Terminale spécialité / Échantillonnage

benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 1re : échantillonnage, espérance et variance*

À retenir : $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ (et non $E(X^2) - \mu$), $\sigma = \sqrt{V(X)}$; binomiale : $V = np(1-p)$. $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$: $V = 6$, $n = 30$ donne 0,2. Une fréquence observée fluctue : ce n'est pas la probabilité.

Ex. 1 ★☆☆ **Espérance et variance d'une loi finie** — Une variable aléatoire X suit la loi ci-dessous. Calcule en ligne.

x_i	-2	1	4
P(X = x_i)	0,2	0,5	0,3

(a) Calcule $\mu = E(X)$.

(b) Calcule $E(X^2)$.

(c) Lina calcule $V(X)$ en retranchant μ à $E(X^2)$. Quelle valeur obtient-elle ? Corrige son erreur et donne $V(X)$.

(d) Calcule l'écart type $\sigma(X)$.

(e) Calcule la probabilité exacte $P(|X - \mu| \geqslant 2)$.

Ex. 2 ★☆☆ **Binomiale, somme et moyenne d'un échantillon** — Calcule en ligne.

(a) X suit la loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}2)$. Calcule $E(X)$.

(b) X suit la loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}2)$. Calcule $V(X)$.

(c) Y suit la loi $\mathcal{B}(400\,;0{,}1)$. Calcule $\sigma(Y)$.

(d) T vérifie $E(T) = 12$ et $V(T) = 8$. Calcule $E(S_{25})$, où S_{25} est la somme d'un échantillon de taille 25 de T.

(e) Avec la même T, donne $E(M_{25})$ et $V(M_{25})$, où M_{25} est la moyenne de cet échantillon.

(f) Z a pour écart type $\sigma(Z) = 3$. Calcule $V(M_{100})$ pour un échantillon de taille 100 de Z.

Ex. 3 ★★☆ **Six échantillons de lancers** — Ben affirme que sa pièce truquée tombe sur pile avec la probabilité $p = 0{,}4$. Inès lance la pièce et forme six échantillons de 100 lancers chacun. Elle note la fréquence de pile observée dans chacun.

Éch.	1	2	3	4	5	6
Fréq.	0,37	0,44	0,41	0,35	0,40	0,43

(a) Les échantillons 1 et 2 ont la même taille mais des fréquences différentes. Comment s'appelle ce phénomène ? Explique-le.

Ex. 3 (suite)

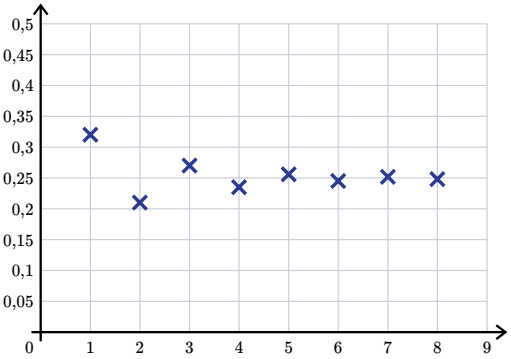
(b) Calcule la moyenne des six fréquences, puis l'écart entre la plus grande et la plus petite.

(c) Inès déclare : « La probabilité de pile vaut 0,44 : je l'ai observée dans l'échantillon 2. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) On note X le nombre de piles dans un échantillon de 100 lancers. Quelle est la loi de X ? Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(e) Quel échantillon donne le nombre de piles le plus éloigné de $E(X)$? Donne cet écart.

Ex. 4 ★★☆ **La roue de Malo se stabilise** — Malo fait tourner une roue de loterie dont le secteur gagnant a la probabilité 0,25. Le point d'abscisse k donne la fréquence de gain observée après $n = 100k$ parties. On note X la variable qui vaut 1 si une partie est gagnée et 0 sinon. M_n est la fréquence de gain sur n parties.



(a) Décris comment évoluent les fréquences observées quand n augmente.

(b) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(c) Calcule $V(M_{100})$ et $V(M_{800})$. Explique le lien avec l'allure du graphique.

(d) Vrai ou faux : « Avec 10 000 parties, la fréquence de gain sera exactement égale à 0,25. » Justifie.

Ex. 5 ★★★ **Le stand de Yanis** — Au stand de Yanis, une partie rapporte un gain X en euros (négatif en cas de perte). Sa loi est donnée ci-dessous, où p et q sont deux réels. Le gain moyen annoncé est $E(X) = 0{,}7$.

x_i	-2	1	6
P(X = x_i)	p	0,5	q

(a) Détermine p et q.

(b) Calcule $E(X^2)$, puis $V(X)$.

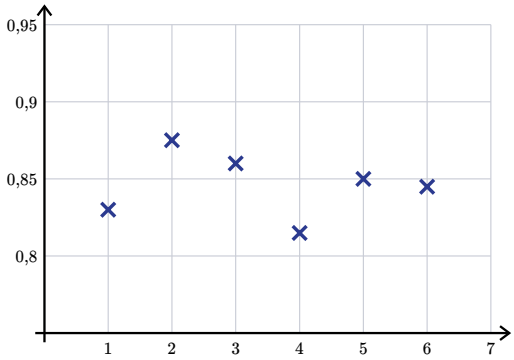
Ex. 5 **(suite)**

(c) Yanis lit $V(X)$ comme l'écart typique, en euros, entre le gain et sa moyenne. Corrige-le, puis donne $\sigma(X)$ à 0,01 près.

(d) Yanis joue 100 parties indépendantes. S est le gain total et M le gain moyen par partie. Calcule $E(S)$, $V(S)$, $E(M)$ et $V(M)$.

(e) Vrai ou faux ? « Sur ces 100 parties, l'écart type de M est 100 fois plus petit que $\sigma(X)$. » Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Les graines de Nadia** — Un semencier affirme que chaque graine de tomate germe avec la probabilité $p = 0{,}85$, indépendamment des autres. Pour un sachet de n graines, X est le nombre de graines qui germent et $F = \frac{X}{n}$ la fréquence de germination. Le nuage ci-dessous donne les fréquences observées par Nadia sur six sachets de 200 graines (abscisse : numéro du sachet).



(a) Pour $n = 200$, justifie la loi de X, puis calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ à 0,01 près.

(b) Nadia obtient $V(F)$ en divisant $V(X)$ par 200. Corrige son erreur, puis calcule $E(F)$, $V(F)$ et $\sigma(F)$ à 0,0001 près.

(c) Calcule la moyenne des six fréquences. Que représente ce nombre pour les 1 200 graines semées ?

(d) Le semencier vend aussi des sachets de 800 graines. Calcule $\sigma(F)$ à 0,0001 près pour $n = 800$. Par quel nombre $\sigma(F)$ a-t-il été divisé ?

