49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Appartenance : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et les symboles $\in$ et $\subset$

À retenir : Je simplifie d'abord, puis j'annonce le plus petit ensemble : $\sqrt{100} = 10 \in \mathbb{N}$, donc 10 est aussi dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. $\in$ relie un nombre à un ensemble, $\subset$ relie deux ensembles : $\{1\} \subset \mathbb{N}$. Attention : $0 \in \mathbb{N}$ et $\varnothing \neq \{0\}$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes — Le plus petit ensemble** — Simplifie le nombre si besoin. Donne ensuite le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui le contient.

(a) $\sqrt{64}$ (b) $-\dfrac{18}{6}$ (c) $\dfrac{27}{12}$

(d) 0 (e) $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$ (f) $\sqrt{0{,}09}$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes — Le bon symbole** — Complète par le symbole qui convient : $\in$, $\notin$ ou $\subset$.

(a) $-11 \ldots \mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{Q}$ (c) $\{4\,;\,7\} \ldots \mathbb{N}$

(d) $\dfrac{-30}{4} \ldots \mathbb{D}$ (e) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \ldots \mathbb{N}$ (f) $-2{,}8 \ldots \mathbb{Z}$

Ex. 3 ★★☆ **Tableau d'appartenance et cardinal** — On considère le tableau suivant.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
$\frac{35}{7}$	?	?	?	?
$-\sqrt{81}$	?	?	?	?
$-\frac{22}{55}$	?	?	?	?

(a) Simplifie chaque nombre, puis complète le tableau par « oui » ou « non ».

(b) Sur une ligne, la case $\mathbb{N}$ contient « oui ». Explique pourquoi toutes les cases suivantes de cette ligne sont « oui ».

(c) On pose $F = \left\{\frac{35}{7}\,;\,5\,;\,-\sqrt{81}\right\}$. Donne $\text{Card}(F)$.

(d) Mattéo affirme : « $F \subset \mathbb{N}$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs de Lina** — Lina a écrit les phrases suivantes. Pour chacune, dis si elle a raison, justifie, et corrige si besoin.

(a) « $6 \subset \mathbb{N}$ »

(b) « $\frac{45}{36}$ n'est pas décimal, car la division par 36 ne tombe pas juste. »

(c) « $\varnothing = \{0\}$ »

(d) « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$. »

(e) « $\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ sont irrationnels, donc leur produit est irrationnel. »

Ex. 5 ★★★ **Irrationnels : des opérations surprenantes** — Maëlle affirme : « En faisant des calculs avec des irrationnels, on obtient toujours un irrationnel. » On admet que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

(a) On suppose que $1 + \sqrt{3}$ est rationnel, c'est-à-dire $1 + \sqrt{3} = r$ avec $r \in \mathbb{Q}$. Exprime $\sqrt{3}$ en fonction de r, puis conclus.

(b) Avec la même méthode, démontre que $2\sqrt{3}$ est irrationnel.

(c) Calcule $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. « Le quotient de deux irrationnels est toujours irrationnel. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Calcule $(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}$. Maëlle a-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Un ensemble écrit de façon trompeuse** — Yanis écrit l'ensemble $E = \left\{\frac{-28}{7}\,;\,0\,;\,\sqrt{121}\,;\,\frac{39}{24}\,;\,\frac{7}{30}\,;\,\frac{\pi}{5\pi}\,;\,\frac{33}{3}\right\}$. Il affirme que $\text{Card}(E) = 7$. On admet qu'une fraction irréductible est décimale si et seulement si son dénominateur n'a que 2 et 5 comme facteurs premiers.

(a) Simplifie chaque écriture de E. Yanis a-t-il raison pour $\text{Card}(E)$? Justifie.

(b) Écris en extension l'ensemble A des éléments de E qui appartiennent à $\mathbb{N}$, puis l'ensemble B de ceux qui sont dans $\mathbb{D}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$.

(c) Vrai ou faux ? Justifie : « $E \subset \mathbb{Q}$ » ; « $E \subset \mathbb{D}$ ».

(d) On note C l'ensemble des éléments de E qui sont irrationnels. Écris C. Est-ce l'ensemble $\{0\}$? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Les fractions de douzième** — Inès étudie les nombres $\frac{n}{12}$, où n est un entier de 1 à 24. On admet qu'une fraction irréductible est décimale si et seulement si son dénominateur n'a que 2 et 5 comme facteurs premiers.

(a) Écris en extension l'ensemble N des entiers n de 1 à 24 tels que $\frac{n}{12} \in \mathbb{N}$.

(b) Démontre que $\frac{9}{12} \in \mathbb{D}$, mais que $\frac{10}{12} \notin \mathbb{D}$.

