## 1. Appartenance : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et les symboles $\in$ et $\subset$

**Ex. 1** ★☆☆ **Automatismes — Le plus petit ensemble**

(a) $\sqrt{64} = 8$ : c'est un entier positif, donc $\mathbb{N}$.

(b) $-\frac{18}{6} = -3$ : c'est un entier négatif, donc $-3 \notin \mathbb{N}$ ; le plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$.

(c) $\frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25 = \frac{225}{100}$ : son écriture décimale s'arrête et ce n'est pas un entier, donc $\mathbb{D}$.

(d) 0 est un entier naturel, donc $\mathbb{N}$.

(e) $\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{144} = 12$, donc $\mathbb{N}$.

(f) $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ car $0{,}3^2 = 0{,}09$ ; $0{,}3 = \frac{3}{10}$ n'est pas entier, donc $\mathbb{D}$.

**Ex. 2** ★☆☆ **Automatismes — Le bon symbole**

(a) $-11 \notin \mathbb{N}$ : c'est un entier négatif (il appartient à $\mathbb{Z}$).

(b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ : deux ensembles, tout entier relatif $a$ s'écrit $\frac{a}{1}$.

(c) $\{4\,;\,7\} \subset \mathbb{N}$ : c'est un ensemble, pas un nombre, donc $\subset$ et non $\in$.

(d) $\frac{-30}{4} = -\frac{15}{2} = -7{,}5$ : écriture qui s'arrête, donc $\frac{-30}{4} \in \mathbb{D}$.

(e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = 5$, donc $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$.

(f) $-2{,}8 \notin \mathbb{Z}$ : ce n'est pas un entier (il est compris entre $-3$ et $-2$).

**Ex. 3** ★★☆ **Tableau d'appartenance et cardinal**

(a) $\frac{35}{7} = 5$, $-\sqrt{81} = -9$ et $-\frac{22}{55} = -\frac{2}{5} = -0{,}4$.

| Nombre | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{35}{7} = 5$ | oui | oui | oui | oui |
| $-\sqrt{81} = -9$ | non | oui | oui | oui |
| $-\frac{22}{55} = -0{,}4$ | non | non | oui | oui |

(b) On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ : tout élément de $\mathbb{N}$ est un élément de chacun des ensembles suivants.
Donc un nombre de $\mathbb{N}$ est dans tous les ensembles suivants.

(c) $\frac{35}{7} = 5$ : les deux premiers éléments sont le même nombre.
Donc $F = \{5\,;\,-9\}$ et $\text{Card}(F) = 2$.

**Ex. 3** (suite)

(d) Il a tort : $-\sqrt{81} = -9$ est un élément de $F$, mais $-9 \notin \mathbb{N}$.
Donc $F$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}$ (en revanche $F \subset \mathbb{Z}$).

**Ex. 4** ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) Faux : 6 est un nombre, il faut $\in$. On écrit $6 \in \mathbb{N}$ ou $\{6\} \subset \mathbb{N}$.

(b) Faux : on simplifie d'abord. $\frac{45}{36} = \frac{5}{4} = 1{,}25 = \frac{125}{100}$.
Donc $\frac{45}{36} \in \mathbb{D}$.

(c) Faux : $\varnothing$ n'a aucun élément, alors que $\{0\}$ en a un, le nombre 0. $\text{Card}(\varnothing) = 0$ et $\text{Card}(\{0\}) = 1$, donc $\varnothing \neq \{0\}$.

(d) Faux : $-1 \in \mathbb{Z}$, mais $-1 \notin \mathbb{N}$.
Donc $\mathbb{Z}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}$ : l'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ est stricte.

(e) Faux : $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, et $6 \in \mathbb{N}$. Un produit de deux irrationnels peut donc être un entier.

**Ex. 5** ★★★ **Irrationnels : des opérations surprenantes**

(a) Si $1 + \sqrt{3} = r$, alors $\sqrt{3} = r - 1$. Or $r$ et 1 sont rationnels, donc $r - 1$ est rationnel (la différence de deux fractions est une fraction). On aurait donc $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. L'hypothèse est absurde : $1 + \sqrt{3}$ est irrationnel.

(b) Supposons que $2\sqrt{3} = r$ avec $r \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{3} = \frac{r}{2}$, et $\frac{r}{2}$ est rationnel, car c'est le quotient d'une fraction par 2. On aurait $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux.
Donc $2\sqrt{3}$ est irrationnel.

(c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$. Ici, $2\sqrt{3}$ (question 2) et $\sqrt{3}$ sont deux irrationnels, mais leur quotient 2 appartient à $\mathbb{N}$. C'est un contre-exemple : l'affirmation est fausse.

(d) $(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{3} = 1$. Or $1 + \sqrt{3}$ (question 1) et $\sqrt{3}$ sont irrationnels, et leur différence 1 appartient à $\mathbb{N}$. C'est un contre-exemple : Maëlle a tort, un calcul avec des irrationnels peut donner un entier.

**Ex. 6** ★★★ **Un ensemble écrit de façon trompeuse**

(a) $\frac{-28}{7} = -4$ ; $0$ ; $\sqrt{121} = 11$ car $11^2 = 121$ ; $\frac{39}{24} = \frac{13}{8} = 1{,}625$ ; $\frac{7}{30}$ est déjà irréductible ; $\frac{\pi}{5\pi} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ ; $\frac{33}{3} = 11$.
Le nombre 11 est écrit deux fois, mais il ne compte qu'une fois : $E = \{-4\,;\,0\,;\,11\,;\,1{,}625\,;\,\frac{7}{30}\,;\,0{,}2\}$.
Donc $\text{Card}(E) = 6$, et Yanis a tort.

**Ex. 6** **(suite)**

(b) $A = \{0\,;\,11\}$, car $0 \in \mathbb{N}$ et $-4 \notin \mathbb{N}$. Ensuite, $B = \{1{,}625\,;\,0{,}2\}$ : ces deux nombres ont une écriture décimale qui s'arrête et ne sont pas entiers. En revanche, $-4$, $0$ et $11$ sont dans $\mathbb{Z}$, et $\frac{7}{30}$ n'est pas décimal
(voir la question suivante).

(c) « $E \subset \mathbb{Q}$ » est vrai : chaque élément s'écrit comme un quotient d'entiers ($-4 = \frac{-4}{1}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{1}{5}\ldots$). « $E \subset \mathbb{D}$ » est faux : $\frac{7}{30}$ est irréductible et $30 = 2 \times 3 \times 5$ contient le facteur 3, donc $\frac{7}{30} \notin \mathbb{D}$ alors que $\frac{7}{30} \in E$.

(d) Tous les éléments de $E$ sont rationnels, donc aucun n'est irrationnel : $C = \varnothing$. Ce n'est pas $\{0\}$, car $\{0\}$ a un élément ($\text{Card}(\{0\}) = 1$) alors que $\varnothing$ n'en a aucun. De plus, $0$ est rationnel.

**Ex. 7** ★★★ **Les fractions de douzième**

(a) $\frac{n}{12}$ est un entier naturel lorsque $n$ est un multiple de 12. Entre 1 et 24, il y a $\frac{12}{12} = 1$ et $\frac{24}{12} = 2$.
Donc $N = \{12\,;\,24\}$.

(b) $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$, donc $\frac{9}{12} \in \mathbb{D}$. En revanche, $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ est irréductible et $6 = 2 \times 3$ contient le facteur 3.
Donc $\frac{10}{12} \notin \mathbb{D}$.

(c) On a $12 = 4 \times 3$. Si 3 divise $n$, on simplifie par 3 : $\frac{n}{12} = \frac{n/3}{4}$, et le dénominateur $4 = 2 \times 2$ ne contient que des 2, donc le nombre est décimal. Si 3 ne divise pas $n$, le facteur 3 reste au dénominateur après simplification, donc le nombre n'est pas décimal. Conclusion : $D = \{3\,;\,6\,;\,9\,;\,12\,;\,15\,;\,18\,;\,21\,;\,24\}$ et $\text{Card}(D) = 8$.

