1. Rappels de 1re : échantillonnage, espérance et variance

Ex. 1 ★☆☆ Espérance et variance d'une loi finie

(a) $\mu = -2 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3 = -0{,}4 + 0{,}5 + 1{,}2 = 1{,}3$.

(b) $E(X^2) = 4 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}5 + 16 \times 0{,}3 = 0{,}8 + 0{,}5 + 4{,}8 = 6{,}1$.

(c) Lina obtient $6{,}1 - 1{,}3 = 4{,}8$. Or il faut retrancher μ^2, et non μ : $V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 6{,}1 - 1{,}3^2 = 6{,}1 - 1{,}69 = 4{,}41$.

(d) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$.

(e) Les écarts à $\mu = 1{,}3$ valent 3,3 pour -2, 0,3 pour 1 et 2,7 pour 4. Seules les valeurs -2 et 4 vérifient $|x_i - 1{,}3| \geqslant 2$, donc $P(|X - \mu| \geqslant 2) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

Ex. 2 ★☆☆ Binomiale, somme et moyenne d'un échantillon

(a) $E(X) = np = 50 \times 0{,}2 = 10$.

(b) $V(X) = np(1-p) = 50 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 8$.

(c) $V(Y) = 400 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 36$, donc $\sigma(Y) = \sqrt{36} = 6$.

(d) $E(S_{25}) = n\mu = 25 \times 12 = 300$.

(e) M_{25} a la même espérance que T : $E(M_{25}) = 12$. En revanche, sa variance est divisée par n : $V(M_{25}) = \frac{8}{25} = 0{,}32$.

(f) On élève d'abord l'écart type au carré : $V(Z) = 3^2 = 9$. Donc $V(M_{100}) = \frac{9}{100} = 0{,}09$.

Ex. 3 ★★☆ Six échantillons de lancers

(a) C'est la fluctuation d'échantillonnage : chaque échantillon est le fruit du hasard. Deux échantillons de même taille donnent donc en général des fréquences différentes.

(b) Moyenne : $\frac{0{,}37+0{,}44+0{,}41+0{,}35+0{,}40+0{,}43}{6} = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4$. Écart : $0{,}44 - 0{,}35 = 0{,}09$.

(c) Non, elle a tort. 0,44 est une fréquence observée sur un seul échantillon, et elle fluctue d'un échantillon à l'autre (les autres donnent 0,35, 0,41, etc.). Une fréquence observée n'est pas la probabilité.

(d) Les 100 lancers sont identiques et indépendants, à deux issues avec $p = 0{,}4$.
Donc X suit la loi $\mathcal{B}(100\,;0{,}4)$, avec $E(X) = 100 \times 0{,}4 = 40$ et $V(X) = 100 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 24$.

Ex. 3 (suite)

(e) Les nombres de piles valent $100 \times f$: $37, 44, 41, 35, 40, 43$. Le plus éloigné de 40 est 35 (échantillon 4), avec un écart de $|35 - 40| = 5$.

Ex. 4 ★★☆ La roue de Malo se stabilise

(a) Pour les petites valeurs de n, les fréquences varient beaucoup (0,32, puis 0,21). À partir de 500 parties, elles restent entre 0,245 et 0,256 : elles se stabilisent autour de 0,25.

(b) $E(X) = 0 \times 0{,}75 + 1 \times 0{,}25 = 0{,}25$. $E(X^2) = 0{,}25$, donc $V(X) = 0{,}25 - 0{,}25^2 = 0{,}1875$.

(c) $V(M_{100}) = \frac{0{,}1875}{100} = 0{,}001875$ et $V(M_{800}) = \frac{0{,}1875}{800} \approx 0{,}000234$. La variance est divisée par 8 alors que l'espérance reste 0,25. Les fréquences sont donc plus resserrées autour de 0,25 quand n est grand, comme on le voit sur le graphique.

(d) Faux. Plus n est grand, plus la fréquence se rapproche de 0,25 en général, mais elle fluctue toujours. Rien ne garantit qu'elle soit exactement égale à 0,25.