(c) On note D l'ensemble des entiers n de 1 à 24 tels que $\frac{n}{12} \in \mathbb{D}$. Détermine D et $\text{Card}(D)$ en justifiant.

(d) A-t-on $N \subset D$? A-t-on $D \subset N$? Justifie chaque réponse.

2. *Décimal, rationnel ou irrationnel ?*

À retenir : Décimal : rends la fraction irréductible ; son dénominateur ne doit contenir que des 2 et des 5 ($\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$: oui). $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, réciproque fausse. Irrationnel : ramène-toi à $\sqrt{2}$. Un affichage de calculatrice ne prouve rien.

Ex. 8 ★☆☆ **Décimal ou pas ?** — Dis si le nombre est décimal. Justifie : rends d'abord la fraction irréductible, puis décompose son dénominateur en facteurs premiers.

(a) $\frac{33}{60}$ (b) $\frac{13}{24}$ (c) $\frac{39}{150}$
(d) $\frac{10}{35}$ (e) $\frac{7}{80}$ (f) $\frac{15}{18}$

Ex. 9 ★☆☆ **Le plus petit ensemble** — Donne le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auquel appartient le nombre. Rappel : si l'entier naturel n n'est pas un carré parfait, $\sqrt{n}$ est irrationnel.

(a) $-\sqrt{64}$ (b) $\sqrt{27}$ (c) $\frac{-12}{16}$
(d) $\frac{14}{6}$ (e) $\frac{22}{7}$ (f) $\pi - 1$
(g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

Ex. 10 ★★☆ **Erreurs d'élèves sur les écritures décimales** — Chaque élève a fait une erreur. Explique-la, puis écris la conclusion correcte.

(a) Inès : « Ma calculatrice affiche $5 \div 7 = 0{,}7142857143$, donc $\frac{5}{7}$ est un décimal. »

(b) Malo : « $\frac{2}{3} = 0{,}67$. »

(c) Yanis : « $\pi = 3{,}14$, donc π est un rationnel. »

(d) Léna : « 1,7 n'est pas un rationnel, car il n'est pas écrit sous forme de fraction. »

(e) Hugo : « 0,2 est un décimal, donc $0{,}2 + \frac{1}{6}$ est aussi un décimal. »

Ex. 11 ★★☆ **Rationnel ou irrationnel : vrai ou faux ?** — Vrai ou faux ? Justifie par un calcul, une propriété ou un contre-exemple.

(a) Le nombre $\frac{9}{40}$ peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$, avec a entier et n entier naturel.

(b) Pour tout entier a, si a^2 est pair, alors a est pair.

(c) Le nombre $\sqrt{1{,}44}$ est irrationnel, car il s'écrit avec une racine carrée.

(d) Le produit de deux nombres irrationnels est toujours irrationnel.

(e) Tout rationnel est un décimal.

Ex. 12 ★★★ **La diagonale d'un carré** — $ABCD$ est un carré de côté 1. Dans ce problème, tu démontres que sa diagonale a une longueur irrationnelle. Tu admets que le carré d'un nombre impair est impair.

(a) Calcule la valeur exacte de la longueur AC. Cite le théorème que tu utilises.

(b) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec a et b des entiers naturels, $b \neq 0$, et la fraction irréductible. Montre que $a^2 = 2b^2$, puis que a est pair.

(c) On écrit $a = 2k$, où k est un entier naturel. Montre que $b^2 = 2k^2$. Conclus la démonstration.

(d) Un carré de côté 5 a une diagonale de longueur $\sqrt{50}$. Écris $\sqrt{50}$ sous la forme $c\sqrt{2}$, avec c entier, puis démontre que $\sqrt{50}$ est irrationnel.

(e) Un carré a une aire de 9, un autre une aire de 8. Pour chacun, dis si la longueur du côté est rationnelle. Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Fractions de dénominateur 75** — Dans cet exercice, k désigne un entier. Tu cherches pour quelles valeurs de k la fraction $\frac{k}{75}$ est un nombre décimal.

(a) Décompose 75 en facteurs premiers. Montre que $\frac{12}{75}$ est décimal et donne son écriture décimale.

(b) Le nombre $\frac{10}{75}$ est-il décimal ? Justifie.

(c) Trouve tous les entiers k compris entre 1 et 20 tels que $\frac{k}{75}$ soit décimal. Justifie ta méthode.

(d) On suppose par l'absurde que $\frac{1}{75} = \frac{a}{10^n}$, avec a entier et n entier naturel. Montre que $10^n = 75a$, puis aboutis à une contradiction.

Ex. 14 ★★★ **Écritures décimales périodiques** — On note $x = 0{,}363636\ldots$: le bloc 36 se répète sans fin. (Approfondissement.)

(a) Calcule $100x - x$. Déduis-en x sous forme de fraction irréductible.