(d) Oui, $N \subset D$ : si $\frac{n}{12} \in \mathbb{N}$, alors $\frac{n}{12} \in \mathbb{D}$ car $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ (on vérifie : $12 \in D$ et $24 \in D$). Non, $D$ n'est pas inclus dans $N$ : $3 \in D$ car $\frac{3}{12} = 0{,}25 \in \mathbb{D}$, mais $3 \notin N$ car $0{,}25 \notin \mathbb{N}$. L'inclusion $N \subset D$ est donc stricte.

## 2. *Décimal, rationnel ou irrationnel ?*

**Ex. 8** ★☆☆ **Décimal ou pas ?**

(a) $\frac{33}{60} = \frac{3\times11}{3\times20} = \frac{11}{20}$ et $20 = 2^2 \times 5$ : c'est un décimal, $\frac{11}{20} = 0{,}55$. Le 3 de 60 disparaît quand on simplifie.

(b) $\frac{13}{24}$ est irréductible (13 est premier et ne divise pas 24). Or $24 = 2^3 \times 3$ contient le facteur 3 : ce n'est pas un décimal.

(c) $\frac{39}{150} = \frac{3\times13}{3\times50} = \frac{13}{50}$ et $50 = 2 \times 5^2$ : c'est un décimal, $\frac{13}{50} = 0{,}26$. Le 3 de $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ se simplifie.

**Ex. 8** **(suite)**

(d) $\frac{10}{35} = \frac{5\times2}{5\times7} = \frac{2}{7}$ et le dénominateur 7 n'est ni 2 ni 5 : ce n'est pas un décimal.

(e) $\frac{7}{80}$ est irréductible et $80 = 2^4 \times 5$ : c'est un décimal, $\frac{7}{80} = 0{,}0875$.

(f) $\frac{15}{18} = \frac{3\times5}{3\times6} = \frac{5}{6}$ et $6 = 2 \times 3$ contient le facteur 3 : ce n'est pas un décimal.

**Ex. 9** ★★☆ **Le plus petit ensemble**

(a) $-\sqrt{64} = -8$ : c'est un entier négatif, donc le plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$.

(b) 27 n'est pas un carré parfait ($5^2 = 25$ et $6^2 = 36$), donc $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ est irrationnel : le plus petit ensemble est $\mathbb{R}$.

(c) $\frac{-12}{16} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$ : ce n'est pas un entier, mais c'est un décimal. Le plus petit ensemble est $\mathbb{D}$.

(d) $\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$, fraction irréductible de dénominateur 3 : ce n'est pas un décimal, mais c'est un quotient d'entiers. Le plus petit ensemble est $\mathbb{Q}$.

(e) $\frac{22}{7}$ est irréductible et son dénominateur est 7 : ce n'est pas un décimal, mais c'est un quotient d'entiers. Le plus petit ensemble est $\mathbb{Q}$. Ce n'est pas $\pi$ : $\frac{22}{7} \approx 3{,}1429$ alors que $\pi \approx 3{,}1416$.

(f) Si $\pi - 1$ était un rationnel $r$, alors $\pi = r + 1$ serait rationnel, ce qui est faux.
Donc $\pi - 1$ est irrationnel : le plus petit ensemble est $\mathbb{R}$.

(g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$ : le plus petit ensemble est $\mathbb{N}$.

**Ex. 10** ★★☆ **Erreurs d'élèves sur les écritures décimales**

(a) L'écran affiche seulement une valeur approchée, et cela ne prouve rien. $\frac{5}{7}$ est irréductible et son dénominateur 7 n'est ni 2 ni 5 : $\frac{5}{7}$ n'est pas un décimal.

(b) $0{,}67 \times 3 = 2{,}01 \neq 2$, donc $\frac{2}{3} \neq 0{,}67$. D'ailleurs, $\frac{2}{3}$ est irréductible avec le dénominateur 3 : ce n'est pas un décimal. On écrit correctement $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$.

(c) 3,14 est seulement une valeur approchée de $\pi$ : $\pi - 3{,}14 \approx 0{,}0016$. Le nombre $\pi$ est irrationnel (résultat admis). La conclusion correcte est donc $\pi \approx 3{,}14$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$.

(d) $1{,}7 = \frac{17}{10}$ est un quotient de deux entiers, donc $1{,}7 \in \mathbb{Q}$. Tout décimal est rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

**Ex. 10** **(suite)**

(e) $0{,}2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{11}{30}$. Cette fraction est irréductible (11 est premier et ne divise pas 30), et $30 = 2 \times 3 \times 5$ contient le facteur 3 : $0{,}2 + \frac{1}{6}$ n'est pas un décimal.

**Ex. 11** ★★☆ **Rationnel ou irrationnel : vrai ou faux ?**

(a) Vrai. $40 = 2^3 \times 5$ et $40 \times 25 = 1\,000$, donc $\frac{9}{40} = \frac{9\times25}{40\times25} = \frac{225}{10^3} = 0{,}225$ : on prend $a = 225$ et $n = 3$.

(b) Vrai. Si $a$ était impair, on pourrait écrire $a = 2k + 1$, et alors $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ serait impair. Donc, si $a^2$ est pair, $a$ est pair.

(c) Faux. $1{,}2^2 = 1{,}44$ et $1{,}2 \geqslant 0$, donc $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2 = \frac{12}{10}$ : c'est un décimal, donc un rationnel.

(d) Faux. Contre-exemple : $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ est un entier, donc un rationnel.

(e) Faux. Contre-exemple : $\frac{4}{9}$ est rationnel. Il est irréductible et $9 = 3^2$, donc ce n'est pas un décimal. Seule l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ est vraie.

**Ex. 12** ★★★ **La diagonale d'un carré**

(a) Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1 + 1 = 2$. Une longueur est positive, donc $AC = \sqrt{2}$.

(b) On élève $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ au carré : $2 = \frac{a^2}{b^2}$, donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi $a^2$ est pair. Si $a$ était impair, $a^2$ serait impair.
Donc $a$ est pair.

(c) On remplace $a$ par $2k$ : $(2k)^2 = 2b^2$, soit $4k^2 = 2b^2$, donc $b^2 = 2k^2$. Alors $b^2$ est pair, donc $b$ est pair (même raisonnement que pour $a$). Les entiers $a$ et $b$ sont tous les deux divisibles par 2, donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible : c'est une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel, et la diagonale $AC$ a une longueur irrationnelle.

(d) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$. Si $5\sqrt{2}$ était un rationnel $q$, alors $\sqrt{2} = \frac{q}{5}$ serait rationnel, comme quotient de deux rationnels. C'est faux d'après la question précédente. Donc $\sqrt{50}$ est irrationnel.

(e) Aire 9 : le côté vaut $\sqrt{9} = 3$. C'est un entier, donc il est rationnel. Aire 8 : le côté vaut $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$. Si $2\sqrt{2}$ était rationnel, $\sqrt{2}$ le serait aussi.
Donc ce côté est irrationnel. Tu ne peux pas conclure qu'une racine est irrationnelle juste parce qu'il y a un radical : il faut d'abord la simplifier.

**Ex. 13** ★★★ **Fractions de dénominateur 75**

(a) $75 = 3 \times 5^2$. On simplifie par 3 : $\frac{12}{75} = \frac{4}{25}$. Cette fraction est irréductible et $25 = 5^2$ ne contient que le facteur premier 5, donc $\frac{12}{75}$ est décimal : $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16$. Le 3 de 75 a disparu en simplifiant.

(b) On simplifie par 5 : $\frac{10}{75} = \frac{2}{15}$. Cette fraction est irréductible et $15 = 3 \times 5$ contient le facteur premier 3. Donc $\frac{10}{75}$ n'est pas décimal.

(c) Comme $75 = 3 \times 5^2$, la fraction irréductible égale à $\frac{k}{75}$ perd le facteur 3 au dénominateur seulement si on peut simplifier par 3, c'est-à-dire si $k$ est un multiple de 3. Sinon, son dénominateur est 75, 15 ou 3, qui contiennent tous le facteur 3. Les valeurs cherchées sont donc $k = 3$, 6, 9, 12, 15 et 18. Par exemple, $\frac{15}{75} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

(d) On multiplie les deux membres par $75 \times 10^n$ : $10^n = 75a$. Comme $75a = 3 \times 25a$, le nombre $10^n$ serait un multiple de 3. Or $10^n$ s'écrit avec un 1 suivi de $n$ zéros : la somme de ses chiffres vaut 1, qui n'est pas un multiple de 3. C'est une contradiction : $\frac{1}{75}$ n'est pas décimal.