Ex. 5 ★★★ Le stand de Yanis

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $p + 0{,}5 + q = 1$, donc $p = 0{,}5 - q$. L'espérance donne $-2p + 1 \times 0{,}5 + 6q = 0{,}7$, soit $-2(0{,}5 - q) + 0{,}5 + 6q = 0{,}7$, donc $8q - 0{,}5 = 0{,}7$ et $q = 0{,}15$. Alors $p = 0{,}35$. Vérification : $-2 \times 0{,}35 + 0{,}5 + 6 \times 0{,}15 = 0{,}7$.

(b) $E(X^2) = 4 \times 0{,}35 + 1 \times 0{,}5 + 36 \times 0{,}15 = 1{,}4 + 0{,}5 + 5{,}4 = 7{,}3$. D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 7{,}3 - 0{,}7^2 = 7{,}3 - 0{,}49 = 6{,}81$.

(c) $V(X)$ s'exprime en euros au carré : ce n'est pas un écart en euros. L'écart typique est l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6{,}81} \approx 2{,}61$ €.

(d) Les X_i sont indépendantes et suivent la loi de X. $E(S) = 100\mu = 70$ et $V(S) = 100\,V(X) = 681$. $M = \frac{S}{100}$, donc $E(M) = \mu = 0{,}7$: même espérance que X. En revanche $V(M) = \frac{V(X)}{100} = 0{,}0681$: la variance est divisée par n.

(e) Faux. C'est la variance qui est divisée par 100. L'écart type est divisé par $\sqrt{100} = 10$: $\sigma(M) = \sqrt{0{,}0681} \approx 0{,}261$, contre $\sigma(X) \approx 2{,}61$. Le rapport vaut 10, pas 100.

Ex. 6 ★★★ **Les graines de Nadia**

(a) On répète 200 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (germe, avec $p = 0{,}85$, ou non) et X compte les succès : X suit $\mathcal{B}(200\,;0{,}85)$. $E(X) = np = 170$; $V(X) = np(1-p) = 200 \times 0{,}85 \times 0{,}15 = 25{,}5$; $\sigma(X) = \sqrt{25{,}5} \approx 5{,}05$.

(b) Nadia trouve $\frac{25{,}5}{200} = 0{,}1275$. Or $F = \frac{X}{200}$, donc $V(F) = \frac{V(X)}{200^2} = \frac{25{,}5}{40\,000} = 0{,}0006375$, soit $\frac{p(1-p)}{n}$. On a $E(F) = \frac{170}{200} = 0{,}85 = p$ et $\sigma(F) = \sqrt{0{,}0006375} \approx 0{,}0252$.

(c) $\frac{0{,}83+0{,}875+0{,}86+0{,}815+0{,}85+0{,}845}{6} = \frac{5{,}075}{6} \approx 0{,}8458$. Les sachets ont tous la même taille : c'est donc la fréquence de germination sur les 1 200 graines (1 015 ont germé). Elle est plus proche de 0,85 que la plupart des fréquences isolées.

(d) $V(F) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0{,}1275}{800} = 0{,}000159375$, donc $\sigma(F) \approx 0{,}0126$. La taille est multipliée par 4 et la variance divisée par 4, donc l'écart type est divisé par $\sqrt{4} = 2$: $0{,}0252 \div 2 = 0{,}0126$.

(e) Faux. Avec $n = 800$, $\sigma(F)$ est divisé par 2 : en général, la fréquence est plus proche de 0,85. Mais F reste aléatoire et fluctue. Le sachet 5 de Nadia, qui ne contient que 200 graines, donne exactement 0,85 : aucun sachet de 800 ne peut faire mieux.

Ex. 7 ★★★ **Le dé à quatre faces de Tom**

(a) À chaque tour, `randint(1, 4)` simule un lancer et ajoute le numéro à `s`. Après n tours, `s` contient la somme S_n des n numéros. La fonction renvoie `s / n`, c'est-à-dire une valeur observée de M_n.

(b) Chaque face a la probabilité $\frac{1}{4}$. $\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$ et $E(X^2) = \frac{1+4+9+16}{4} = 7{,}5$.
Donc $V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 7{,}5 - 6{,}25 = 1{,}25$ et $\sigma(X) = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}12$.

(c) $E(M_{1000}) = \mu = 2{,}5$: même espérance que X.
$V(M_{1000}) = \frac{V(X)}{1\,000} = 0{,}00125$ et $\sigma(M_{1000}) = \sqrt{0{,}00125} \approx 0{,}035$.