(b) Le nombre x est-il décimal ? Justifie. Ewan écrit $x = 0{,}36$: corrige son écriture.

(c) Avec la même méthode, écris $y = 2{,}151515\ldots$ sous forme de fraction irréductible.

(d) Calcule $x + y$ sous forme de fraction irréductible. Ce nombre est-il décimal ? Justifie, puis donne son écriture décimale.

3. *Encadrer un réel par des décimaux*

À retenir : Encadrement à 10^{-n} près : troncature à n décimales, puis $+10^{-n}$; l'arrondi peut différer (4,718… : 4,71 et 4,72). Même opération sur les trois membres ; un facteur négatif renverse les inégalités. On écrit $\approx$, jamais $=$.

Ex. 15 ★☆☆ **Troncature, arrondi, encadrement** — Les valeurs approchées sont données par la calculatrice.

(a) Donne la troncature puis l'arrondi au centième de $\sqrt{13} \approx 3{,}6055513$.

(b) Encadre $\sqrt{19} \approx 4{,}3588989$ par deux décimaux consécutifs à 10^{-2} près, puis donne l'amplitude.

(c) Pour $\frac{5}{7} \approx 0{,}7142857$, la troncature et l'arrondi au millième sont-ils égaux ? Justifie.

(d) Encadre $-\sqrt{8} \approx -2{,}8284271$ à 10^{-1} près, puis dis si la troncature au dixième de $-\sqrt{8}$ est une valeur par défaut ou par excès.

(e) Arrondis $\sqrt{26} \approx 5{,}0990195$ au centième.

(f) Léna écrit $\frac{2}{3} = 0{,}667$. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 16 ★☆☆ **Transformer un encadrement** — On sait que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ (amplitude 0,01).

(a) Déduis-en un encadrement de $4 + \sqrt{5}$.

(b) Déduis-en un encadrement de $3\sqrt{5}$, puis donne son amplitude.

(c) Noé écrit $-4{,}46 < -2\sqrt{5} < -4{,}48$. Corrige son erreur.

(d) Déduis-en un encadrement de $1 - \sqrt{5}$.

(e) On divise les trois membres par 2. Quelle est l'amplitude de l'encadrement de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ obtenu ?

Ex. 17 ★★☆ **Le périmètre d'un carré** — Un carré a pour côté $\sqrt{6}$ cm. La calculatrice donne $\sqrt{6} \approx 2{,}4494897$. On note $P = 4\sqrt{6}$ son périmètre.

(a) Encadre $\sqrt{6}$ à 10^{-2} près.

(b) Déduis-en un encadrement de P et son amplitude.

(c) Quelle précision faut-il sur $\sqrt{6}$ pour encadrer P avec une amplitude d'au plus 0,01 ? Donne alors cet encadrement de P.

(d) Sacha écrit $P = 9{,}8$ cm. Corrige son écriture, puis dis si 9,8 est une valeur approchée de P par défaut ou par excès.

Ex. 18 ★★☆ **Balayage pour encadrer $\sqrt{11}$** — Ben écrit ce programme pour encadrer le réel positif $\sqrt{11}$, dont le carré vaut 11.

```
def balayage(pas):
    x = 3
    while x**2 < 11:
        x = x + pas
    return x - pas, x
```

(a) Écris les valeurs successives de `x` lors de l'appel `balayage(0.1)`, puis l'encadrement de $\sqrt{11}$ obtenu.

(b) Combien de tours de boucle fait `balayage(0.01)` ? Quel encadrement renvoie-t-il ?

(c) Quel pas faut-il choisir pour un encadrement à 10^{-3} près ? Que deviennent alors l'amplitude et le nombre de tours ?

Ex. 18 (suite)

(d) L'affichage brut du résultat de `balayage(0.1)` contient une borne qui se termine par …0000000004. Pourquoi ? Écris un `print` qui affiche proprement les deux bornes `a` et `b`.

Ex. 19 ★★★ **Racines, négatifs et différence** — La calculatrice donne $\sqrt{3} \approx 1{,}7320508$ et $\sqrt{10} \approx 3{,}1622777$.

(a) Encadre $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près. Donne l'amplitude de cet encadrement.

(b) Déduis-en un encadrement de $-\sqrt{3}$.

(c) Déduis-en un encadrement de $5 - 2\sqrt{3}$ et donne son amplitude.

(d) Inès encadre $\sqrt{10}$ à 10^{-2} près. Elle soustrait ensuite, membre à membre, son encadrement de $\sqrt{3}$ et obtient $1{,}43 < \sqrt{10} - \sqrt{3} < 1{,}43$. Explique pourquoi c'est impossible.