(e) Vrai ou faux ? « Un sachet de 800 graines donne toujours une fréquence plus proche de 0,85 qu'un sachet de 200. » Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Le dé à quatre faces de Tom** — Tom lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4. X est le numéro obtenu et M_n la moyenne des numéros sur n lancers indépendants. Il simule avec le programme ci-dessous et obtient le tableau.

```
from random import randint

def moyenne(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + randint(1, 4)
    return s / n
```

n	10	100	1000	10000
Moyenne	2,9	2,43	2,516	2,4987

(a) Explique ce que contient `s` à la fin de la boucle, puis ce que renvoie `moyenne(n)`.

(b) Calcule $\mu = E(X)$ et $E(X^2)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$ à 0,01 près.

(c) Pour $n = 1\,000$, calcule $E(M_n)$, $V(M_n)$ et $\sigma(M_n)$ à 0,001 près.

(d) Tom relance `moyenne(100)` et obtient 2,61 au lieu de 2,43. Son programme est-il faux ? Justifie.

(e) Tom veut $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}03$. Avec `v` égal à $V(X)$, que vaut `n` après `n = 1` puis `while (v / n) ** 0.5 > 0.03: n = n + 1` ? Justifie.

2. *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

À retenir : Pour $\delta > 0$: $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$ et $P(|X - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$. On divise la variance σ^2, on écrit « au plus ». Un majorant supérieur à 1 n'apprend rien. Exemple : $V(X) = 4$, $\delta = 5$: au plus 0,16.

Ex. 8 ★☆☆ **Majorants en ligne** — Automatismes. Dans chaque cas, majore la probabilité demandée à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis conclus par une phrase.

(a) $E(X) = 20$ et $V(X) = 3$: majore $P(|X - 20| \geqslant 4)$.

(b) $E(X) = 50$ et $\sigma(X) = 7$: majore $P(|X - 50| \geqslant 10)$.

(c) $E(X) = -3$ et $V(X) = 0{,}8$: majore $P(|X + 3| \geqslant 2)$.

(d) $E(X) = 1{,}5$ et $V(X) = 0{,}09$: majore $P(X \leqslant 0{,}5 \text{ ou } X \geqslant 2{,}5)$.

(e) X a pour espérance μ et pour écart type $\sigma > 0$: majore $P(|X - \mu| \geqslant 5\sigma)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Intervalles centrés et événement contraire** — Automatismes. X est une variable aléatoire à valeurs entières, avec $E(X) = 30$ et $V(X) = 6$. Utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(a) Écris l'événement « $X \leqslant 25$ ou $X \geqslant 35$ » à l'aide d'une valeur absolue, puis majore sa probabilité.

(b) Minore $P(25 < X < 35)$.

Ex. 9 **(suite)**

(c) Écris $]22\,;38[$ sous la forme $]\mu-\delta\,;\mu+\delta[$, puis minore $P(22<X<38)$.

(d) X est entier : écris « $X<25$ ou $X>35$ » sous la forme $|X-30|\geqslant\delta$, puis majore sa probabilité.

(e) σ désigne l'écart type de X. Minore $P(30-2\sigma<X<30+2\sigma)$.

Ex. 10 ★★☆ **Les erreurs d'Inès** — Le nombre X de clients d'une boulangerie entre 7 h et 8 h vérifie $E(X)=40$ et $\sigma(X)=5$. Inès écrit : « $P(|X-40|\geqslant 20)\leqslant\frac{5}{20^2}=0{,}0125$, donc la probabilité que X s'écarte de 40 d'au moins 20 est égale à 0,0125. »

(a) Repère les deux erreurs d'Inès, puis écris le calcul et la phrase correctement.

(b) Inès applique ensuite l'inégalité avec $\delta=3$. Calcule le majorant obtenu. Qu'apprend-on sur $P(|X-40|\geqslant 3)$?

(c) Pour « traiter l'autre côté », Inès veut prendre $\delta=-20$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Détermine le plus petit entier δ pour lequel le majorant donné par l'inégalité vaut au plus 0,1.

Ex. 11 ★★☆ **QCM au hasard : majorant et vraie probabilité** — Un QCM compte 20 questions, chacune avec deux réponses possibles dont une seule est juste. Zoé répond au hasard et sa note X (1 point par bonne réponse) suit la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}5)$. Extrait de table :

k	6	7	13	14
P(X ⩽ k)	0,0577	0,1316	0,9423	0,9793

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majore la probabilité que la note de Zoé s'écarte de son espérance d'au moins 4 points.

(c) À l'aide de la table, calcule une valeur approchée de la probabilité exacte de cet événement.

(d) Vrai ou faux ? « L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne une valeur approchée de la probabilité. » Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Fléchettes : du majorant à la vraie probabilité** — À chaque lancer, Lucas marque X points. La loi de X est donnée ci-dessous.

x_i	0	2	4	6	8
P(X = x_i)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$, puis donne une valeur approchée de $\sigma(X)$ à 0,01 près.

(b) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majore la probabilité que Lucas marque 0 ou 8 points. Compare ensuite avec la valeur exacte lue dans le tableau.

Ex. 12 **(suite)**

(c) Lucas applique l'inégalité avec $\delta=2$. Qu'obtient-il ? Que lui apprend ce résultat ? Compare avec la vraie probabilité que X s'écarte de son espérance d'au moins 2.

(d) Pour quelles valeurs de $\delta>0$ le majorant donné par l'inégalité est-il strictement inférieur à 1 ? Exprime la condition à l'aide de $\sigma(X)$.

Ex. 13 ★★★ **Paquets de café : un programme de seuil** — La masse X (en g, arrondie au gramme) d'un paquet de café vérifie $E(X)=500$ et $\sigma(X)=6$. Un paquet est non conforme si sa masse n'est pas dans $]488\,;512[$. On considère le programme suivant.

```
sigma = 6
V = sigma**2
d = 1
while V / d**2 > 0.05:
    d = d + 1
print(d)
```

(a) Écris l'événement « le paquet est non conforme » avec une valeur absolue, puis majore sa probabilité. Exprime δ en nombre d'écarts types.

(b) Pourquoi la variable `d` doit-elle démarrer à 1 et pas à 0 ? Quelle condition du cours cela traduit-il ?

(c) Quelle valeur le programme affiche-t-il ? Justifie par un calcul, puis interprète ce nombre à l'aide d'un intervalle de masses.

(d) Tom remplace la ligne `V = sigma**2` par `V = sigma`. Quelle valeur obtient-il ? Explique son erreur.

(e) Mia utilise le programme correct et conclut : « exactement 5 % des paquets ont une masse hors de l'intervalle obtenu ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Un stand de fête : quand l'inégalité est atteinte** — Au stand de Léa, le gain X (en euros) d'un joueur vaut 0, 10 ou 20. On a $P(X=0)=P(X=20)=q$ et $P(X=10)=1-2q$, avec $0<q\leqslant 0{,}5$.