**Ex. 14** ★★★ **Écritures décimales périodiques**

(a) $100x = 36{,}3636\ldots$, donc $100x - x = 36$, soit $99x = 36$. Ainsi $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$
(on simplifie par 9).

(b) $\frac{4}{11}$ est irréductible et son dénominateur 11 est un nombre premier différent de 2 et de 5.
Donc $x$ n'est pas décimal : son écriture décimale ne s'arrête pas. L'écriture d'Ewan est fausse, car $0{,}36 = \frac{9}{25}$ est un décimal différent de $x$ : $x - 0{,}36 = \frac{1}{275}$. Il faut écrire $x \approx 0{,}36$
(arrondi au centième).

(c) $100y = 215{,}1515\ldots$, donc $100y - y = 215 - 2 = 213$, soit $99y = 213$. Ainsi $y = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}$
(on simplifie par 3).

(d) $x + y = \frac{4}{11} + \frac{71}{33} = \frac{12}{33} + \frac{71}{33} = \frac{83}{33}$. Cette fraction est irréductible (83 est premier et ne divise pas 33), et $33 = 3 \times 11$ : $x + y$ n'est pas décimal. Son écriture décimale est périodique : $0{,}3636\ldots + 2{,}1515\ldots = 2{,}515151\ldots$
(le bloc 51 se répète).

## 3. *Encadrer un réel par des décimaux*

**Ex. 15** ★☆☆ **Troncature, arrondi, encadrement**

(a) On garde deux décimales : la troncature est 3,60. La décimale suivante est 5, donc on augmente : l'arrondi est 3,61. Ici, troncature et arrondi sont différents.

(b) Troncature au centième : 4,35, puis on ajoute 0,01 : $4{,}35 < \sqrt{19} < 4{,}36$. L'amplitude est $4{,}36 - 4{,}35 = 0{,}01$.

(c) Troncature au millième : 0,714. La décimale suivante est 2 (entre 0 et 4), donc l'arrondi est aussi 0,714. Oui, ici elles sont égales.

(d) $-\sqrt{8} \approx -2{,}828$, donc $-2{,}9 < -\sqrt{8} < -2{,}8$. La troncature $-2{,}8$ est plus grande que $-\sqrt{8}$ : pour un nombre négatif, c'est une valeur par excès.

(e) La troncature au centième est 5,09. La décimale suivante est 9, donc on augmente d'une unité le dernier chiffre gardé : l'arrondi est 5,10.

(f) Non : $3 \times 0{,}667 = 2{,}001 \neq 2$. D'ailleurs, $\frac{2}{3}$ est irréductible et son dénominateur 3 n'a pas que 2 et 5 comme facteurs premiers : $\frac{2}{3}$ n'est pas décimal. On écrit $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$.

**Ex. 16** ★☆☆ **Transformer un encadrement**

(a) On ajoute 4 aux trois membres : $6{,}23 < 4 + \sqrt{5} < 6{,}24$.

(b) On multiplie par $3 > 0$, le sens est conservé : $6{,}69 < 3\sqrt{5} < 6{,}72$. L'amplitude est 0,03 : elle aussi est multipliée par 3.

(c) Multiplier par $-2$ renverse les inégalités : $-4{,}48 < -2\sqrt{5} < -4{,}46$. Noé n'a pas renversé : son encadrement est impossible, car $-4{,}46 > -4{,}48$.

(d) On multiplie par $-1$ (le sens s'inverse) : $-2{,}24 < -\sqrt{5} < -2{,}23$, puis on ajoute 1 : $-1{,}24 < 1 - \sqrt{5} < -1{,}23$.

(e) $1{,}115 < \frac{\sqrt{5}}{2} < 1{,}12$ : l'amplitude est $1{,}12 - 1{,}115 = 0{,}005$, la moitié de 0,01.

**Ex. 17** ★★☆ **Le périmètre d'un carré**

(a) Troncature au centième : 2,44, puis on ajoute 0,01 : $2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$.

(b) On multiplie les trois membres par $4 > 0$ : $9{,}76 < P < 9{,}80$. L'amplitude est 0,04 : elle a été multipliée par 4. Le périmètre est donc connu à 0,04 cm près.

**Ex. 17** **(suite)**

(c) L'amplitude de l'encadrement de $P$ est 4 fois celle de $\sqrt{6}$. À $10^{-2}$ près, on obtient $0{,}04 > 0{,}01$ : c'est insuffisant. À $10^{-3}$ près : $2{,}449 < \sqrt{6} < 2{,}450$, donc $9{,}796 < P < 9{,}8$, d'amplitude $0{,}004 \leqslant 0{,}01$. Il faut donc encadrer $\sqrt{6}$ à $10^{-3}$ près.

(d) 9,8 n'est qu'une valeur approchée de $P$ : on écrit $P \approx 9{,}8$ cm. D'après la question précédente, $9{,}796 < P < 9{,}8$, donc $P < 9{,}8$ : 9,8 est une valeur approchée de $P$ par excès.

**Ex. 18** ★★☆ **Balayage pour encadrer $\sqrt{11}$**

(a) $x$ prend les valeurs 3 ($3^2 = 9$), 3,1 (9,61), 3,2 (10,24), 3,3 (10,89), puis 3,4 : $3{,}4^2 = 11{,}56 \geqslant 11$, donc la boucle s'arrête. Le programme renvoie $x - 0{,}1$ et $x$, soit $3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$ (amplitude 0,1).

(b) La boucle s'arrête au premier $x$ tel que $x^2 \geqslant 11$ : $3{,}31^2 = 10{,}9561 < 11$ et $3{,}32^2 = 11{,}0224 \geqslant 11$. $x$ passe de 3 à 3,32 par pas de 0,01 : la boucle fait 32 tours. Elle renvoie 3,31 et 3,32, donc $3{,}31 < \sqrt{11} < 3{,}32$.

(c) On choisit le pas 0,001 : l'amplitude est égale au pas, soit 0,001. Comme $3{,}316^2 = 10{,}995856 < 11 \leqslant 3{,}317^2 = 11{,}002489$, on obtient $3{,}316 < \sqrt{11} < 3{,}317$, après 317 tours. Une précision dix fois meilleure coûte environ dix fois plus de tours.

(d) Python calcule avec un nombre limité de chiffres : 0,1 n'est stocké qu'en valeur approchée, et les petites erreurs s'ajoutent à chaque tour. On arrondit à l'affichage : `print(round(a, 4), round(b, 4))` affiche `3.3 3.4`.

**Ex. 19** ★★★ **Racines, négatifs et différence**

(a) On garde deux décimales : la troncature est 1,73. On ajoute 0,01 : $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$. L'amplitude vaut $1{,}74 - 1{,}73 = 0{,}01$.

(b) On multiplie les trois membres par $-1$, un nombre négatif, ce qui renverse les inégalités : $-1{,}74 < -\sqrt{3} < -1{,}73$.

(c) On multiplie par $-2$, un nombre négatif, donc les inégalités se renversent : $-3{,}48 < -2\sqrt{3} < -3{,}46$. On ajoute 5 aux trois membres : $1{,}52 < 5 - 2\sqrt{3} < 1{,}54$. L'amplitude vaut $1{,}54 - 1{,}52 = 0{,}02$, soit $2 \times 0{,}01$ : la multiplication par 2 a doublé l'amplitude.

**Ex. 19** **(suite)**

(d) Un encadrement strict $a < x < a$ est impossible : aucun réel n'est strictement compris entre $a$ et lui-même. En effet, on n'a pas le droit de soustraire deux encadrements membre à membre. Inès a calculé $3{,}16 - 1{,}73$ à gauche et $3{,}17 - 1{,}74$ à droite. Or, pour obtenir un minorant, il faut retirer la plus grande valeur possible de $\sqrt{3}$, et non la plus petite.