(e) Encadre correctement $\sqrt{10} - \sqrt{3}$ en écrivant $\sqrt{10} - \sqrt{3} = \sqrt{10} + (-\sqrt{3})$. Donne l'amplitude obtenue.

Ex. 20 ★★★ **Balayage pour une équation** — On note α le réel positif tel que $\alpha^2 + \alpha = 4$. Pour $x \geqslant 1$, plus x augmente, plus $x^2 + x$ augmente. Ben écrit ce programme :

```
def balayage(pas):
    x = 1
    while x**2 + x < 4:
        x = x + pas
    return x - pas, x
```

(a) Calcule $x^2 + x$ pour $x = 1$ puis pour $x = 2$. Déduis-en que $1 < \alpha < 2$.

(b) Lors de l'appel `balayage(0.1)`, combien de fois la ligne `x = x + pas` est-elle exécutée ? Quel encadrement de α obtient-on ? Justifie par des calculs.

(c) Ben remplace `x = 1` par `x = 2`. Que renvoie alors `balayage(0.1)` ? Pourquoi ce résultat est-il faux ?

(d) Calcule $1{,}56^2 + 1{,}56$ et $1{,}57^2 + 1{,}57$. Déduis-en ce que renvoie `balayage(0.01)`.

(e) On a $\alpha^2 = 4 - \alpha$. Déduis de la question précédente un encadrement de α^2.

Ex. 21 ★★★ **Le tour du bassin** — Un bassin circulaire a un rayon de 40 m. Son tour mesure $L = 80\pi$ mètres. La calculatrice donne $\pi \approx 3{,}14159265$.

(a) Donne la troncature et l'arrondi de π à 10^{-3}, puis un encadrement de π à 10^{-3} près.

(b) Déduis-en un encadrement de L. Quelle est son amplitude ?

(c) Noa écrit : « $L = 251{,}4$ m, et ton encadrement prouve que c'est l'arrondi au dixième. » Relève ses deux erreurs.

(d) Encadre π à 10^{-4} près. Déduis-en un encadrement de L, puis l'arrondi de L au dixième.

Ex. 21 **(suite)**

(e) La bordure se vend au mètre entier. Ben arrondit L à l'unité et achète 251 m. Est-ce suffisant ? Combien de mètres faut-il acheter au minimum ? Justifie.

4. *Intervalles : notation, droite graduée, inégalités*

À retenir : Large ($\leqslant$, $\geqslant$) : crochet fermé ; stricte ($<$, $>$) : crochet ouvert ; devant $-\infty$ ou $+\infty$: toujours ouvert.
Plus petite borne à gauche :
$-5 < x \leqslant 1 \iff x \in]-5\,;1]$. $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$,
$\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$.

Ex. 22 ★☆☆ **Inégalité, phrase ou intervalle** — Traduis chaque condition sur le réel x par un intervalle, ou chaque intervalle par une inégalité.

(a) $x \geqslant -6$

(b) $-9 < x \leqslant 2{,}5$

(c) « x est au plus égal à $-1{,}5$ »

(d) « x est strictement supérieur à 13 »

(e) « x est compris entre 1 et 8, 1 inclus et 8 exclu »

(f) $x \in [-4\,;7[$

(g) $x \in]-\infty\,;0{,}2[$

Ex. 23 ★☆☆ **Appartient ou non ?** — Le nombre appartient-il à l'intervalle ? Justifie en une ligne.

(a) $\dfrac{11}{4}$ et $[2{,}5\,;2{,}75[$

(b) $\dfrac{8}{3}$ et $[2{,}6\,;2{,}7]$

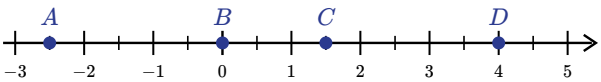
(c) $\sqrt{10}$ et $]3\,;3{,}2[$

(d) $-\dfrac{9}{2}$ et $]-4{,}5\,;0]$

(e) $-\dfrac{7}{5}$ et $]-\infty\,;-1{,}5]$

(f) $-\sqrt{25}$ et $[-5\,;5[$

Ex. 24 ★☆☆ **Lire des bornes sur la droite graduée** — Les points A, B, C et D sont placés sur la droite graduée. Écris sous forme d'intervalle l'ensemble des réels décrit.



(a) Les réels compris entre les abscisses de A et de C, les deux bornes incluses.

(b) Les réels x tels que (abscisse de B) $< x \leqslant$ (abscisse de D).

(c) Les réels compris entre les abscisses de C et de A, les deux bornes exclues.

(d) Les réels situés à gauche de D, D exclu.

(e) Les réels situés à droite de B, B inclus. Quel ensemble de nombres reconnais-tu ?

(f) Tous les réels de la droite, sans exception.