(a) Exprime $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de q.

(b) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majore la probabilité que le gain s'écarte de son espérance d'au moins 10 €. Calcule ensuite la vraie probabilité et conclus.

(c) On prend $q=0{,}05$. Compare le majorant et la vraie probabilité d'un écart d'au moins 5 € à l'espérance.

(d) Toujours avec $q=0{,}05$, Léa écrit : « la probabilité d'un écart d'au moins $2\sigma(X)$ vaut 0,25 ». Corrige sa phrase, puis calcule cette probabilité exacte.

3. *Utiliser l'inégalité : contraire, intervalle*

À retenir : Contraire : $P(|X-\mu|<\delta) \geqslant 1-\frac{V(X)}{\delta^2}$, bornes exclues. Un seul côté : si $\mu=20$, alors $X \geqslant 26$ entraîne $|X-20| \geqslant 6$. Si le minorant est négatif, on n'apprend rien.

Ex. 15 ★☆☆ **Contraire et intervalle centré** — X est une variable aléatoire à valeurs entières, avec $E(X)=40$ et $V(X)=16$. Utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(a) Écris l'événement contraire de $|X-40| \geqslant 6$ sous la forme d'un intervalle pour X.

(b) Minore $P(35<X<45)$.

(c) Écris $P(32 \leqslant X \leqslant 48)$ sous la forme $P(|X-40|<\delta)$, puis minore cette probabilité.

(d) Majore $P(X \leqslant 29 \text{ ou } X \geqslant 51)$.

Ex. 16 ★☆☆ **Un seul côté, intervalle non centré** — Sur 200 colis, chacun arrive en retard avec la probabilité 0,3, indépendamment des autres. Y est le nombre de colis en retard, donc Y suit la loi $\mathcal{B}(200\,;0{,}3)$.

(a) Calcule $E(Y)$ et $V(Y)$.

(b) Majore $P(Y \geqslant 75)$.

(c) Majore $P(Y \leqslant 48)$.

(d) L'intervalle $]48\,;75[$ n'est pas centré en $E(Y)$. Minore quand même $P(48<Y<75)$.

Ex. 17 ★★☆ **Les clients de la boulangerie** — Le nombre N de clients d'une boulangerie en une journée est un entier, avec $E(N)=120$ et $\sigma(N)=10$.

(a) Inès écrit : « le contraire de $|N-120| \geqslant 20$ est $100 \leqslant N \leqslant 140$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Minore $P(80<N<160)$ et interprète le résultat.

(c) Ramène $P(105 \leqslant N \leqslant 135)$ au meilleur δ possible, puis minore cette probabilité.

(d) Théo écrit : « $P(|N-120|<9) \geqslant 1-\frac{81}{100}=0{,}19$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Majore la probabilité d'avoir au moins 150 clients.

Ex. 18 ★★☆ **Le QCM de Zoé** — Zoé répond au hasard aux 120 questions d'un QCM à 4 choix. Z est son nombre de bonnes réponses, donc Z suit la loi $\mathcal{B}(120\,;0{,}25)$. Voici un programme :

```
v = 22.5
d = 1
while v / d**2 > 0.05:
    d = d + 1
print(d)
```

(a) Calcule $E(Z)$ et $V(Z)$.

(b) Trouve le plus petit réel $\delta>0$ pour lequel l'inégalité garantit $P(|Z-30|<\delta) \geqslant 0{,}9$. Traduis le résultat par un intervalle d'entiers.

Ex. 18 (suite)

(c) Explique ce que teste la condition `v / d**2 > 0.05`, puis donne la valeur affichée et interprète-la.

(d) Zoé a obtenu 46 bonnes réponses. Montre que $P(Z \geqslant 46) \leqslant 0{,}09$, puis interprète.

Ex. 19 ★★★ **Le stock de la pharmacie** — Chaque semaine, une pharmacie centrale vend X boîtes d'un médicament. X est un entier, avec $E(X)=500$ et $\sigma(X)=20$. Dans tout l'exercice, utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(a) Minore $P(450<X<550)$ et interprète le résultat.

(b) Minore $P(460<X<560)$ de deux façons : avec un intervalle centré inclus dans $]460\,;560[$, puis en majorant $P(X \leqslant 460)$ et $P(X \geqslant 560)$. Compare.

(c) La pharmacie a 570 boîtes en stock. Il y a rupture si $X>570$. Majore la probabilité d'une rupture.

(d) Détermine le plus petit stock entier S pour lequel l'inégalité garantit un risque de rupture $P(X>S)$ d'au plus 0,05.

(e) Les ventes de deux semaines sont indépendantes et suivent la loi de X. Trouve de même le stock minimal pour deux semaines, puis compare-le au double du stock d'une semaine.

Ex. 20 ★★★ **Le stand de Maëlle** — Au stand de Maëlle, une partie rapporte un gain algébrique X (en euros), dont voici la loi. Lina joue 30 parties indépendantes. S est son gain total, c'est-à-dire la somme des gains des 30 parties.

x_i	-2	0	3	10
P(X = x_i)	0,3	0,4	0,2	0,1

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Majore $P(|X-1| \geqslant 5)$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Calcule ensuite cette probabilité de façon exacte avec le tableau, puis compare.

(c) Calcule $E(S)$ et $V(S)$.

(d) Maëlle propose l'intervalle $]-20\,;80[$ et dit que l'inégalité garantit $P(-20<S<80) \geqslant 0{,}9$. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Ben affirme : « Lina a au moins 60 % de chances de ne pas perdre d'argent ($S \geqslant 0$). » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Lots de pièces (type bac)** — Une machine produit des pièces. Chacune est défectueuse avec la probabilité 0,04, indépendamment des autres. On prélève un lot de 2 500 pièces. X est le nombre de pièces défectueuses du lot, donc X suit la loi $\mathcal{B}(2500\,;0{,}04)$.

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Montre que $P(80<X<120) \geqslant 0{,}76$.

(c) Noé écrit : « X est entier, donc $P(81 \leqslant X \leqslant 119) \geqslant 0{,}76$, mais on ne peut rien dire de $P(80 \leqslant X \leqslant 120)$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 21 **(suite)**

(d) Un client refuse le lot s'il contient au moins m pièces défectueuses.

```
for m in [110, 120, 130, 140]:
    print(m, round(96 / (m - 100)**2, 3))
```

Que représente le second nombre affiché ? Lequel de ces seuils garantit un risque de refus d'au plus 10 % ?