(e) On a $3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$ et $-1{,}74 < -\sqrt{3} < -1{,}73$. Ces deux encadrements vont dans le même sens, donc on peut les additionner : $3{,}16 - 1{,}74 < \sqrt{10} - \sqrt{3} < 3{,}17 - 1{,}73$, soit $1{,}42 < \sqrt{10} - \sqrt{3} < 1{,}44$. L'amplitude vaut 0,02 : c'est la somme des deux amplitudes.

**Ex. 20** ★★★ **Balayage pour une équation**

(a) Pour $x = 1$ : $1^2 + 1 = 2 < 4$. Pour $x = 2$ : $2^2 + 2 = 6 > 4$. Comme $x^2 + x$ augmente avec $x$ et prend la valeur 4 en $\alpha$, on a $1 < \alpha < 2$.

(b) $x$ prend les valeurs 1 ; 1,1 ; … ; 1,5, et la condition reste vraie. Par exemple, $1{,}5^2 + 1{,}5 = 3{,}75 < 4$. Pour $x = 1{,}6$, on a $1{,}6^2 + 1{,}6 = 4{,}16 \geqslant 4$ : la boucle s'arrête. La ligne a été exécutée 6 fois (on passe de 1 à 1,6). Le programme renvoie $x$ − pas et $x$, donc $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$ (amplitude 0,1).

(c) Pour $x = 2$ : $2^2 + 2 = 6 \geqslant 4$. La condition est fausse dès le départ, donc la boucle ne tourne pas. Le programme renvoie $2 - 0{,}1 = 1{,}9$ et 2, soit « $1{,}9 < \alpha < 2$ ». C'est faux, car $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$ : le balayage doit partir d'une valeur inférieure à $\alpha$, comme 1.

(d) $1{,}56^2 + 1{,}56 = 3{,}9936 < 4$ et $1{,}57^2 + 1{,}57 = 4{,}0349 \geqslant 4$. La boucle s'arrête au premier $x$ qui vérifie $x^2 + x \geqslant 4$, soit $x = 1{,}57$. Le programme renvoie donc 1,56 et 1,57 : $1{,}56 < \alpha < 1{,}57$.

(e) On part de $1{,}56 < \alpha < 1{,}57$. On multiplie par $-1$, ce qui renverse les inégalités : $-1{,}57 < -\alpha < -1{,}56$. On ajoute 4 : $2{,}43 < 4 - \alpha < 2{,}44$.
Donc $2{,}43 < \alpha^2 < 2{,}44$.

**Ex. 21** ★★★ **Le tour du bassin**

(a) La troncature à $10^{-3}$ est 3,141. La quatrième décimale est 5, donc l'arrondi est 3,142 : ici, troncature et arrondi diffèrent. L'encadrement est $3{,}141 < \pi < 3{,}142$.

(b) On multiplie les trois membres par 80, qui est positif, donc le sens est conservé : $251{,}28 < L < 251{,}36$.
L'amplitude vaut $251{,}36 - 251{,}28 = 0{,}08 = 80 \times 0{,}001$ : elle a été multipliée par 80.

**Ex. 21** **(suite)**

(c) Première erreur : $L$ est irrationnel, donc on écrit $L \approx 251{,}4$ et non $L = 251{,}4$. Seconde erreur : l'encadrement ne suffit pas. Si $L$ valait 251,34, son arrondi serait 251,3, mais s'il valait 251,355, ce serait 251,4.
L'encadrement entre 251,28 et 251,36 ne permet pas de trancher.

(d) On a $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$. En multipliant par $80 > 0$ : $251{,}32 < L < 251{,}328$. Tous les nombres de cet encadrement ont pour arrondi au dixième 251,3 (leur deuxième décimale est 2).
Donc l'arrondi de $L$ au dixième est 251,3 : la valeur de Noa était fausse.

(e) D'après la question 2, $251{,}28 < L$ : 251 m ne suffisent pas, même si l'arrondi de $L$ à l'unité est 251. Comme $L < 251{,}36 < 252$, 252 m suffisent. Il faut donc acheter au minimum 252 m : ici, on prend une valeur approchée par excès, pas l'arrondi.

## 4. *Intervalles : notation, droite graduée, inégalités*

**Ex. 22** ★☆☆ **Inégalité, phrase ou intervalle**

(a) $x \in [-6 ; +\infty[$ : l'inégalité est large, donc le crochet est fermé en $-6$ ; il est ouvert devant $+\infty$.

(b) $x \in ]-9 ; 2{,}5]$ : ouvert en $-9$ (inégalité stricte), fermé en 2,5
(inégalité large).

(c) « Au plus » signifie $x \leqslant -1{,}5$, donc $x \in ]-\infty ; -1{,}5]$.

(d) « Strictement supérieur » signifie $x > 13$, donc $x \in ]13 ; +\infty[$ : 13 est exclu.

(e) $1 \leqslant x < 8$, donc $x \in [1 ; 8[$.

(f) Le crochet est fermé en $-4$ et ouvert en 7 : $-4 \leqslant x < 7$.

(g) Le crochet est ouvert en 0,2 : $x < 0{,}2$.

**Ex. 23** ★☆☆ **Appartient ou non ?**

(a) $\frac{11}{4} = 2{,}75$ et le crochet est ouvert en 2,75 : $\frac{11}{4} \notin [2{,}5 ; 2{,}75[$.

(b) $\frac{8}{3} \approx 2{,}667$, et $2{,}6 \leqslant 2{,}667 \leqslant 2{,}7$ : $\frac{8}{3} \in [2{,}6 ; 2{,}7]$.

(c) $3^2 = 9 < 10 < 10{,}24 = 3{,}2^2$, donc $3 < \sqrt{10} < 3{,}2$ : $\sqrt{10} \in ]3 ; 3{,}2[$.

(d) $-\frac{9}{2} = -4{,}5$ et le crochet est ouvert en $-4{,}5$ : $-\frac{9}{2} \notin ]-4{,}5 ; 0]$.

(e) $-\frac{7}{5} = -1{,}4$ et $-1{,}4 > -1{,}5$ : $-\frac{7}{5} \notin ]-\infty ; -1{,}5]$.

**Ex. 23** **(suite)**

(f) $-\sqrt{25} = -5$ et le crochet est fermé en $-5$ : $-\sqrt{25} \in [-5\,;5[$.

**Ex. 24** ★☆☆ **Lire des bornes sur la droite graduée**

(a) $A$ a pour abscisse $-2{,}5$ et $C$ a pour abscisse $1{,}5$ : $[-2{,}5\,;1{,}5]$.

(b) $B$ a pour abscisse $0$ et $D$ a pour abscisse $4$ : $0 < x \leqslant 4$, donc $x \in ]0\,;4]$.

(c) La plus petite borne se place à gauche : $]-2{,}5\,;1{,}5[$, et non $]1{,}5\,;-2{,}5[$.

(d) $]-\infty\,;4[$ : le crochet est ouvert en $4$ et devant $-\infty$.

(e) $[0\,;+\infty[$ : c'est $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des réels positifs ou nuls.

(f) $]-\infty\,;+\infty[ = \mathbb{R}$.

**Ex. 25** ★★☆ **Les erreurs de Malo**

(a) $x > -11$ est une inégalité stricte : le crochet doit être ouvert en $-11$. De plus, $+\infty$ n'est pas un nombre, son crochet est toujours ouvert. On écrit donc $x > -11 \iff x \in ]-11\,;+\infty[$.

(b) La plus petite borne doit être à gauche : $-8 < -2$. Le crochet est ouvert en $-8$ (stricte) et fermé en $-2$ (large). On écrit donc $x \in ]-8\,;-2]$.

(c) $-2 \geqslant x > -8$ s'écrit $-8 < x \leqslant -2$ : $-8$ est exclu et $-2$ est inclus. Les entiers sont $-7$, $-6$, $-5$, $-4$, $-3$ et $-2$. Il y en a donc 6.

(d) Non : $]6\,;7[$ ne contient aucun entier, mais il contient des réels comme 6,5, 6,01 ou 6,001. Il en contient même une infinité. Un intervalle de réels n'est pas un ensemble d'entiers.