Ex. 25 ★★☆ **Les erreurs de Malo** — Malo a écrit : « $x > -11 \iff x \in [-11\,;+\infty]$ » et « $-2 \geqslant x > -8 \iff x \in]-2\,;-8]$ ».

(a) Repère les deux erreurs de la première écriture de Malo et corrige-la.

(b) Repère l'erreur de la deuxième écriture de Malo et corrige-la.

(c) Combien d'entiers relatifs x vérifient la deuxième inégalité de Malo, $-2 \geqslant x > -8$? Cite-les.

(d) Malo affirme : « $]6\,;7[$ ne contient aucun nombre, car il n'y a aucun entier entre 6 et 7. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **Des inéquations aux intervalles** — Les inéquations suivantes sont d'inconnue réelle x. On note S_1, S_2 et S_3 leurs ensembles de solutions.

(a) Résous $-2x + 1 < 15$ et écris S_1 sous forme d'intervalle.

(b) Résous $-1 \leqslant 3x + 2 < 17$ et écris S_2 sous forme d'intervalle.

(c) S_2 a-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifie.

(d) Vrai ou faux ? « Tout réel de S_2 est solution de la première inéquation. » Justifie.

(e) Résous $2(x + 1) \geqslant 2x - 3$ et écris S_3 sous forme d'intervalle.

Ex. 27 ★★★ **Un intervalle qui dépend de a** — Pour un réel a, on note I_a l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant 7 - a$, écrit $I_a = [a\,;7-a]$ quand cette écriture a un sens.

(a) Écris I_{-1} et $I_{2{,}5}$ sous forme d'intervalle.

(b) Pourquoi l'écriture $[a\,;7-a]$ n'a-t-elle pas de sens pour $a = 5$?

(c) Détermine tous les réels a pour lesquels l'écriture $[a\,;7-a]$ a un sens. Donne ta réponse sous forme d'intervalle.

(d) Parmi ces réels a, détermine ceux pour lesquels $2 \in I_a$. Donne ta réponse sous forme d'intervalle.

(e) Démontre que $3{,}5 \in I_a$ pour tout réel a tel que l'écriture ait un sens.

Ex. 28 ★★★ **Les tarifs d'un transporteur** — Un transporteur facture un colis selon sa masse m en kg ($m > 0$). Tarif A : m strictement inférieure à 0,5. Tarif B : m comprise entre 0,5 et 2, les deux valeurs incluses. Tarif C : m strictement supérieure à 2.

(a) Écris sous forme d'intervalle l'ensemble des masses de chaque tarif.

(b) Léa affirme qu'un colis de 0,5 kg peut être facturé au tarif A ou au tarif B. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Quel tarif s'applique à un colis de $\frac{7}{4}$ kg ? Et à un colis de $\sqrt{5}$ kg ? Justifie sans calculatrice.

Ex. 28 **(suite)**

(d) Le transporteur ajoute un tarif D pour les colis d'au moins 10 kg. Écris le nouvel intervalle du tarif C, puis celui du tarif D.

(e) Avec les quatre tarifs, justifie que toute masse $m > 0$ correspond à un tarif et un seul.

5. *Intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien*

À retenir : $A \cap B$: « et », la zone commune. $A \cup B$: « ou », la zone couverte au moins une fois. Si l'intersection est vide, on écrit $\varnothing$, jamais 0. $\overline{[a\,;b]} =]-\infty\,;a[\cup]b\,;+\infty[$. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ et $(1\,;3) \neq (3\,;1)$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : intersection et réunion d'intervalles** — Trace les deux ensembles l'un sous l'autre sur une droite graduée, puis traite chaque borne une par une.

(a) Écris $]2\,;7] \cap [-1\,;5]$ sous forme d'intervalle.

(b) Écris $]2\,;7] \cup [-1\,;5]$ sous forme d'intervalle.

(c) Détermine $[-4\,;0[\cap]1\,;6]$.

(d) $[-6\,;1] \cup]1\,;3]$ est-il un intervalle ? Si oui, écris-le.

(e) $[-3\,;0[\cup]2\,;4]$ est-il un intervalle ? Justifie à l'aide d'un réel bien choisi.

(f) Écris l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant 3$ et $x > -2$ comme une intersection de deux intervalles, puis comme un seul intervalle.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : complémentaire et ensembles finis** — On note $E = \{0\,;3\,;6\,;9\,;12\,;15\}$ et $F = \{1\,;3\,;5\,;7\,;9\}$.

(a) Écris $\overline{[-5\,;2]}$, le complémentaire de $[-5\,;2]$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Écris le complémentaire de $]-\infty\,;-1[$ dans $\mathbb{R}$.