(e) On exécute 5 fois ce programme.

```
from random import random
c = 0
for k in range(1000):
    x = 0
    for i in range(2500):
        if random() < 0.04:
            x = x + 1
    if 80 < x < 120:
        c = c + 1
print(c / 1000)
```

Voici les valeurs affichées.

Essai	1	2	3	4	5
Affichage	0,951	0,957	0,949	0,960	0,954

Que représente la valeur affichée ? Ces résultats contredisent-ils le minorant 0,76 ? Justifie.

4. *Inégalité de concentration*

À retenir : $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$, avec V la variance d'UNE observation : on divise par n, on prend $V = \sigma^2$, et $V = p(1-p)$ pour une fréquence. Exemple : $V = 4$, $n = 100$, $\delta = 0{,}5$ donne $\frac{4}{100 \times 0{,}25} = 0{,}16$.

Ex. 22 ★☆☆ **Majorants en ligne** — Dans chaque cas, X est la variable d'une observation, d'espérance μ ; M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de X et F_n la fréquence d'un succès. Donne un majorant de $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta)$ (ou de $P(|F_n - p| \geqslant \delta)$) avec l'inégalité de concentration.

(a) $V(X) = 6$, $n = 120$, $\delta = 0{,}5$.

(b) $\sigma(X) = 3$, $n = 200$, $\delta = 0{,}5$.

(c) Succès de probabilité $p = 0{,}2$, $n = 500$, $\delta = 0{,}05$.

(d) $V(X) = 12$, $n = 150$, $\delta = 1$.

(e) $\sigma(X) = 0{,}8$, $n = 40$, $\delta = 0{,}2$.

(f) Succès de probabilité $p = 0{,}9$, $n = 1\,000$, $\delta = 0{,}02$.

Ex. 23 ★☆☆ **Minorants : transformer l'événement** — X est la variable d'une observation, d'espérance μ et de variance V. M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de X, S_n leur somme et F_n la fréquence d'un succès. Donne un minorant de la probabilité demandée.

(a) $V = 5$, $n = 50$: $P(|M_{50} - \mu| < 1)$.

(b) $\mu = 20$, $\sigma(X) = 1{,}5$, $n = 60$: $P(19{,}5 < M_{60} < 20{,}5)$.

(c) $\mu = 3$, $V = 2$, $n = 250$: $P(|S_{250} - 750| < 50)$.

Ex. 23 **(suite)**

(d) Succès de probabilité $p = 0{,}4$, $n = 400$: $P(0{,}35 < F_{400} < 0{,}45)$.

Ex. 24 ★★☆ **Le gain moyen d'Hugo à la fête foraine** — À un stand de fête foraine, le gain d'Hugo en euros à une partie est une variable X de loi :

x_i	-1	0	5
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

Hugo joue 300 parties indépendantes. M_{300} est son gain moyen par partie et S_{300} son gain total.

(a) Calcule $\mu = E(X)$ et $V(X)$.

(b) Léna applique Bienaymé-Tchebychev à X avec $\delta = 0{,}5$ pour majorer $P(|M_{300} - \mu| \geqslant 0{,}5)$. Quel majorant obtient-elle ? Explique son erreur et corrige.

(c) Déduis-en un minorant de la probabilité que le gain total S_{300} soit strictement compris entre 0 € et 300 €.

Ex. 25 ★★☆ **Sachets de farine et programme de seuil** — Une machine remplit des sachets de farine. La masse d'un sachet a pour espérance 1 000 g et pour écart type 6 g. On pèse n sachets pris au hasard, indépendants. M_n est leur masse moyenne.

```
n = 1
while ........ :
    n = n + 1
print(n)
```

(a) Montre que $P(|M_n - 1\,000| \geqslant 2) \leqslant \frac{9}{n}$.

(b) Complète la ligne 2 du programme pour qu'il affiche le plus petit n tel que ce majorant soit $\leqslant 0{,}05$. Qu'affiche-t-il ?

(c) Malik affirme : « avec ce nombre de sachets, au moins 95 % des sachets pèsent entre 998 g et 1 002 g ». Vrai ou faux ? Justifie.

(d) On veut maintenant une précision de 1 g avec le même risque 0,05. Modifie la ligne 2 du programme. Qu'affiche-t-il alors ?

Ex. 26 ★★★ **Autonomie des trottinettes : de la somme à la moyenne** — Une entreprise loue des trottinettes. L'autonomie d'une batterie neuve, en km, est une variable X d'espérance 25 km et d'écart type 4 km. On teste n batteries prises au hasard, d'autonomies $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi que X. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la distance totale et $M_n = \frac{S_n}{n}$ l'autonomie moyenne.

(a) Donne μ et $V(X)$ pour UNE batterie. Explique pourquoi $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de la loi de X.

(b) Pour $n = 50$, Nora écrit : $P(|M_{50} - 25| \geqslant 1) \leqslant \frac{4}{50 \times 1^2} = 0{,}08$. Trouve son erreur et corrige le majorant.

(c) Montre que $1\,200 < S_{50} < 1\,300$ équivaut à $|M_{50} - 25| < 1$. Minore alors $P(1\,200 < S_{50} < 1\,300)$ et interprète en km.

Ex. 26 (suite)

(d) Exprime $E(M_n)$ et $V(M_n)$ en fonction de n, puis montre, avec Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n, que $P(|M_n - 25| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{64}{n}$.

(e) Déduis-en la limite de $P(|M_n - 25| \geqslant 0{,}5)$ quand n tend vers $+\infty$. Interprète pour l'autonomie moyenne.

Ex. 27 ★★★ **Enquête sur le vélo et simulation de Ben** — Inès veut estimer la proportion p, inconnue, des lycéens d'une grande ville qui viennent à vélo. Elle interroge n lycéens au hasard (tirages assimilés à des tirages indépendants) et note F_n la fréquence des cyclistes. Pour tester la méthode, Ben simule 200 enquêtes de taille 625 avec $p = 0{,}3$:

```
from random import random
def frequence(n, p):
    s = sum(1 for i in range(n) if random() < p)
    return s / n
c = 0
for k in range(200):
    if abs(frequence(625, 0.3) - 0.3) >= 0.04:
        c = c + 1
print(c / 200)
```

(a) Pour un lycéen interrogé, X vaut 1 s'il vient à vélo et 0 sinon. Donne $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de p, puis montre que $V(X) \leqslant \frac{1}{4}$.

(b) Sans connaître p, minore $P(|F_{625} - p| < 0{,}04)$ et interprète dans le contexte.

(c) Que contient `c` à la fin du programme ? Que représente la valeur affichée ?

(d) Une exécution affiche `0.03`. Calcule le majorant de l'inégalité de concentration pour $p = 0{,}3$, puis commente.

(e) Inès veut une fréquence à moins de 0,03 de p avec un risque d'au plus 0,1. Combien de lycéens l'inégalité de concentration lui conseille-t-elle d'interroger au minimum ?