(d) Non. Le programme est aléatoire : deux échantillons de même taille donnent des moyennes différentes, c'est la fluctuation d'échantillonnage. Pour $n = 100$, $\sigma(M_{100}) = \sqrt{\frac{1{,}25}{100}} \approx 0{,}112$. Les écarts à 2,5 (0,11 et 0,07) restent de l'ordre d'un écart type.

(e) La boucle augmente `n` tant que $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} > 0{,}03$. Elle s'arrête au premier n tel que $\frac{1{,}25}{n} \leqslant 0{,}0009$, soit $n \geqslant \frac{1{,}25}{0{,}0009} \approx 1\,388{,}9$.
Donc `n` vaut 1 389.

2. *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Ex. 8 ★☆☆ **Majorants en ligne**

(a) $\mu = 20$, $V(X) = 3$, $\delta = 4 > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 20| \geqslant 4) \leqslant \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$. La probabilité que X s'écarte de 20 d'au moins 4 est au plus 0,1875.

(b) On divise la variance, pas l'écart type : $V(X) = 7^2 = 49$. Avec $\delta = 10 > 0$: $P(|X - 50| \geqslant 10) \leqslant \frac{49}{10^2} = 0{,}49$. La probabilité est au plus 0,49.

(c) $|X + 3| = |X - (-3)|$, donc $\mu = -3$ et $\delta = 2$. On a $P(|X + 3| \geqslant 2) \leqslant \frac{0{,}8}{2^2} = 0{,}2$: au plus 0,2.

(d) $X \leqslant 0{,}5$ ou $X \geqslant 2{,}5$ s'écrit $|X - 1{,}5| \geqslant 1$, donc $\delta = 1$. On a $P(|X - 1{,}5| \geqslant 1) \leqslant \frac{0{,}09}{1^2} = 0{,}09$: au plus 0,09.

(e) Avec $\delta = 5\sigma > 0$: $P(|X - \mu| \geqslant 5\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{25\sigma^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$. Quelle que soit la loi, X s'écarte de μ d'au moins 5 écarts types avec une probabilité d'au plus 0,04.

Ex. 9 ★★☆ **Intervalles centrés et événement contraire**

(a) L'événement s'écrit $|X - 30| \geqslant 5$ ($\mu = 30$, $\delta = 5$). D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 30| \geqslant 5) \leqslant \frac{6}{5^2} = 0{,}24$. La probabilité est au plus 0,24.

(b) $25 < X < 35$ est l'événement contraire $|X - 30| < 5$. Donc $P(25 < X < 35) \geqslant 1 - \frac{6}{25} = 0{,}76$: au moins 0,76.

(c) Le centre est $\mu = \frac{22+38}{2} = 30$ et $\delta = 38 - 30 = 8$. Donc $P(|X - 30| < 8) \geqslant 1 - \frac{6}{8^2} = 1 - 0{,}09375 = 0{,}90625$: au moins 0,906 environ.

(d) Comme X est entier, $X < 25$ équivaut à $X \leqslant 24$ et $X > 35$ équivaut à $X \geqslant 36$. On obtient $|X - 30| \geqslant 6$, donc la probabilité est au plus $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$.

(e) Avec $\delta = 2\sigma$: $P(|X - 30| \geqslant 2\sigma) \leqslant \frac{1}{2^2} = 0{,}25$, soit au plus 0,25. Par l'événement contraire, $P(30 - 2\sigma < X < 30 + 2\sigma) \geqslant 1 - 0{,}25 = 0{,}75$: au moins 0,75.

Ex. 10 ★★☆ **Les erreurs d'Inès**

(a) Première erreur : on divise la variance $V(X) = 5^2 = 25$, pas l'écart type. Seconde erreur : l'inégalité donne un majorant, pas une égalité. Correction : d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $\delta = 20 > 0$, $P(|X - 40| \geqslant 20) \leqslant \frac{25}{20^2} = 0{,}0625$. La probabilité que X s'écarte de 40 d'au moins 20 est au plus 0,0625.

(b) $\frac{25}{3^2} = \frac{25}{9} \approx 2{,}78$. Ce majorant est supérieur à 1. Or toute probabilité est déjà au plus 1 : l'inégalité ne nous apprend rien ici.