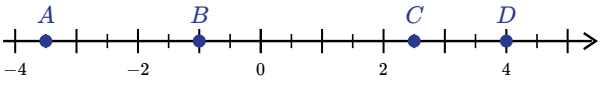
(c) Yanis écrit $\overline{]0\,;+\infty[} =]-\infty\,;0[$. Corrige son erreur.

(d) Écris $E \cap F$ en extension.

(e) Écris $E \cup F$ en extension, puis donne $\text{Card}(E \cup F)$.

(f) Lina écrit $E \cap \{2\,;4\,;8\} = 0$. Corrige son erreur.

Ex. 31 ★★☆ **Deux intervalles lus sur une droite graduée** — On a placé quatre points sur la droite graduée. I est l'ensemble des réels compris entre les abscisses de A et de C, celle de A incluse et celle de C exclue. J est l'ensemble des réels compris entre les abscisses de B et de D, celle de B exclue et celle de D incluse.



(a) Lis les abscisses des quatre points, puis écris I et J sous forme d'intervalles.

(b) Détermine $I \cap J$.

(c) Détermine $I \cup J$.

Ex. 31 **(suite)**

(d) Le réel 2,5 appartient-il à $I \cap J$? à $I \cup J$? Justifie.

(e) Écris $\overline{J}$, le complémentaire de J dans $\mathbb{R}$.

Ex. 32 ★★☆ **Couples et produit cartésien** — On note $A = \{1\,;4\}$ et $B = \{4\,;6\,;9\}$.

(a) Sans faire de liste, détermine le nombre d'éléments de $A \times B$.

(b) Liste tous les couples de $A \times B$, sans en oublier.

(c) Inès affirme que $(6\,;1) \in A \times B$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Liste les couples de $A \times A$. Combien y en a-t-il ?

(e) Pour sa journée, Malo choisit une activité le matin parmi 5, puis une l'après-midi parmi 7. Combien de programmes différents peut-il composer ?

Ex. 33 ★★★ **Opérations sur trois intervalles** — On pose $A = [-4\,;1[$, $B =]-1\,;6]$ et $C =]3\,;+\infty[$. Justifie chaque borne.

(a) Trace A et B l'un sous l'autre sur deux droites graduées, puis détermine $A \cap B$ et $A \cup B$.

(b) Malik écrit : « $A \cap C = 0$ ». Détermine $A \cap C$, puis explique son erreur.

(c) Écris le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$, puis celui de C.

(d) $A \cup C$ est-il un intervalle ? Justifie à l'aide d'un nombre bien choisi.

(e) Détermine $B \cap \overline{C}$ sous forme d'intervalle.

Ex. 34 ★★★ **Un intervalle qui dépend d'un réel a** — Soit a un réel tel que $a < 5$. On pose $I = [a\,;5]$ et $J =]1\,;8]$.

(a) Dans cette question, $a = -3$. Détermine $I \cap J$ et $I \cup J$.

(b) Dans cette question, $a = 1$. Sacha affirme que $I \cup J =]1\,;8]$. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Détermine toutes les valeurs de a pour lesquelles $I \subset J$. Justifie.

(d) On prend $a = 0$ et $K =]5\,;10]$. $I \cup K$ est-il un intervalle ? Et $[0\,;5[\cup K$? Justifie.

(e) Avec $a = 0$ et $K =]5\,;10]$, détermine $I \cap K$.

Ex. 35 ★★★ **Les codes de Noé** — Noé crée un code de deux chiffres. Le premier est choisi dans $E = \{1\,;3\,;5\,;8\}$, le second dans $F = \{3\,;8\,;9\}$. Un code est le couple (premier ; second), élément de $E \times F$.

(a) Écris $E \cap F$ et $E \cup F$ en extension, puis donne leurs cardinaux.

(b) Noé veut un code formé de deux chiffres différents. Sans faire de liste, détermine combien de codes il peut créer. Justifie.

(c) Liste, sans en oublier, les codes dont le premier chiffre est 3 ou 8. Combien y en a-t-il ?

Ex. 35 **(suite)**

(d) Les couples $(8\,;5)$ et $(5\,;8)$ appartiennent-ils à $E \times F$? Justifie.

(e) Noé pense que $E \times F = F \times E$, car ces deux ensembles ont le même cardinal. A-t-il raison ? Justifie.

6. *Valeur absolue et distance*

À retenir : $|x - a|$ est la distance de x à a et ne prend jamais de valeur négative. Si $a < 0$, alors $|a| = -a$. La distance entre a et b vaut $|a - b|$. Avec $|x + 3| \leqslant 1$, le centre est -3 et le rayon 1, donc $x \in [-4\,;-2]$.

Ex. 36 ★☆☆ **Enlever la valeur absolue** — Écris chaque nombre sans valeur absolue.

