
$\overline{SS}S$	1	0,063
$\overline{SSS}$	0	0,027

2. Chemins à deux succès : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $\overline{S}SS$, soit 3 chemins.
   Chacun a pour probabilité $0{,}7^2 \times 0{,}3 = 0{,}147$.
   $P = 3 \times 0{,}147 = 0{,}441$.

3. « Au moins deux » : deux ou trois succès.
   Trois succès : $0{,}7^3 = 0{,}343$.
   $P = 0{,}441 + 0{,}343 = 0{,}784$.

4. 0 succès : $0{,}3^3 = 0{,}027$.
   1 succès : 3 chemins de probabilité $0{,}7 \times 0{,}3^2 = 0{,}063$, soit 0,189.
   $0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1$.

Exercice 5 – Le QCM au hasard ★★

1. Chaque question est une épreuve à deux issues (juste ou fausse), de succès $p = \dfrac{1}{3}$.
   Les 4 épreuves sont identiques et indépendantes : $n = 4$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

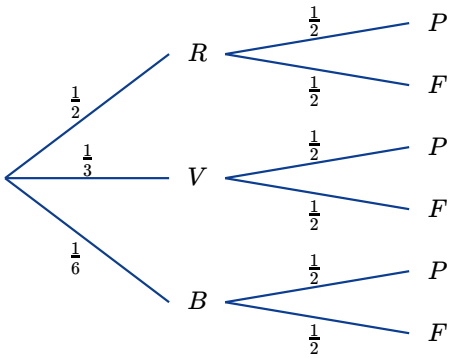
2. Un seul chemin, quatre échecs : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$.

3. Contraire de « aucune » : $1 - \dfrac{16}{81} = \dfrac{65}{81}$.

4. Chemins à un succès : $S\overline{SSS}$, $\overline{S}S\overline{SS}$, $\overline{SS}S\overline{S}$, $\overline{SSS}S$, soit 4 chemins.
   Chacun : $\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{81}$.
   $P = 4 \times \dfrac{8}{81} = \dfrac{32}{81}$.

5. « Au plus une » : zéro ou une.
   $P = \dfrac{16}{81} + \dfrac{32}{81} = \dfrac{48}{81} = \dfrac{16}{27}$.
   « Au moins deux » est le contraire : $1 - \dfrac{16}{27} = \dfrac{11}{27}$.

Exercice 6 – La roue et la pièce ★★



1. $P(\text{bleu}) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.
   Premier niveau : la roue (trois branches).
   Second niveau : la pièce, avec $\dfrac{1}{2}$ sur chaque branche, quel que soit le résultat de la roue (indépendance).

2. Univers produit : $3 \times 2 = 6$ issues (non équiprobables).
   $P = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

3. Trois chemins mènent à « pile » : $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

4. Deux cas incompatibles : « rouge et pile », $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$, et « bleu », $\dfrac{1}{6}$ (les deux branches de la pièce).
   $P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{12} + \dfrac{2}{12} = \dfrac{5}{12}$.

Exercice 7 – Au moins un 6 ★★

1. Les lancers sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « 6 », $p = \dfrac{1}{6}$.
   Le contraire de « au moins un 6 » est « aucun 6 » : un seul chemin, n échecs, de probabilité $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
   Donc $P = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

2. On remplace n par 1, 2, 3, 4.

n	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$	$\dfrac{11}{36} \approx 0{,}306$	$\dfrac{91}{216} \approx 0{,}421$	$\dfrac{671}{1296} \approx 0{,}518$

3. Avec 3 lancers, $P \approx 0{,}421 < 0{,}5$; avec 4 lancers, $P \approx 0{,}518 > 0{,}5$.
   Il faut au moins 4 lancers.

Exercice 8 – Le paramètre inconnu ★★★

1. Aucune défectueuse : un seul chemin, deux échecs, de probabilité $(1-p)^2$.
   $(1-p)^2 = 0{,}9025$
   $\iff 1-p = 0{,}95$ ou $1-p = -0{,}95$ (car $0{,}95^2 = 0{,}9025$)
   $\iff p = 0{,}05$ ou $p = 1{,}95$.
   p *est une probabilité :* $1{,}95$ *ne convient pas.*
   Donc $p = 0{,}05$.

2. Trois chemins : $S\overline{S}\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\overline{S}S$ (ici $S =$ « défectueuse »).
   Chacun : $0{,}05 \times 0{,}95^2 = 0{,}045125$.
   $P = 3 \times 0{,}045125 = 0{,}135375$.