Ex. 10 **(suite)**

(c) Non. L'inégalité exige $\delta > 0$. De plus, $|X - 40| \geqslant 20$ signifie déjà « $X \leqslant 20$ ou $X \geqslant 60$ » : la valeur absolue couvre les deux côtés.

(d) On veut $\frac{25}{\delta^2} \leqslant 0{,}1$, soit $\delta^2 \geqslant 250$, donc $\delta \geqslant \sqrt{250} \approx 15{,}81$. Pour $\delta = 15$, on trouve $\frac{25}{225} \approx 0{,}111 > 0{,}1$. Pour $\delta = 16$, on trouve $\frac{25}{256} \approx 0{,}098$. Le plus petit entier est donc $\delta = 16$.

Ex. 11 ★★☆ **QCM au hasard : majorant et vraie probabilité**

(a) Pour une loi binomiale : $E(X) = np = 20 \times 0{,}5 = 10$ et $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 5$.

(b) L'événement est $|X - 10| \geqslant 4$, avec $\delta = 4 > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 10| \geqslant 4) \leqslant \frac{5}{4^2} = 0{,}3125$. La probabilité est au plus 0,3125.

(c) $|X - 10| \geqslant 4$ équivaut à « $X \leqslant 6$ ou $X \geqslant 14$ ». La table donne $P(X \leqslant 6) = 0{,}0577$, et $P(X \geqslant 14) = 1 - P(X \leqslant 13) = 1 - 0{,}9423 = 0{,}0577$.
Donc $P(|X - 10| \geqslant 4) = 0{,}0577 + 0{,}0577 = 0{,}1154$ environ.

(d) Faux. L'inégalité donne seulement un majorant. Ici, 0,3125 est environ 2,7 fois la vraie probabilité 0,115. L'inégalité vaut pour toutes les lois, ce qui la rend souvent grossière.

Ex. 12 ★★★ **Fléchettes : du majorant à la vraie probabilité**

(a) $\mu = E(X) = 0 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}4 + 6 \times 0{,}2 + 8 \times 0{,}1 = 0 + 0{,}4 + 1{,}6 + 1{,}2 + 0{,}8 = 4$. $V(X) = 0{,}1 \times (0-4)^2 + 0{,}2 \times (2-4)^2 + 0{,}4 \times 0 + 0{,}2 \times (6-4)^2 + 0{,}1 \times (8-4)^2 = 1{,}6 + 0{,}8 + 0 + 0{,}8 + 1{,}6 = 4{,}8$.
Donc $\sigma(X) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.

(b) « Marquer 0 ou 8 points » s'écrit « $X \leqslant 0$ ou $X \geqslant 8$ », c'est-à-dire $|X - 4| \geqslant 4$, avec $\mu = 4$ et $\delta = 4 > 0$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 4| \geqslant 4) \leqslant \frac{4{,}8}{4^2} = 0{,}3$. La probabilité vaut donc au plus 0,3. Dans le tableau, la valeur exacte est $P(X = 0) + P(X = 8) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$. Le majorant est juste, mais il est plus grand que la vraie valeur.

(c) Il obtient $P(|X - 4| \geqslant 2) \leqslant \frac{4{,}8}{2^2} = 1{,}2$. Ce majorant dépasse 1. Or une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1 : l'inégalité ne lui apprend rien. Calcul exact : $|X - 4| \geqslant 2$ correspond à $X \in \{0\,;2\,;6\,;8\}$, donc la probabilité vaut $1 - P(X = 4) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Ex. 12 **(suite)**

(d) On veut $\frac{4{,}8}{\delta^2} < 1$, soit $\delta^2 > 4{,}8$. Comme $\delta > 0$, cela donne $\delta > \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$, c'est-à-dire $\delta > \sigma(X)$.
L'inégalité n'est utile que pour un écart supérieur à un écart type
(avec $\delta = k\sigma$, il faut $k > 1$).

Ex. 13 ★★★ **Paquets de café : un programme de seuil**

(a) Le paquet est non conforme si $X \leqslant 488$ ou $X \geqslant 512$, c'est-à-dire $|X - 500| \geqslant 12$, avec $\mu = 500$ et $\delta = 12 > 0$. On a $V(X) = 6^2 = 36$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 500| \geqslant 12) \leqslant \frac{36}{12^2} = 0{,}25$. Comme $12 = 2 \times 6$, on a $\delta = 2\sigma$, et on retrouve $\frac{1}{2^2} = 0{,}25$. La probabilité qu'un paquet soit non conforme vaut au plus 0,25.