(a) $|-12|$ (b) $\left|-\frac{3}{5}\right|$ (c) $|6-15|$

(d) $-|-11|$ (e) $|\sqrt{5}-2|$ (f) $|\pi-4|$

(g) $|2\sqrt{2}-3|$

Ex. 37 ★☆☆ **Distance et valeur absolue** — Réponds directement.

(a) Traduis par une valeur absolue : « la distance de x à 7 est égale à 3 ».

(b) Traduis par une valeur absolue : « la distance de x à -5 est au plus 2 ».

(c) Calcule la distance entre -13 et 8.

(d) Calcule la distance entre -15 et -9.

(e) $|x + 16|$ est la distance de x à quel réel ?

(f) Résous l'équation $|x + 6| = 8$.

Ex. 38 ★★☆ **Vrai ou faux sur la valeur absolue** — Vrai ou faux ? Justifie.

(a) Il existe un réel x tel que $|x - 12| = -3$.

(b) Nora affirme : « l'équation $|x| = -x$ n'a aucune solution, car $-x$ est négatif. »

(c) Pour tous réels a et b, $|a + b| = |a| + |b|$.

(d) Malik écrit : « la distance entre -10 et 6 est 4. »

Ex. 39 ★★☆ **Écarts de température et d'altitude** — Un matin d'hiver à Gap, le thermomètre affiche -9 °C. L'après-midi, il affiche 6 °C. Au même moment, sur la côte, un plongeur se trouve à l'altitude -35 m et une mouette vole à l'altitude 18 m.

(a) Calcule l'écart de température entre le matin et l'après-midi, en le présentant comme une distance.

(b) Calcule la distance verticale entre le plongeur et la mouette.

(c) Pour le lendemain, on prévoit une température T telle que $|T + 4| \leqslant 2{,}5$. Donne l'intervalle auquel T appartient.

Ex. 39 **(suite)**

(d) Sur une semaine, les températures minimales sont dans $[-6\,;4]$. Donne le centre et le rayon de cet intervalle, puis écris la condition avec une valeur absolue.

Ex. 40 ★★★ **Racines, π et valeur absolue** — On admet que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

(a) Compare $\sqrt{3}$ et 2 en comparant leurs carrés, puis écris $|\sqrt{3} - 2|$ sans valeur absolue.

(b) Écris $|\pi - 3{,}2|$ sans valeur absolue. Justifie.

(c) Écris $|\sqrt{3} - 1|$ sans valeur absolue, puis simplifie $A = |\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{3} - 1|$.

(d) Détermine le centre et le rayon de l'intervalle $[\sqrt{2}\,;2]$, puis écris « $x \in [\sqrt{2}\,;2]$ » avec une valeur absolue.

Ex. 41 ★★★ **Tolérance sur des tiges d'acier** — Un atelier fabrique des tiges d'acier. Une tige de longueur L (en mm) est acceptée si et seulement si $L \in [118{,}6\,;121{,}4]$.

(a) Détermine le centre et le rayon de l'intervalle $[118{,}6\,;121{,}4]$.

(b) Traduis la condition d'acceptation par une inéquation avec une valeur absolue.

(c) Une tige mesure 121,6 mm et une autre 118,9 mm. Calcule la distance de chaque longueur au centre, puis dis si chaque tige est acceptée.

(d) Écris sous forme de réunion d'intervalles l'ensemble des réels L qui ne vérifient pas la condition d'acceptation, puis traduis-le avec une valeur absolue.

(e) Le chef d'atelier divise le rayon de tolérance par 2 sans changer le centre. Écris le nouvel intervalle des longueurs acceptées.

Ex. 42 ★★★ **Centres négatifs et faux pas** — Dans tout l'exercice, x désigne un réel. Sur une droite graduée, on place les points A d'abscisse -12 et B d'abscisse 5.

(a) Traduis « la distance de x à -8 est inférieure ou égale à 3 » par une inéquation avec valeur absolue, puis donne ses solutions sous forme d'intervalle.

(b) Résous l'équation $|x + 1{,}5| = 4$.

(c) Lina écrit : « $|x + 1{,}5| > 4$ a pour solutions $]-\infty\,;-2{,}5[\cup]5{,}5\,;+\infty[$ ». Repère son erreur et corrige-la.

(d) Tom écrit : « $AB = -12 - 5 = -17$ ». Repère son erreur, puis calcule AB de deux façons.

(e) Donne sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x situés à au plus 3 de A et à au plus 15 de B.

7. *Résoudre $|x-a|=r$ et $|x-a|\leqslant r$*

À retenir : $|x-a|=r$: deux solutions $a-r$ et $a+r$ si $r>0$, une seule si $r=0$, aucune si $r<0$. $|x-a|\leqslant r \iff x\in[a-r\,;a+r]$; avec $<$, crochets ouverts. Piège : $|x+5|$ est la distance à -5.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : équations avec une valeur absolue** — Résous chaque équation dans $\mathbb{R}$. Donne toutes les solutions, ou $\varnothing$ s'il n'y en a pas.