**Ex. 26** ★★★ **Des inéquations aux intervalles**

(a) $-2x < 15 - 1$, donc $-2x < 14$. On divise par $-2$, qui est négatif : le sens de l'inégalité change, donc $x > \frac{14}{-2}$, c'est-à-dire $x > -7$. L'inégalité est stricte, donc le crochet est ouvert en $-7$, et il est toujours ouvert devant $+\infty$ : $S_1 = ]-7\,;+\infty[$.

(b) On soustrait 2 aux trois membres : $-3 \leqslant 3x < 15$. On divise par 3, qui est positif, donc le sens ne change pas : $-1 \leqslant x < 5$. $-1$ est inclus (inégalité large) et 5 est exclu (inégalité stricte), donc $S_2 = [-1\,;5[$.

**Ex. 26** **(suite)**

(c) $-1 \in S_2$ (crochet fermé) et tout $x$ de $S_2$ vérifie $x \geqslant -1$ : $-1$ est le plus petit élément de $S_2$. En revanche, $5 \notin S_2$ (crochet ouvert). Si $x \in S_2$, alors $x < 5$, et le nombre $\frac{x+5}{2}$ vérifie $x < \frac{x+5}{2} < 5$ : il appartient à $S_2$ et il est plus grand que $x$. Aucun élément de $S_2$ n'est donc le plus grand : $S_2$ n'a pas de plus grand élément.

(d) Vrai. Si $x \in S_2$, alors $x \geqslant -1$ ; or $-1 > -7$, donc $x > -7$, c'est-à-dire $x \in S_1$. Ainsi $S_2 \subset S_1$ : tout réel de $S_2$ est solution de la première inéquation.

(e) En développant : $2x + 2 \geqslant 2x - 3$. On soustrait $2x$ aux deux membres : $2 \geqslant -3$, ce qui est toujours vrai. Tout réel est donc solution : $S_3 = \mathbb{R} = ]-\infty\,;+\infty[$.

**Ex. 27** ★★★ **Un intervalle qui dépend de $a$**

(a) Pour $a = -1$ : $7 - (-1) = 8$, donc $I_{-1} = [-1\,;8]$. Pour $a = 2{,}5$ : $7 - 2{,}5 = 4{,}5$, donc $I_{2,5} = [2{,}5\,;4{,}5]$.

(b) Pour $a = 5$, on a $7 - a = 2$ : on obtiendrait $[5\,;2]$. Or la plus petite borne doit être écrite à gauche, et aucun réel ne vérifie $5 \leqslant x \leqslant 2$. Cette écriture n'a donc pas de sens.

(c) Il faut que la borne de gauche soit inférieure ou égale à celle de droite : $a \leqslant 7 - a$, c'est-à-dire $2a \leqslant 7$, soit $a \leqslant 3{,}5$ (on divise par 2, positif). L'écriture a un sens exactement pour $a \in ]-\infty\,;3{,}5]$. Pour $a = 3{,}5$, on obtient $I_{3,5} = [3{,}5\,;3{,}5]$, qui contient le seul réel 3,5.

(d) $2 \in I_a$ signifie $a \leqslant 2$ et $2 \leqslant 7 - a$. La seconde condition s'écrit $a \leqslant 7 - 2$, soit $a \leqslant 5$. Les deux conditions sont vraies exactement quand $a \leqslant 2$ (ces réels vérifient bien $a \leqslant 3{,}5$).
Donc $2 \in I_a$ si et seulement si $a \in ]-\infty\,;2]$.

(e) Soit $a \leqslant 3{,}5$. Alors $-a \geqslant -3{,}5$ (on multiplie par $-1$, le sens change), puis $7 - a \geqslant 7 - 3{,}5 = 3{,}5$. On a donc $a \leqslant 3{,}5 \leqslant 7 - a$ : 3,5 appartient à $I_a$ pour tout $a$ de $]-\infty\,;3{,}5]$.

**Ex. 28** ★★★ **Les tarifs d'un transporteur**

(a) Tarif A : $0 < m < 0{,}5$, donc $]0\,;0{,}5[$. Tarif B : $0{,}5 \leqslant m \leqslant 2$ (inégalités larges, crochets fermés), donc $[0{,}5\,;2]$. Tarif C : $m > 2$, donc $]2\,;+\infty[$, avec un crochet ouvert en 2 et en $+\infty$.

(b) Elle a tort. L'intervalle du tarif A, $]0\,;0{,}5[$, a un crochet ouvert en 0,5 :
Donc $0{,}5 \notin ]0\,;0{,}5[$. En revanche, $0{,}5 \in [0{,}5\,;2]$. Un colis de 0,5 kg est facturé uniquement au tarif B.

**Ex. 28 (suite)**

(c) $\frac{7}{4} = 1{,}75$ et $0{,}5 \leqslant 1{,}75 \leqslant 2$, donc $\frac{7}{4} \in [0{,}5\,;2]$ : c'est le tarif B. Comme $5 > 4$, on a $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, donc $\sqrt{5} \in ]2\,;+\infty[$ : c'est le tarif C.

(d) « Au moins 10 » signifie $m \geqslant 10$ : tarif D, $[10\,;+\infty[$. Le tarif C correspond maintenant à $2 < m < 10$ (10 est exclu, car il relève du tarif D) : tarif C, $]2\,;10[$.

(e) Les intervalles $]0\,;0{,}5[$, $[0{,}5\,;2]$, $]2\,;10[$ et $[10\,;+\infty[$ se suivent sans laisser de trou. À chaque raccord, la borne n'appartient qu'à un seul des deux intervalles : 0,5 est seulement en B, 2 seulement en B, 10 seulement en D. Donc toute masse de $]0\,;+\infty[$ a un tarif et un seul.
Attention : c'est $]0\,;+\infty[$ et non $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$, car $m = 0$ est exclu.

## 5. *Intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien*

**Ex. 29** ★☆☆ **Automatismes : intersection et réunion d'intervalles**

(a) La zone commune va de 2 à 5. 2 est exclu de $]2\,;7]$, donc de l'intersection. 5 est dans les deux.
Donc $]2\,;7] \cap [-1\,;5] = ]2\,;5]$.

(b) La zone couverte au moins une fois va de $-1$ à 7. $-1$ est dans $[-1\,;5]$ et 7 dans $]2\,;7]$.
Donc la réunion vaut $[-1\,;7]$.

(c) Le premier intervalle s'arrête avant 0, le second commence après 1 : il n'y a aucune zone commune.
Donc $[-4\,;0[ \cap ]1\,;6] = \varnothing$
(et pas 0).

(d) Oui. Les deux morceaux se touchent en 1, qui appartient à $[-6\,;1]$. Il n'y a pas de trou, donc $[-6\,;1] \cup ]1\,;3] = [-6\,;3]$.

(e) Non. Le réel 1 est compris entre $-3$ et 4, mais $1 \notin [-3\,;0[$ et $1 \notin ]2\,;4]$. La réunion a un trou ($[0\,;2]$ y manque), donc ce n'est pas un intervalle.

(f) « et » se traduit par une intersection : $]-\infty\,;3] \cap ]-2\,;+\infty[ = ]-2\,;3]$.

**Ex. 30** ★☆☆ **Automatismes : complémentaire et ensembles finis**

(a) Les bornes $-5$ et 2 appartiennent à l'intervalle, donc elles sont exclues du complémentaire : $\overline{[-5\,;2]} = ]-\infty\,;-5[ \cup ]2\,;+\infty[$.

(b) Les réels qui ne sont pas strictement inférieurs à $-1$ vérifient $x \geqslant -1$. Le complémentaire est $[-1\,;+\infty[$.

**Ex. 30 (suite)**

(c) $0 \notin ]0\,;+\infty[$, donc 0 appartient au complémentaire. Le crochet s'inverse : $\overline{]0\,;+\infty[} = ]-\infty\,;0]$.

(d) Les éléments communs aux deux ensembles sont 3 et 9.
Donc $E \cap F = \{3\,;9\}$.

(e) $E \cup F = \{0\,;1\,;3\,;5\,;6\,;7\,;9\,;12\,;15\}$. On ne compte qu'une fois 3 et 9, donc $\text{Card}(E \cup F) = 6 + 5 - 2 = 9$.