(b) Avec `d = 0`, le calcul `V / d**2` divise par 0 : le programme s'arrête sur une erreur. Cela traduit l'hypothèse $\delta > 0$ de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(c) La boucle continue tant que $\frac{36}{d^2} > 0{,}05$. Elle s'arrête au premier entier d tel que $\frac{36}{d^2} \leqslant 0{,}05$, soit $d^2 \geqslant 720$, soit $d \geqslant \sqrt{720} \approx 26{,}83$. Vérification : $\frac{36}{26^2} \approx 0{,}053 > 0{,}05$ et $\frac{36}{27^2} \approx 0{,}049 \leqslant 0{,}05$. Le programme affiche 27. C'est le plus petit entier δ pour lequel l'inégalité garantit $P(|X - 500| \geqslant 27) \leqslant 0{,}05$. Par l'événement contraire, la masse est dans $]473\,;527[$ avec une probabilité d'au moins 0,95.

(d) Avec $V = 6$, la condition d'arrêt devient $d^2 \geqslant \frac{6}{0{,}05} = 120$, soit $d \geqslant 10{,}95$ ($\frac{6}{100} = 0{,}06 > 0{,}05$ et $\frac{6}{121} \approx 0{,}0496$). Tom obtient 11. Son erreur : il a divisé l'écart type par δ^2, alors qu'il faut diviser la variance $\sigma^2 = 36$. Avec la bonne variance, $\delta = 11$ donne seulement $P(|X - 500| \geqslant 11) \leqslant \frac{36}{121} \approx 0{,}30$.

(e) Faux. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne un majorant. La bonne conclusion est : au plus 5 % des paquets ont une masse hors de $]473\,;527[$. La proportion réelle peut être bien plus petite.

Ex. 14 ★★★ **Un stand de fête : quand l'inégalité est atteinte**

(a) $E(X) = 0 \times q + 10 \times (1-2q) + 20 \times q = 10 - 20q + 20q = 10$. $V(X) = q \times (0-10)^2 + (1-2q) \times 0^2 + q \times (20-10)^2 = 200q$.

Ex. 14 **(suite)**

(b) Avec $\mu = 10$ et $\delta = 10 > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne : $P(|X - 10| \geqslant 10) \leqslant \frac{200q}{10^2} = 2q$. Or $|X - 10| \geqslant 10$ correspond à $X = 0$ ou $X = 20$, donc la vraie probabilité vaut $q + q = 2q$. Le majorant est égal à la probabilité, quel que soit q. Conclusion : on ne peut pas améliorer le majorant $\frac{V(X)}{\delta^2}$ pour toutes les lois, puisqu'il est parfois atteint.

(c) On a $V(X) = 200 \times 0{,}05 = 10$ et $\delta = 5 > 0$. D'après l'inégalité : $P(|X - 10| \geqslant 5) \leqslant \frac{10}{5^2} = 0{,}4$, donc au plus 0,4. En réalité, $|X - 10| \geqslant 5$ correspond encore à $X = 0$ ou $X = 20$, donc la probabilité vaut $2 \times 0{,}05 = 0{,}1$. Ici, le majorant est quatre fois trop grand : l'inégalité est grossière.

(d) Avec $\delta = 2\sigma$, l'inégalité donne $P(|X - 10| \geqslant 2\sigma) \leqslant \frac{1}{2^2} = 0{,}25$. C'est un majorant. La bonne phrase est : « la probabilité vaut au plus 0,25 ». Ici $\sigma = \sqrt{10} \approx 3{,}16$, donc $2\sigma \approx 6{,}32$. Les gains 0 et 20 s'écartent de 10 de $10 \geqslant 6{,}32$, et le gain 10 ne s'écarte pas. La probabilité exacte vaut $0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1$.

3. *Utiliser l'inégalité : contraire, intervalle*

Ex. 15 ★☆☆ **Contraire et intervalle centré**

(a) Le contraire de « $\geqslant 6$ » est « < 6 » : $|X - 40| < 6$, soit $X \in]34\,;46[$. Les bornes sont exclues.