(a) $|x-4|=6$

(b) $|x+6|=5$

(c) $|x-7|=0$

(d) $|x-1|=-4$

(e) Écris l'équation qui traduit « x est à la distance 3,5 de -2 », puis résous-la.

(f) $|8-x|=3$

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : de la valeur absolue à l'intervalle** — Écris l'ensemble des réels x qui vérifient la condition, sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

(a) $|x-5|\leqslant 2$

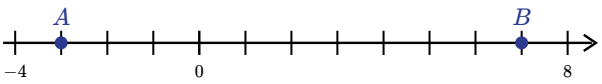
(b) $|x+4|\leqslant 3$

(c) « x est à moins de 0,5 de 12 »

(d) $|x-2|>3$

(e) $|x|\leqslant 8$

Ex. 45 ★★☆ **Centre, rayon et contrôle** — Les points A et B placés sur la droite graduée sont les bornes d'un intervalle fermé I.



(a) Lis les abscisses de A et de B, puis écris l'intervalle I.

(b) Calcule le centre c et le rayon r de I, puis place le point C d'abscisse c sur la droite.

(c) Traduis « $x\in I$ » par une inégalité avec une valeur absolue.

(d) Contrôle ton inégalité en testant $x=8$.

(e) Yanis affirme que $x\in[-9\,;-1]$ équivaut à $|x-5|\leqslant 4$. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Tolérance de fabrication** — Dans l'atelier de Malik, on fabrique des tiges de 25 mm. Une tige est acceptée si sa longueur ℓ (en mm) est égale à 25 mm à 0,2 mm près.

(a) Traduis la condition d'acceptation par une inégalité avec une valeur absolue.

(b) Donne l'intervalle des longueurs acceptées.

Ex. 46 (suite)

(c) Une tige mesure 24,75 mm. Est-elle acceptée ? Justifie par un calcul de distance.

(d) Écris l'ensemble des réels ℓ tels que $|\ell-25|>0{,}2$ sous la forme d'une réunion d'intervalles.

Ex. 47 ★★★ **Combien de solutions ?** — On étudie des équations et des inéquations où figure $|x+3|$, avec x réel.

(a) Écris $|x+3|$ sous la forme $|x-a|$, puis traduis $|x+3|$ par une distance.

(b) Résous $|x+3|=4$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Résous $|x+3|=0$, puis $|x+3|=-2$. Justifie chaque réponse.

(d) Selon la valeur du réel r, donne le nombre de solutions de $|x+3|=r$. Justifie.

(e) Inès affirme : « $|x+3|\leqslant 5$ a pour solutions $[-2\,;8]$. » Teste $x=6$, puis corrige son erreur.

Ex. 48 ★★★ **Réfrigérateur de pharmacie** — Dans la pharmacie de Corentin, la température T (en °C) d'un réfrigérateur est correcte si elle est à moins de 1,5 °C de 5 °C (inégalité stricte). Une alarme sonne lorsque $|T-5|>2{,}5$.

(a) Traduis « T est correcte » par une inégalité avec une valeur absolue, puis par un intervalle.

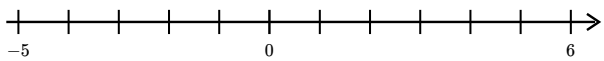
(b) Écris l'ensemble des températures qui font sonner l'alarme sous la forme d'une réunion d'intervalles.

(c) Le thermomètre affiche 7 °C. La température est-elle correcte ? L'alarme sonne-t-elle ? Justifie.

(d) Écris l'ensemble des températures qui ne sont pas correctes et ne font pas sonner l'alarme, sous la forme d'une réunion de deux intervalles.

(e) Un autre réfrigérateur garantit $T\in[1{,}8\,;6{,}2]$. Calcule le centre et le rayon de cet intervalle, puis traduis cette condition par une inégalité $|T-a|\leqslant r$.

Ex. 49 ★★★ **Inclusions et distances** — On note I l'ensemble des réels x tels que $|x-1|\leqslant 4$. Utilise la droite graduée ci-dessous.



(a) Écris I sous la forme d'un intervalle. Place ensuite sur la droite graduée son centre C et ses bornes M et N.

(b) « Tout réel x de I vérifie $|x|\leqslant 5$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) « Tout réel x tel que $|x|\leqslant 5$ appartient à I. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Détermine le plus grand réel $r>0$ tel que toutes les solutions de $|x-4|\leqslant r$ appartiennent à I. Justifie.