Ex. 28 ★★★ **Combien de baguettes pour la boulangerie de Zoé ?** — Chez Zoé, boulangère, le nombre de baguettes achetées par un client est une variable X de loi :

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,1	0,4	0,3	0,2

Un jour donné, 200 clients passent ; leurs achats $X_1, \dots, X_{200}$ sont indépendants et de même loi que X. On note S_{200} le nombre total de baguettes demandées et $M_{200} = \frac{S_{200}}{200}$.

(a) Calcule $\mu = E(X)$ et $V(X)$ pour un client. Que représente M_{200} ?

(b) Majore $P(|M_{200} - \mu| \geqslant 0{,}1)$ en citant l'inégalité utilisée et ses hypothèses.

(c) Zoé prépare 340 baguettes. Montre que si $S_{200} > 340$, alors $|M_{200} - \mu| \geqslant 0{,}1$. Majore la probabilité de manquer de baguettes.

Ex. 28 (suite)

(d) Zoé prépare b baguettes (b entier, $b > 200\mu$). Majore $P(S_{200} > b)$ en fonction de b à l'aide de l'inégalité de concentration.

(e) Déduis-en le plus petit b pour lequel cette méthode garantit un risque de rupture d'au plus 0,1.

5. *Loi faible des grands nombres*

À retenir : J'encadre $0 \leqslant P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$, puis gendarmes : limite 0 (ex. $V = 2$, $\delta = 0{,}5$: majorant $\frac{8}{n}$). M_n est proche de μ, pas égale, et aucun écart passé n'est compensé.

Ex. 29 ★★★ **Majorer, minorer, passer à la limite** — Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 12$ et $V(X) = 5$. M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de X.

(a) Donne un majorant de $P(|M_{200} - 12| \geqslant 0{,}5)$.

(b) Donne un majorant de la probabilité que $M_{80} \leqslant 11$ ou $M_{80} \geqslant 13$.

(c) Calcule le majorant de $P(|M_{500} - 12| \geqslant 0{,}1)$ donné par l'inégalité de concentration. Que t'apprend-il ?

(d) Donne un minorant de $P(11{,}5 < M_{400} < 12{,}5)$.

(e) Montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 12| \geqslant 0{,}5) = 0$.

Ex. 30 ★★★ **Vrai ou faux à la roulette** — À la roulette, la probabilité que le rouge sorte vaut $\frac{18}{37}$, comme celle du noir. Les tours sont indépendants. F_n est la fréquence du rouge sur n tours. Vrai ou faux ? Justifie.

(a) « Le rouge est sorti 8 fois de suite, donc le noir a plus de chances de sortir au tour suivant. »

(b) « Sur 100 000 tours, la fréquence du rouge sera exactement égale à $\frac{18}{37}$. »

(c) « Plus n est grand, plus $P\left(\left|F_n - \frac{18}{37}\right| \geqslant 0{,}01\right)$ est proche de 0. »

(d) « Après 10 000 tours, l'écart entre F_n et $\frac{18}{37}$ ne peut pas dépasser 0,01. »

(e) « On peut estimer la probabilité du rouge par la fréquence observée sur un très grand nombre de tours. »

Ex. 31 ★★☆ **Simuler des moyennes de lancers de dé** — On lance un dé équilibré à six faces. X est le résultat d'un lancer. M_n est la moyenne de n lancers indépendants. Ben écrit ce programme :

```
from random import randint
def ecart(n, N, d):
    e = 0
    for j in range(N):
        s = 0
        for k in range(n):
            s = s + randint(1, 6)
        if abs(s / n - 3.5) >= d:
            e = e + 1
    return e / N
```

(a) Que représente `s / n` ? Que renvoie `ecart(n, N, d)` ?

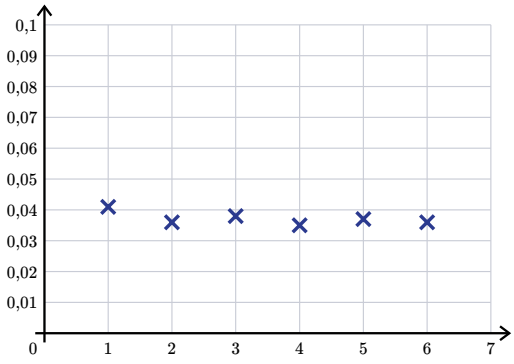
(b) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(c) Majore $P(|M_{100} - 3{,}5| \geqslant 0{,}5)$ à l'aide de l'inégalité de concentration.

(d) Ben obtient `ecart(100, 5000, 0.5)` $= 0.0036$. Ce résultat contredit-il ta réponse précédente ? Justifie.

(e) Montre que $P(|M_n - 3{,}5| \geqslant 0{,}5)$ tend vers 0. Qu'en déduis-tu pour les valeurs renvoyées par `ecart(n, 5000, 0.5)` quand n grandit ?

Ex. 32 ★★☆ **Contrôle de flacons : corriger Léa** — Une usine produit des flacons. Une proportion inconnue p de ces flacons est mal remplie. On contrôle n flacons, assimilés à des tirages indépendants. F_n est la fréquence des flacons mal remplis. Le nuage donne F_n pour $n = 1000k$ (en abscisse : k).



(a) Justifie que $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, puis que $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02) \leqslant \frac{625}{n}$.

(b) Léa écrit : « $\frac{625}{n}$ tend vers 0, donc $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02)$ tend vers 0. » Complète sa justification.

(c) Léa conclut : « Donc, pour n assez grand, $F_n = p$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) À l'aide du nuage, propose une estimation de p. Minore $P(|F_{6000} - p| < 0{,}02)$.

Ex. 33 ★★★ **Tombola : du modèle à la garantie** — Une association vend des tickets de tombola. Le bénéfice de l'association sur un ticket est une variable aléatoire X (en euros), qui suit la loi ci-dessous. Les tickets sont indépendants. On note $\mu = E(X)$. M_n est le bénéfice moyen par ticket sur n tickets vendus, et $S_n = n \times M_n$ est le bénéfice total.

x_i	3	1	−7
P(X = x_i)	0,7	0,2	0,1

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Montre que, pour tout réel $\delta > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$. Interprète ce résultat pour l'association.

(c) Détermine le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de concentration garantit $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}4) \leqslant 0{,}05$.

(d) Pour cette valeur de n, donne un intervalle qui contient le bénéfice total S_n avec une probabilité d'au moins 0,95. Justifie.

(e) Le trésorier Malik affirme : « Avec ce nombre de tickets, l'association est sûre de faire un bénéfice total positif. » Vrai ou faux ? Justifie.