3. Contraire : aucune, $0{,}95^3 = 0{,}857375$.
   $P = 1 - 0{,}857375 = 0{,}142625$.

Exercice 9 – Deux réponses possibles ★★★

1. Exactement une fois : deux chemins, $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$, chacun de probabilité $p(1-p)$.
   Donc $2p(1-p) = 0{,}42$, soit $2p - 2p^2 = 0{,}42$.
   On divise par -2 : $p^2 - p + 0{,}21 = 0$.

2. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}21 = 1 - 0{,}84 = 0{,}16 = 0{,}4^2$.
   $p_1 = \dfrac{1 - 0{,}4}{2} = 0{,}3$ et $p_2 = \dfrac{1 + 0{,}4}{2} = 0{,}7$.
   Les deux sont entre 0 et 1 : les deux conviennent.
   Les données ne suffisent pas à trouver p (on peut échanger succès et échec).

3. Plus d'une fois sur deux : $p = 0{,}7$.
   Contraire de « au moins une fois » : trois échecs, $0{,}3^3 = 0{,}027$.
   $P = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$.

Exercice 10 – Combien de parties ? ★★★

1. Contraire : perdre les n parties, probabilité $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0{,}75^n$.
   $P = 1 - 0{,}75^n$.

2. On cherche le plus petit n tel que $1 - 0{,}75^n \geqslant 0{,}95$, c'est-à-dire $0{,}75^n \leqslant 0{,}05$.
   À la calculatrice : $0{,}75^{10} \approx 0{,}0563 > 0{,}05$ et $0{,}75^{11} \approx 0{,}0422 \leqslant 0{,}05$.
   Il faut jouer au moins 11 parties.

3. « Au plus une » : zéro ou une victoire.
   Zéro : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$.
   Une : trois chemins, chacun de probabilité $\dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{64}$, soit $\dfrac{27}{64}$.
   $P = \dfrac{27}{64} + \dfrac{27}{64} = \dfrac{54}{64} = \dfrac{27}{32}$.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *Il y a trois chemins à deux succès, pas un seul.*
Chemins : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $\overline{S}SS$.
$P = 3 \times 0{,}096 = 0{,}288$.

b) *$n \times p$ n'est pas une probabilité.*
Contraire : aucun succès, $0{,}8^3 = 0{,}512$.
$P = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

c) *$1 - p^2$ est la probabilité de « pas deux succès ».*
Aucun succès : deux échecs, $0{,}7^2 = 0{,}49$.

d) *L'échec a pour probabilité* $1 - p = 0{,}1$.
$P = 0{,}1^2 = 0{,}01$.

e) *« Au moins deux » compte aussi le cas « trois succès ».*
$P = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

f) *Sans remise, les tirages ne sont pas indépendants : ce n'est pas un schéma de Bernoulli.*
Après une noire, il reste 1 noire sur 5 boules.
$P = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $n = 4$, $p = \dfrac{1}{2}$. La probabilité d'obtenir exactement deux succès est :
Réponse C : $\dfrac{3}{8}$
Six chemins à deux succès ($SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, …), chacun de probabilité $\dfrac{1}{16}$: $\dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.

2. On lance deux fois un dé équilibré. La probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre inférieur ou égal à 2 est :
Réponse B : $\dfrac{5}{9}$
Succès : 1 ou 2, $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Contraire : deux échecs. $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

3. Sur l'arbre de cinq épreuves, le nombre de chemins à exactement un succès est :
Réponse D : 5
Le succès peut être à la 1re, 2e, 3e, 4e ou 5e épreuve : un chemin pour chaque place.

4. Dans quel cas les épreuves sont-elles identiques et indépendantes ?
Réponse A : On lance trois fois le même dé
Les lancers d'un dé ne s'influencent pas ; les autres tirages se font sans remise.

5. Sur deux épreuves, la probabilité de n'avoir aucun succès vaut 0,64. Alors p vaut :
Réponse B : 0,2
$(1-p)^2 = 0{,}64 \iff 1 - p = 0{,}8 \text{ (car } 1 - p \geqslant 0) \iff p = 0{,}2$.

6. $n = 3$, $p = 0{,}1$. La probabilité d'avoir au plus un succès est :

Réponse D : 0,972

Zéro : $0{,}9^3 = 0{,}729$; un : $3 \times 0{,}1 \times 0{,}81 = 0{,}243$; total 0,972.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).