(f) 2, 4 et 8 ne sont pas des multiples de 3, donc aucun n'appartient à $E$. L'intersection est l'ensemble vide : $E \cap \{2\,;4\,;8\} = \varnothing$. 0 est un nombre, pas un ensemble.

**Ex. 31** ★★☆ **Deux intervalles lus sur une droite graduée**

(a) $A$ a pour abscisse $-3{,}5$, $B$ a pour abscisse $-1$, $C$ a pour abscisse 2,5 et $D$ a pour abscisse 4.
Donc $I = [-3{,}5\,;2{,}5[$ et $J = ]-1\,;4]$.

(b) On trace $I$ et $J$ l'un sous l'autre : la zone commune va de $-1$ à 2,5. $-1$ est exclu de $J$ et 2,5 est exclu de $I$.
Donc $I \cap J = ]-1\,;2{,}5[$.

(c) La zone couverte au moins une fois va de $-3{,}5$ à 4, sans trou. $-3{,}5 \in I$ et $4 \in J$.
Donc $I \cup J = [-3{,}5\,;4]$.

(d) $2{,}5 \notin I$ (borne exclue), donc 2,5 n'est pas dans $I$ et $J$ à la fois : $2{,}5 \notin I \cap J$. En revanche $-1 < 2{,}5 \leqslant 4$, donc $2{,}5 \in J$. Il est dans l'un des deux, donc $2{,}5 \in I \cup J$.

(e) $-1$ est exclu de $J$, donc il est dans $\overline{J}$. 4 est dans $J$, donc il est exclu de $\overline{J}$. Conclusion :
$\overline{J} = ]-\infty\,;-1] \cup ]4\,;+\infty[$.

**Ex. 32** ★★☆ **Couples et produit cartésien**

(a) $\text{Card}(A) = 2$ et $\text{Card}(B) = 3$, donc
$\text{Card}(A \times B) = 2 \times 3 = 6$. $A \times B$ a 6 éléments.

(b) On fixe le premier élément dans $A$, puis on parcourt $B$ : $(1\,;4)$, $(1\,;6)$, $(1\,;9)$, $(4\,;4)$, $(4\,;6)$, $(4\,;9)$. On retrouve bien 6 couples.

(c) Non. Le premier élément d'un couple de $A \times B$ doit appartenir à $A$, or $6 \notin A$. En fait, $(6\,;1) \in B \times A$.
Comme l'ordre compte, $A \times B \neq B \times A$.

(d) $A \times A = \{(1\,;1)\,;(1\,;4)\,;(4\,;1)\,;(4\,;4)\}$. $(1\,;4)$ et $(4\,;1)$ sont deux couples différents.
Donc $\text{Card}(A \times A) = 2 \times 2 = 4$.

(e) Un programme est un couple (matin ; après-midi), donc un élément d'un produit cartésien. Il y a $5 \times 7 = 35$ programmes différents.

**Ex. 33** ★★★ **Opérations sur trois intervalles**

(a) $A$ va de $-4$ (inclus) à 1 (exclu), $B$ de $-1$ (exclu) à 6 (inclus). La zone commune va de $-1$ à 1 : $-1 \notin B$ et $1 \notin A$, donc les deux bornes sont exclues. On a donc $A \cap B = ]-1\,;1[$. La zone couverte au moins une fois va de $-4$ à 6 : $-4 \in A$ et $6 \in B$, donc $A \cup B = [-4\,;6]$.

(b) Tout élément de $A$ est strictement inférieur à 1, et tout élément de $C$ est strictement supérieur à 3 : aucun réel n'est à la fois dans $A$ et dans $C$.
Donc $A \cap C = \varnothing$. Malik a tort : 0 est un nombre, pas un ensemble. En plus, $0 \notin C$.

(c) $\overline{A} = ]-\infty\,;-4[ \cup [1\,;+\infty[$ : $-4$ est dans $A$, donc il est exclu du complémentaire ; 1 n'est pas dans $A$, donc il est inclus dans le complémentaire. De même, $\overline{C} = ]-\infty\,;3]$ : $3 \notin C$, donc $3 \in \overline{C}$.

(d) $A \cup C = [-4\,;1[ \cup ]3\,;+\infty[$. On a $0 \in A \cup C$ et $4 \in A \cup C$, mais 2 n'est ni dans $A$ ni dans $C$. Or un intervalle contient tous les réels compris entre deux de ses éléments.
Donc $A \cup C$ n'est pas un intervalle.

(e) $\overline{C} = ]-\infty\,;3]$. La zone commune avec $]-1\,;6]$ va de $-1$ (exclu, car $-1 \notin B$) à 3 (inclus, car 3 est dans $B$ et dans $\overline{C}$).
Donc $B \cap \overline{C} = ]-1\,;3]$.

**Ex. 34** ★★★ **Un intervalle qui dépend d'un réel $a$**

(a) $I = [-3\,;5]$. La zone commune va de 1 (exclu, car $1 \notin J$) à 5 (inclus, car 5 est dans $I$ et dans $J$), donc $I \cap J = ]1\,;5]$. La zone couverte au moins une fois va de $-3$ (inclus, dans $I$) à 8 (inclus, dans $J$), donc $I \cup J = [-3\,;8]$.

(b) Non. $I = [1\,;5]$ et $1 \in I$. Un réel est dans la réunion dès qu'il appartient à l'un des deux ensembles, donc $1 \in I \cup J$ même si $1 \notin J$. La réunion va de 1 à 8 sans trou : $I \cup J = [1\,;8]$.

(c) Si $a \leqslant 1$, alors $a \in I$ mais $a \notin J$, car $J$ ne contient que des réels strictement supérieurs à 1 : $I$ n'est pas inclus dans $J$. Si $1 < a < 5$, tout $x$ de $I$ vérifie $1 < a \leqslant x \leqslant 5 \leqslant 8$, donc $x \in J$. Conclusion : $I \subset J$ si et seulement si $a \in ]1\,;5[$.

(d) $I \cup K = [0\,;5] \cup ]5\,;10]$ : les deux morceaux se touchent en 5, et $5 \in I$.
Donc $I \cup K = [0\,;10]$ est un intervalle. En revanche, 5 n'est ni dans $[0\,;5[$ ni dans $K$. Comme 4 et 6 sont dans $[0\,;5[ \cup K$, ce n'est pas un intervalle.

**Ex. 34** **(suite)**

(e) 5 est le seul candidat commun, mais $5 \notin K$ (crochet ouvert). Aucun réel n'appartient aux deux ensembles, donc $I \cap K = \varnothing$ : $I$ et $K$ sont disjoints.

**Ex. 35** ★★★ **Les codes de Noé**

(a) Les éléments communs à $E$ et $F$ sont 3 et 8 : $E \cap F = \{3\,;8\}$, donc $\text{Card}(E \cap F) = 2$. Les éléments qui sont dans $E$ ou dans $F$ sont $E \cup F = \{1\,;3\,;5\,;8\,;9\}$, donc $\text{Card}(E \cup F) = 5$
(on ne compte 3 et 8 qu'une fois).

(b) Il y a $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) = 4 \times 3 = 12$ codes en tout. Un code à deux chiffres égaux a son chiffre dans $E$ et dans $F$, donc dans $E \cap F = \{3\,;8\}$ : ce sont $(3\,;3)$ et $(8\,;8)$. Noé peut donc créer $12 - 2 = 10$ codes à chiffres différents.

(c) On fixe d'abord le premier chiffre, puis on fait varier le second dans $F$ : $(3\,;3)$, $(3\,;8)$, $(3\,;9)$, $(8\,;3)$, $(8\,;8)$, $(8\,;9)$. Il y en a $2 \times 3 = 6$.

(d) $(8\,;5) \notin E \times F$ : $8 \in E$, mais son second élément 5 n'est pas dans $F$. En revanche, $(5\,;8) \in E \times F$, car $5 \in E$ et $8 \in F$. L'ordre du couple compte : $(8\,;5) \neq (5\,;8)$.

(e) Non. Les deux ensembles ont bien $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$ éléments, mais ce ne sont pas les mêmes. Par exemple, $(1\,;9) \in E \times F$, mais $(1\,;9) \notin F \times E$, car $1 \notin F$.
Donc $E \times F \neq F \times E$.