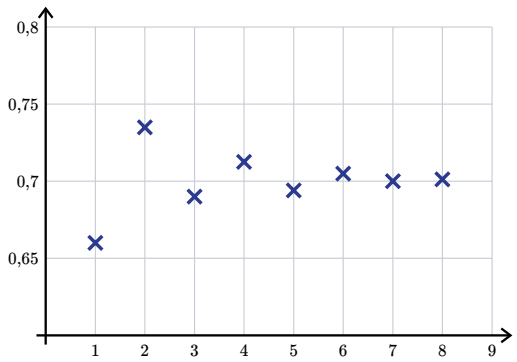
Ex. 34 ★★★ **Semis simulés et indépendance** — Une graine de tomate germe avec la probabilité 0,7, indépendamment des autres. F_n est la fréquence des graines germées parmi n graines semées. Ben simule un semis avec ce programme :

```
from random import random

def germe(n):
    c = 0
    for k in range(n):
        if random() < 0.7:
            c = c + 1
    return c / n
```

(a) Que modélise le test `random() < 0.7` ? Que contient `c` à la fin de la boucle ? Que renvoie `germe(n)` ?

(b) Ben place les valeurs de `germe(100*k)` pour k allant de 1 à 8 (abscisse k) :



Décris le nuage et explique-le avec la loi des grands nombres.

Ex. 34 (suite)

(c) Les 100 premières graines simulées donnent 66 graines germées. Inès affirme : « Les suivantes vont germer plus souvent, pour rattraper le retard. » Vrai ou faux ? Justifie, puis explique pourquoi F_n se rapproche quand même de 0,7.

(d) Hugo modifie le programme : il tire un seul nombre `r = random()` avant la boucle, puis teste `r < 0.7` à chaque tour. Quelles valeurs sa fonction peut-elle renvoyer ? La loi des grands nombres s'applique-t-elle ? Justifie.

(e) En réalité, la probabilité p de germination d'une variété est inconnue. Explique comment l'estimer, et pourquoi on ne peut pas écrire $p = F_n$.

Ex. 35 ★★★ Quiz au hasard : fréquence et nombre de succès — Yanis répond au hasard à un quiz de n questions vrai ou faux. Chaque réponse est juste avec la probabilité 0,5, indépendamment des autres. S_n est le nombre de bonnes réponses et $F_n = \frac{S_n}{n}$. Voici des valeurs pour $n = 20$:

k	6	7	13	14
P(S20 ⩽ k)	0,0577	0,1316	0,9423	0,9793

(a) Donne la loi de S_n, puis $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(F_n)$ et $V(F_n)$ en fonction de n.

(b) Pour $n = 20$, écris l'événement $|F_{20} - 0{,}5| \geqslant 0{,}2$ à l'aide de S_{20}. Majore ensuite sa probabilité avec l'inégalité de concentration.

(c) À l'aide du tableau, calcule $P(|F_{20} - 0{,}5| \geqslant 0{,}2)$. Que penses-tu du majorant trouvé à la question précédente ?

(d) Tom affirme : « F_n se rapproche de 0,5, donc S_n se rapproche de $\frac{n}{2}$. » On donne $P(S_{20} = 10) \approx 0{,}1762$ et $P(S_{100} = 50) \approx 0{,}0796$. A-t-il raison ? Justifie avec $V\left(S_n - \frac{n}{2}\right)$.

(e) Ben cherche le plus petit n pour lequel l'inégalité de concentration garantit $P(|F_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}05) \leqslant 0{,}03$. Complète la condition, puis trouve n par le calcul :

```
n = 1
while ........ :
    n = n + 1
print(n)
```

6. *Choisir la taille d'un échantillon*

À retenir : Pour avoir $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \alpha$, il suffit que $n \geqslant \frac{V}{\alpha\delta^2}$. On arrondit toujours à l'entier supérieur : $520{,}3 \to 521$. Si p est inconnu, on prend $V = \frac{1}{4}$. « Au moins 95 % » donne $\alpha = 0{,}05$. Si on divise δ par 2, n est multiplié par 4.

Ex. 36 ★★★ Tailles minimales en ligne — Dans chaque cas, M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable de variance $V = \sigma^2$. Pour une fréquence, $V = p(1-p)$. Donne le plus petit entier n tel que $\frac{V}{n\delta^2} \leqslant \alpha$.

(a) $V = 9$, $\delta = 0{,}5$ et $\alpha = 0{,}04$.

(b) $V = 2{,}5$, $\delta = 0{,}1$ et $\alpha = 0{,}03$.

(c) $V = 16$, et l'on veut $|M_n - \mu| < 1$ avec une probabilité d'au moins 0,9.

(d) Sondage : p est inconnu, $\delta = 0{,}02$ et $\alpha = 0{,}03$.

(e) Fréquence d'un succès de probabilité $p = 0{,}2$, avec une précision de 3 points et une probabilité d'au moins 99 %.

(f) Écart type $\sigma = 1{,}5$, $\delta = 0{,}4$ et $\alpha = 0{,}07$.

Ex. 37 ★★★ Traduire, isoler, ajuster — Les questions sont indépendantes. Les réels V, δ et α sont strictement positifs.

(a) « La fréquence doit être à moins de 4 points de p avec une probabilité d'au moins 92 % ». Donne δ et α.

(b) Isole n dans l'inéquation $\frac{V}{n\delta^2} \leqslant \alpha$, où n est un entier strictement positif.

(c) Un élève trouve $\frac{V}{\alpha\delta^2} = 912{,}1$ et prend $n = 912$. Corrige son erreur.

(d) Pour une précision δ, on trouve $\frac{V}{\alpha\delta^2} = 1\,500$. Donne la taille minimale pour la précision $\frac{\delta}{2}$, avec les mêmes V et α.

(e) Avec les données de la question précédente, donne la taille minimale pour la précision 3δ.

(f) On a $V = 4$, $n = 400$ et $\alpha = 0{,}1$. Détermine la plus petite précision δ telle que $\frac{V}{n\delta^2} \leqslant \alpha$.

Ex. 38 ★★★ Contrôle qualité : le programme de Lina — Une usine contrôle n pièces prélevées au hasard (tirages assimilés à des tirages avec remise). La proportion p de pièces défectueuses est inconnue. F_n est la fréquence des pièces défectueuses de l'échantillon. Lina veut le plus petit entier n tel que $\frac{0{,}25}{n\delta^2} \leqslant \alpha$. Elle écrit :

```
def taille(delta, alpha):
    n = 1
    while 0.25/(n*delta**2) <= alpha:
        n = n + 1
    return n
```

(a) Explique pourquoi on peut remplacer $V = p(1-p)$ par 0,25 alors que p est inconnu.

(b) Que renvoie `taille(0.03, 0.1)` avec ce programme ? Explique pourquoi ce résultat est absurde.