## 6. *Valeur absolue et distance*

**Ex. 36** ★☆☆ **Enlever la valeur absolue**

(a) $-12 < 0$, donc $|-12| = -(-12) = 12$.

(b) $-\frac{3}{5} < 0$, donc $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$.

(c) $6 - 15 = -9$ et $-9 < 0$, donc $|6 - 15| = 9$.

(d) $|-11| = 11$, donc $-|-11| = -11$. Le signe moins se trouve à l'extérieur de la valeur absolue, c'est pourquoi le résultat est négatif.

(e) $5 > 4$, donc $\sqrt{5} > 2$ et $\sqrt{5} - 2 > 0$. Ainsi $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$ : le nombre est positif, on le garde tel quel.

(f) $\pi < 4$, donc $\pi - 4 < 0$. Ainsi $|\pi - 4| = 4 - \pi$.

(g) $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ et $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, donc $2\sqrt{2} - 3 < 0$. Ainsi $|2\sqrt{2} - 3| = 3 - 2\sqrt{2}$.

**Ex. 37** ★☆☆ **Distance et valeur absolue**

(a) $|x-7|=3$.

(b) La distance de $x$ à $-5$ s'écrit $|x-(-5)|=|x+5|$. On obtient donc $|x+5|\leqslant 2$.

(c) $|-13-8|=|-21|=21$.

(d) $|-15-(-9)|=|-6|=6$.

(e) $|x+16|=|x-(-16)|$ : c'est la distance de $x$ à $-16$, et non à 16.

(f) $|x+6|$ est la distance de $x$ à $-6$. On cherche les réels situés à 8 de $-6$ : $x=-6-8=-14$ ou $x=-6+8=2$.

**Ex. 38** ★★☆ **Vrai ou faux sur la valeur absolue**

(a) Faux. $|x-12|$ est une distance et ne peut donc pas être négative. Aucun réel ne vérifie $|x-12|=-3$.

(b) Faux. Prenons $x=-5$ : $|-5|=5$ et $-x=-(-5)=5$, donc l'égalité est vraie. Lorsque $x$ est négatif, $-x$ est positif. En fait, tout réel $x\leqslant 0$ vérifie $|x|=-x$.

(c) Faux. Contre-exemple : avec $a=4$ et $b=-6$, on a $|a+b|=|-2|=2$, alors que $|a|+|b|=4+6=10$. Comme $2\neq 10$, la formule est fausse en général.

(d) Faux. La distance vaut $|-10-6|=|-16|=16$. Malik a calculé $|-10+6|=4$, c'est-à-dire une somme au lieu d'une différence.

**Ex. 39** ★★☆ **Écarts de température et d'altitude**

(a) L'écart vaut $|6-(-9)|=|15|=15$. Les températures diffèrent donc de 15 °C.

(b) La distance vaut $|18-(-35)|=|53|=53$. La mouette se trouve donc 53 m au-dessus du plongeur.

(c) $|T+4|$ est la distance de $T$ à $-4$ (et non à 4). On a $-4-2{,}5=-6{,}5$ et $-4+2{,}5=-1{,}5$.
Donc $T\in[-6{,}5\,;-1{,}5]$.

(d) Le centre vaut $\frac{-6+4}{2}=-1$ et le rayon $\frac{4-(-6)}{2}=5$.
Donc $T\in[-6\,;4]$ équivaut à $|T+1|\leqslant 5$.

**Ex. 40** ★★★ **Racines, $\pi$ et valeur absolue**

(a) $(\sqrt{3})^2=3$ et $2^2=4$. Comme $3<4$ et que les deux nombres sont positifs, $\sqrt{3}<2$.
Donc $\sqrt{3}-2<0$ et $|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$.
Ce nombre est bien positif.

(b) $\pi<3{,}15<3{,}2$, donc $\pi-3{,}2<0$. Ainsi $|\pi-3{,}2|=-(\pi-3{,}2)=3{,}2-\pi$.

**Ex. 40** (suite)

(c) $(\sqrt{3})^2=3>1=1^2$, donc $\sqrt{3}>1$ et $|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$. Alors $A=(2-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)=1$. Conclusion : $A=1$.

(d) $(\sqrt{2})^2=2<4=2^2$, donc $\sqrt{2}<2$ et l'intervalle est bien défini. Centre : $\frac{\sqrt{2}+2}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rayon : la moitié de la distance $|\sqrt{2}-2|=2-\sqrt{2}$, soit $\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Conclusion : $x\in[\sqrt{2}\,;2]$ équivaut à $\left|x-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|\leqslant 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Ex. 41** ★★★ **Tolérance sur des tiges d'acier**

(a) Centre : $\frac{118{,}6+121{,}4}{2}=\frac{240}{2}=120$. Rayon : $\frac{121{,}4-118{,}6}{2}=\frac{2{,}8}{2}=1{,}4$. L'intervalle a pour centre 120 et pour rayon 1,4.

(b) $L\in[120-1{,}4\,;120+1{,}4]$ équivaut à $|L-120|\leqslant 1{,}4$ : la distance de $L$ à 120 est au plus 1,4 mm.

(c) $|121{,}6-120|=1{,}6>1{,}4$ : la première tige est refusée.
$|118{,}9-120|=|-1{,}1|=1{,}1\leqslant 1{,}4$ : la seconde tige est acceptée.

(d) Ces réels forment le complémentaire de $[118{,}6\,;121{,}4]$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $]-\infty\,;118{,}6[\cup]121{,}4\,;+\infty[$. Ce sont les réels dont la distance à 120 est strictement supérieure à 1,4 : $|L-120|>1{,}4$.

(e) Le nouveau rayon vaut $1{,}4\div 2=0{,}7$. On a $120-0{,}7=119{,}3$ et $120+0{,}7=120{,}7$. Les longueurs acceptées forment donc $[119{,}3\,;120{,}7]$, ce qui équivaut à $|L-120|\leqslant 0{,}7$.

**Ex. 42** ★★★ **Centres négatifs et faux pas**

(a) La distance de $x$ à $-8$ s'écrit $|x-(-8)|=|x+8|$. L'inéquation est donc $|x+8|\leqslant 3$. Son centre est $-8$ et son rayon 3 : $-8-3=-11$ et $-8+3=-5$. Les solutions forment $[-11\,;-5]$.

(b) $|x+1{,}5|=|x-(-1{,}5)|$ est la distance de $x$ à $-1{,}5$. Cette distance vaut 4 pour $x=-1{,}5-4=-5{,}5$ ou $x=-1{,}5+4=2{,}5$. L'équation a deux solutions : $-5{,}5$ et 2,5.

(c) Lina a pris 1,5 comme centre, alors que $|x+1{,}5|$ est la distance de $x$ à $-1{,}5$. Les solutions sont les réels à plus de 4 de $-1{,}5$, c'est-à-dire le complémentaire de $[-5{,}5\,;2{,}5]$ : $]-\infty\,;-5{,}5[\cup]2{,}5\,;+\infty[$.

(d) Une distance n'est jamais négative : Tom a oublié la valeur absolue. $AB=|-12-5|=|-17|=17$, et aussi $AB=|5-(-12)|=|17|=17$.
Donc $AB=17$.

**Ex. 42** **(suite)**

(e) À au plus 3 de $A$ : $|x-(-12)| = |x+12| \leqslant 3$, soit $x \in [-15\,;-9]$. À au plus 15 de $B$ : $|x-5| \leqslant 15$, soit $x \in [-10\,;20]$. Les deux conditions ensemble donnent l'intersection : $[-15\,;-9] \cap [-10\,;20] = [-10\,;-9]$.

## 7. *Résoudre $|x-a| = r$ et $|x-a| \leqslant r$*

**Ex. 43** ★☆☆ **Automatismes : équations avec une valeur absolue**

(a) $|x-4|$ est la distance de $x$ à 4. Les réels à la distance 6 de 4 sont $4-6=-2$ et $4+6=10$. Il y a deux solutions : $x=-2$ ou $x=10$.

(b) $|x+6| = |x-(-6)|$ : c'est la distance de $x$ à $-6$, pas à 6. On obtient $x=-6-5=-11$ ou $x=-6+5=-1$.

(c) Une distance nulle veut dire que $x$ et 7 sont confondus : il y a une seule solution, $x=7$.

(d) Une distance n'est jamais négative, donc aucun réel ne convient : $S=\varnothing$.

(e) La distance à $-2$ s'écrit $|x-(-2)| = |x+2|$, d'où l'équation $|x+2|=3{,}5$. On trouve $x=-2-3{,}5=-5{,}5$ ou $x=-2+3{,}5=1{,}5$.

(f) $|8-x| = |x-8|$ : c'est la distance de $x$ à 8. Donc $x=8-3=5$ ou $x=8+3=11$. Vérification : $|8-5|=3$ et $|8-11|=3$.

**Ex. 44** ★☆☆ **Automatismes : de la valeur absolue à l'intervalle**

(a) Centre 5, rayon 2 : $5-2=3$ et $5+2=7$, donc $x \in [3\,;7]$.

(b) $|x+4| = |x-(-4)|$ : centre $-4$ (pas 4), rayon 3. On a $-4-3=-7$ et $-4+3=-1$, donc $x \in [-7\,;-1]$.

(c) « À moins de » est strict : $|x-12| < 0{,}5$. Les bornes sont 11,5 et 12,5, exclues : $x \in \,]11{,}5\,;12{,}5[$.

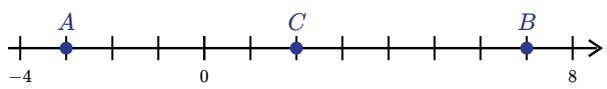
(d) Ce sont les réels dont la distance à 2 est strictement supérieure à 3 : c'est le complémentaire de $[-1\,;5]$, soit $]-\infty\,;-1[ \cup ]5\,;+\infty[$.

(e) $|x| = |x-0|$ : centre 0, rayon 8, donc $x \in [-8\,;8]$.

**Ex. 45** ★★☆ **Centre, rayon et contrôle**

(a) $A$ a pour abscisse $-3$ et $B$ a pour abscisse 7, donc $I=[-3\,;7]$.

(b) $c = \frac{-3+7}{2} = 2$ et $r = \frac{7-(-3)}{2} = 5$. Le point $C$ se place à l'abscisse 2, à 5 unités de $A$ et de $B$ :




**Ex. 45** **(suite)**

(c) $x \in [-3\,;7]$ équivaut à $|x-2| \leqslant 5$ : la distance de $x$ à 2 est au plus 5.

(d) $|8-2|=6$ et $6>5$, donc l'inégalité est fausse pour $x=8$. C'est cohérent, car $8>7$ donc $8 \notin I$.

(e) Non. Le centre de $[-9\,;-1]$ est $\frac{-9+(-1)}{2} = -5$ (et non 5), et son rayon est $\frac{-1-(-9)}{2} = 4$. La bonne traduction est $|x+5| \leqslant 4$. Test : $-9 \in [-9\,;-1]$, mais $|-9-5|=14>4$, donc l'écriture de Yanis est fausse.

**Ex. 46** ★★☆ **Tolérance de fabrication**

(a) La distance entre $\ell$ et 25 doit être au plus 0,2 : $|\ell - 25| \leqslant 0{,}2$.

(b) Centre 25, rayon 0,2 : $25-0{,}2=24{,}8$ et $25+0{,}2=25{,}2$. Les longueurs acceptées forment $[24{,}8\,;25{,}2]$.

(c) $|24{,}75-25| = 0{,}25$ et $0{,}25>0{,}2$. La tige est trop courte : elle est refusée.

(d) C'est le complémentaire de $[24{,}8\,;25{,}2]$ dans $\mathbb{R}$, donc $]-\infty\,;24{,}8[ \cup ]25{,}2\,;+\infty[$. Cette réunion n'est pas un intervalle.

**Ex. 47** ★★★ **Combien de solutions ?**

(a) $x+3 = x-(-3)$, donc $|x+3| = |x-(-3)|$. C'est la distance entre $x$ et $-3$ (et non 3).

(b) On cherche les réels à la distance 4 de $-3$ : $x=-3-4=-7$ ou $x=-3+4=1$. L'ensemble des solutions est $\{-7\,;1\}$.

(c) $|x+3|=0$ : la distance de $x$ à $-3$ est nulle, donc $x=-3$. Il y a une seule solution. $|x+3|=-2$ : une distance n'est jamais négative, donc il n'y a aucune solution. L'ensemble des solutions est $\varnothing$.

(d) Si $r<0$ : aucune solution, car une distance est positive ou nulle. Si $r=0$ : une seule solution, $x=-3$. Si $r>0$ : deux solutions, $-3-r$ et $-3+r$, qui sont distinctes. Conclusion : 0, 1 ou 2 solutions selon que $r$ est négatif, nul ou positif.

(e) Pour $x=6$ : $|6+3|=9$ et $9>5$, donc 6 n'est pas solution. Pourtant $6 \in [-2\,;8]$ : Inès se trompe. Elle a pris 3 comme centre au lieu de $-3$. Le centre est $-3$ et le rayon 5, donc l'ensemble des solutions est $[-3-5\,;-3+5] = [-8\,;2]$.

**Ex. 48** ★★★ **Réfrigérateur de pharmacie**

(a) « À moins de 1,5 de 5 » s'écrit $|T-5|<1{,}5$, c'est-à-dire $5-1{,}5<T<5+1{,}5$.
Donc $T\in]3{,}5\,;6{,}5[$. L'intervalle est ouvert, car l'inégalité est stricte.

(b) $|T-5|>2{,}5$ signifie que $T$ n'appartient pas à $[5-2{,}5\,;5+2{,}5]=[2{,}5\,;7{,}5]$. L'alarme sonne donc pour $T\in]-\infty\,;2{,}5[\cup]7{,}5\,;+\infty[$.

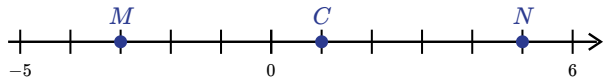
(c) $|7-5|=2$. Comme $2\geqslant 1{,}5$, la température n'est pas correcte. Comme $2\leqslant 2{,}5$, l'alarme ne sonne pas. Il existe donc une zone intermédiaire.

(d) Ce sont les $T$ tels que $1{,}5\leqslant|T-5|\leqslant 2{,}5$ : $T$ appartient à $[2{,}5\,;7{,}5]$ mais pas à $]3{,}5\,;6{,}5[$. L'ensemble cherché est $[2{,}5\,;3{,}5]\cup[6{,}5\,;7{,}5]$. Contrôle : 7 appartient bien à $[6{,}5\,;7{,}5]$.

(e) Centre : $\frac{1{,}8+6{,}2}{2}=4$. Rayon : $\frac{6{,}2-1{,}8}{2}=2{,}2$.
Donc $T\in[1{,}8\,;6{,}2]$ équivaut à $|T-4|\leqslant 2{,}2$.

**Ex. 49** ★★★ **Inclusions et distances**

(a) $I$ est l'intervalle de centre 1 et de rayon 4 : $I=[1-4\,;1+4]=[-3\,;5]$. On place $C$ en 1, $M$ en $-3$ et $N$ en 5, à 4 unités de chaque côté de $C$ :




(b) $|x|\leqslant 5$ équivaut à $x\in[-5\,;5]$. Or $-5\leqslant -3$ et $5\leqslant 5$, donc $[-3\,;5]\subset[-5\,;5]$. L'affirmation est vraie.

(c) Contre-exemple : $x=-4$. On a $|-4|=4\leqslant 5$, mais $|-4-1|=5>4$, donc $-4\notin I$. L'affirmation est fausse.

(d) Les solutions de $|x-4|\leqslant r$ forment $[4-r\,;4+r]$. Cet intervalle est inclus dans $[-3\,;5]$ si et seulement si $4-r\geqslant -3$ et $4+r\leqslant 5$, c'est-à-dire $r\leqslant 7$ et $r\leqslant 1$. Le plus grand réel $r$ qui convient est donc $r=1$ : c'est la borne 5 qui impose la limite.