(c) Corrige la ligne 3 du programme.

(d) Une fois le programme corrigé, que renvoie `taille(0.03, 0.1)` ? Interprète ce résultat.

(e) Explique pourquoi le programme corrigé s'arrête toujours, quels que soient $\delta > 0$ et $\alpha > 0$.

Ex. 39 ★★☆ **Moyenne de mesures d'un thermomètre** — À chaque mesure, un thermomètre commet une erreur X, en dixièmes de degré, dont voici la loi :

x_i	-2	-1	0	1	2
P(X = x_i)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Ben fait n mesures indépendantes. M_n est la moyenne des n erreurs.

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Ben veut que M_n appartienne à $]-0{,}3\,;0{,}3[$ avec une probabilité d'au moins 0,96. Identifie μ, δ et α, puis écris une condition suffisante sur n.

(c) Résous cette inéquation et donne le plus petit nombre de mesures qui convient d'après cette condition.

(d) Ben n'a le temps de faire que 300 mesures. Quelle probabilité minimale l'inégalité garantit-elle pour que M_{300} appartienne à $]-0{,}3\,;0{,}3[$?

Ex. 40 ★★★ **Sondage sur le tramway : jusqu'où peut-on économiser ?** — Un institut veut estimer la proportion p d'habitants favorables à un projet de tramway. Il interroge n personnes au hasard (tirages assimilés à des tirages avec remise). F_n est la fréquence des réponses favorables, avec $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$. Objectif : F_n à moins de 5 points de p avec une probabilité d'au moins 94 %.

(a) Détermine une taille n qui garantit l'objectif quelle que soit la valeur de p.

(b) Le maire exige une précision de 2,5 points, avec le même risque. Un stagiaire propose $4 \times 1\,667 = 6\,668$ personnes. D'où vient ce facteur 4 ? Sa taille est-elle la plus petite que donne la méthode ? Justifie.

(c) Une enquête antérieure assure que $p \leqslant 0{,}3$. Montre qu'alors $p(1-p) \leqslant 0{,}21$, puis déduis-en une taille plus faible pour une précision de 2,5 points.

(d) Un adjoint propose de garder la précision de 2,5 points et d'accepter un risque de 12 %. Quelle taille suffit alors, avec $p \leqslant 0{,}3$? Qu'est-ce qui économise le plus : doubler α ou doubler δ ?

Ex. 41 ★★★ **Pesées au laboratoire : le programme de Noé** — Noé répète n pesées indépendantes d'un morceau de minerai. Chaque pesée X a pour espérance la masse exacte μ et pour écart type 0,7 mg. M_n est la moyenne des n pesées. Noé veut $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}2) \leqslant 0{,}1$. Pour trouver n, il commence ce programme :

```
def taille(V, d, a):
    n = 1
    while ..........:
        n = n + 1
    return n
```

(a) Identifie $V(X)$, δ et α, puis détermine par le calcul le plus petit entier n tel que $\frac{V(X)}{n\delta^2} \leqslant \alpha$. Justifie que cette taille convient.

Ex. 41 (suite)

(b) Complète la ligne 3 pour que `taille(V, d, a)` renvoie le plus petit entier n tel que $\frac{V}{nd^2} \leqslant a$. Quel appel Noé doit-il écrire ?

(c) Noé achète une balance dont l'écart type vaut 0,35 mg. Avec le même objectif, que renvoie le programme complété ? Justifie par le calcul.

(d) Avec l'ancienne balance, Noé ne fait que 50 pesées. Quelle est la plus petite précision δ que l'inégalité de concentration garantit, avec un risque de 0,1 ?

Ex. 42 ★★★ **Graines qui ne germent pas : majorant ou probabilité exacte ?** — Un semencier sait que 10 % de ses graines ne germent pas. Dans un sachet de n graines (tirages assimilés à des tirages avec remise), X est le nombre de graines qui ne germent pas et $F_n = \frac{X}{n}$. Voici un extrait de table pour $n = 100$:

k	5	6	13	14
P(X ⩽ k)	0,0576	0,1172	0,8761	0,9274

(a) Donne la loi de X, puis calcule $E(F_n)$ et $V(F_n)$ en fonction de n.

(b) Pour $n = 100$, traduis l'événement $|F_{100} - 0{,}1| \geqslant 0{,}04$ à l'aide de X, puis calcule sa probabilité avec la table.

(c) Compare ce résultat avec le majorant que donne l'inégalité de concentration pour $n = 100$.

(d) Détermine une taille n de sachet qui garantit $P(|F_n - 0{,}1| \geqslant 0{,}04) \leqslant 0{,}1$.

(e) Inès affirme : « Avec moins de graines que cette taille, la probabilité dépasse forcément 0,1. » Son raisonnement est-il valable ? Justifie.

7. *Problèmes type bac*

À retenir : Concentration : $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$, où V est la variance d'une seule observation. Ex. : $V = 4$, $n = 100$, $\delta = 0{,}5$ donnent 0,16. Piège : oublier n. Taille : $n \geqslant \frac{V}{\alpha\delta^2}$.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : majorants et minorants** — Dans chaque cas, M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable X d'espérance μ. Calcule de tête ou en une ligne la borne demandée.

(a) $\mu = 8$, $V(X) = 6$, $n = 160$: majore $P(|M_{160} - 8| \geqslant 0{,}5)$.

(b) $\sigma(X) = 4$, $n = 200$: minore $P(|M_{200} - \mu| < 1)$.

(c) X vaut 1 avec la probabilité 0,3 et 0 sinon, $n = 840$: majore $P(|M_{840} - 0{,}3| \geqslant 0{,}05)$.

(d) $\mu = 7$, $V(X) = 2{,}4$: majore $P(M_{60} \leqslant 6{,}6 \text{ ou } M_{60} \geqslant 7{,}4)$.

(e) $\mu = 12$, $V(X) = 9$: minore $P(11{,}5 < M_{250} < 12{,}5)$.

Ex. 43 **(suite)**

(f) $V(X) = 5$: majore $P(|X - \mu| \geqslant 2)$, puis $P(|M_{50} - \mu| \geqslant 2)$. Compare.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : taille d'échantillon et transformations** — Réponds en une ou deux lignes de calcul.

(a) Avec $V(X) = 0{,}16$, quelle taille n minimale l'inégalité de concentration donne-t-elle pour $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}05$?

(b) F_n est la fréquence d'un caractère de proportion inconnue p dans un échantillon de taille n. Quelle taille n minimale garantit $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02) \leqslant 0{,}1$?

(c) X prend des valeurs entières, avec $E(X) = 30$ et $V(X) = 16$. Écris $\{23 \leqslant X \leqslant 37\}$ sous la forme $|X - 30| < \delta$, puis minore sa probabilité.

(d) Pour $n = 300$ et un écart δ donné, le majorant de concentration vaut 0,12. Que vaut-il pour $n = 900$ avec le même δ ?

(e) Avec les mêmes données ($n = 300$, majorant 0,12), que devient le majorant si on divise δ par 2 ?

Ex. 45 ★★☆ **Le stand de la fête foraine** — À un stand de fête foraine, le gain algébrique G de Noé pour une partie (en euros) suit la loi ci-dessous. On note $\mu = E(G)$.

g_i	-1	2	8
P(G = g_i)	0,5	0,4	0,1

(a) Calcule μ et $V(G)$.

(b) Calcule $\sigma(G)$. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minore $P(|G - \mu| < 2\sigma(G))$, puis écris cet événement sous forme d'intervalle.

(c) Noé joue 810 parties indépendantes et M_{810} est son gain moyen. Montre que $P(|M_{810} - \mu| \geqslant 0{,}3) \leqslant 0{,}1$.

(d) Interprète ce résultat dans le contexte, à l'aide d'un intervalle.

(e) Combien de parties faut-il au minimum pour que l'inégalité de concentration garantisse $|M_n - \mu| < 0{,}3$ avec une probabilité d'au moins 0,95 ?

Ex. 46 ★★☆ **Les jours de pluie en avril** — Dans une ville, on admet que chaque jour d'avril il pleut avec la probabilité 0,5, indépendamment des autres jours. X est le nombre de jours de pluie sur 20 jours observés. Extrait de table :

k	5	6	13	14
P(X ⩽ k)	0,0207	0,0577	0,9423	0,9793

(a) Donne la loi de X, son espérance et sa variance.

(b) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, détermine le plus petit réel $\delta > 0$ qui garantit $P(|X - 10| < \delta) \geqslant 0{,}75$. Écris cet événement sous la forme $a \leqslant X \leqslant b$ (a, b entiers).

Ex. 46 **(suite)**

(c) Lina affirme : « Bienaymé-Tchebychev garantit qu'il pleut entre 7 et 13 jours inclus avec une probabilité d'au moins 0,8. » Vrai ou faux ? Justifie, puis calcule cette probabilité avec la table.

(d) Zoé étudie la moyenne M_{30} de X sur 30 années. Elle écrit $P(|M_{30} - 10| \geqslant 1) \leqslant \frac{5}{1^2} = 5$ et conclut que l'inégalité ne sert à rien. Corrige son erreur.

Ex. 47 ★★★ **Les graines de tomate** — Une coopérative vend des graines de tomate en sachets de 20. Chaque graine ne germe pas avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres. X est le nombre de graines d'un sachet qui ne germent pas. Voici un extrait de la table de $\mathcal{B}(20\,;0{,}2)$:

k	0	1	6	7	8
P(X ⩽ k)	0,0115	0,0692	0,9133	0,9679	0,9900

(a) Partie A. Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres, puis calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Partie B. Écris l'événement $\{1 \leqslant X \leqslant 7\}$ sous la forme $|X - \mu| < \delta$, puis montre que $P(1 \leqslant X \leqslant 7) \geqslant 0{,}8$.

(c) À l'aide de l'extrait de table, calcule $P(1 \leqslant X \leqslant 7)$. Compare cette valeur au minorant de la question précédente et commente.

(d) Partie C. Inès contrôle 50 sachets. M_{50} est le nombre moyen de graines qui ne germent pas par sachet. Minore la probabilité que M_{50} diffère de $E(X)$ de moins de 0,5.

(e) Combien de sachets, au minimum, Inès doit-elle contrôler pour que l'inégalité de concentration garantisse $|M_n - E(X)| < 0{,}2$ avec une probabilité d'au moins 0,95 ?

Ex. 48 ★★★ **Le sondage sur la piste cyclable** — Avant de construire une piste cyclable, une mairie interroge n habitants au hasard. On note p la proportion (inconnue) d'habitants favorables et F_n la fréquence des favorables dans l'échantillon. On assimile le sondage à n tirages indépendants : X_i vaut 1 si la i-ème personne est favorable, et 0 sinon.

(a) Donne $E(X_i)$ et $V(X_i)$ en fonction de p, puis démontre que $V(X_i) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout p de $[0\,;1]$.

(b) Pour $n = 1\,200$, majore $P(|F_{1200} - p| \geqslant 0{,}04)$ sans connaître p.

(c) Le sondage donne 52 % de favorables. Hugo affirme : « La probabilité que p soit égal à 0,52 est d'au moins 0,85. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Complète la condition du `while` pour que `taille(delta, alpha)` renvoie le plus petit n tel que $\frac{0{,}25}{n\delta^2} \leqslant \alpha$. Donne ensuite `taille(0.03, 0.1)`.

```
def taille(delta, alpha):
    n = 1
    while ........ :
        n = n + 1
    return n
```

(e) Ben affirme : « Pour une précision deux fois meilleure, au même risque, il faut quatre fois plus de personnes. » Vrai ou faux ? Justifie, puis donne `taille(0.015, 0.1)`.

Ex. 49 ★★★ **L'attente du bus d'Élise** — Chaque matin, Élise attend son bus. Son temps d'attente T, en minutes, suit la loi ci-dessous. Les temps d'attente des différents matins sont indépendants et suivent la même loi que T.

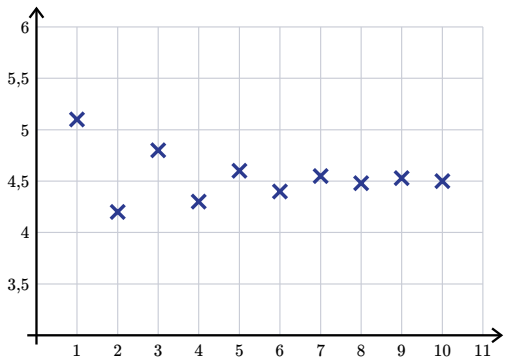
t_i	2	5	10
P(T = t_i)	0,5	0,3	0,2

(a) Calcule $\mu = E(T)$, puis montre que $V(T) = 9{,}25$.

(b) Majore $P(|T - \mu| \geqslant 5)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Calcule ensuite cette probabilité exactement à l'aide de la loi, puis commente.

(c) Sur 40 matins, M_{40} est l'attente moyenne d'Élise. Minore la probabilité que M_{40} soit strictement comprise entre 3,5 et 5,5 minutes, puis interprète.

(d) Le graphique donne, pour k de 1 à 10, la moyenne des $50k$ premiers temps simulés. Démontre que $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}1)$ tend vers 0, puis relie ce résultat au graphique.



(e) Combien de matins faut-il pour que l'inégalité de concentration garantisse $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}5) \leqslant 0{,}1$? Commente.