(b) $35 < X < 45$ équivaut à $|X - 40| < 5$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 5$: $P(35 < X < 45) \geqslant 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} = 0{,}36$. La probabilité vaut au moins 0,36.

(c) X est entier, donc $32 \leqslant X \leqslant 48 \iff 31 < X < 49 \iff |X - 40| < 9$. Ainsi $P(32 \leqslant X \leqslant 48) \geqslant 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} \approx 0{,}802$ (par défaut).

(d) X est entier, donc l'événement s'écrit $|X - 40| \geqslant 11$. Sa probabilité vaut donc au plus $\frac{16}{121} \approx 0{,}133$ (par excès).

Ex. 16 ★☆☆ **Un seul côté, intervalle non centré**

(a) $E(Y) = 200 \times 0{,}3 = 60$ et $V(Y) = 200 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 42$.

(b) $Y \geqslant 75$ entraîne $|Y - 60| \geqslant 15$.
Donc $P(Y \geqslant 75) \leqslant \frac{42}{225} = \frac{14}{75} \approx 0{,}187$ (par excès).

Ex. 16 **(suite)**

(c) $Y \leqslant 48$ entraîne $|Y - 60| \geqslant 12$.
Donc $P(Y \leqslant 48) \leqslant \frac{42}{144} = \frac{7}{24} \approx 0{,}292$ (par excès).

(d) $]48\,;75[$ contient l'intervalle centré $]48\,;72[$, c'est-à-dire $|Y - 60| < 12$.
Donc $P(48 < Y < 75) \geqslant 1 - \frac{42}{144} = \frac{17}{24} \approx 0{,}708$ (par défaut).

Ex. 17 ★★☆ **Les clients de la boulangerie**

(a) Non. Le contraire de « $\geqslant 20$ » est « < 20 » : $|N - 120| < 20$, soit $100 < N < 140$ (ou $101 \leqslant N \leqslant 139$, car N est entier). Les bornes 100 et 140 sont exclues.

(b) $V(N) = 10^2 = 100$. $80 < N < 160$ équivaut à $|N - 120| < 40$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 40$: $P(80 < N < 160) \geqslant 1 - \frac{100}{1600} = 0{,}9375$. Dans au moins 93,75 % des journées, la boulangerie reçoit entre 81 et 159 clients.

(c) N est entier, donc $105 \leqslant N \leqslant 135 \iff 104 < N < 136 \iff |N - 120| < 16$. Ainsi $P \geqslant 1 - \frac{100}{256} = \frac{39}{64} \approx 0{,}609$. C'est mieux que $1 - \frac{100}{225} \approx 0{,}556$, obtenu avec $\delta = 15$.

(d) Faux. Théo a inversé la fraction : le bon minorant est $1 - \frac{V(N)}{\delta^2} = 1 - \frac{100}{81} = -\frac{19}{81} \approx -0{,}235$. Ce nombre est négatif. Une probabilité est toujours positive ou nulle, donc ce minorant n'apprend rien. Cela vient de $\delta = 9 < \sigma = 10$.

(e) $N \geqslant 150$ entraîne $|N - 120| \geqslant 30$.
Donc $P(N \geqslant 150) \leqslant \frac{100}{900} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ (par excès).

Ex. 18 ★★☆ **Le QCM de Zoé**

(a) $E(Z) = 120 \times 0{,}25 = 30$ et $V(Z) = 120 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 22{,}5$.

(b) On veut $\frac{22{,}5}{\delta^2} \leqslant 0{,}1 \iff \delta^2 \geqslant 225 \iff \delta \geqslant 15$.
Donc $\delta = 15$ et $P(|Z - 30| < 15) \geqslant 0{,}9$. Les bornes sont exclues : $15 < Z < 45$, soit $16 \leqslant Z \leqslant 44$, avec une probabilité d'au moins 0,9.

(c) La boucle continue tant que le majorant $\frac{V}{d^2}$ dépasse 0,05. Elle s'arrête au premier entier d tel que $d^2 \geqslant 450$, et le programme affiche 22 (car $21^2 = 441 < 450 \leqslant 484 = 22^2$). Interprétation : $P(|Z - 30| < 22) \geqslant 0{,}95$, soit $9 \leqslant Z \leqslant 51$ avec une probabilité d'au moins 95 %.

Ex. 18 **(suite)**

(d) $Z \geqslant 46$ entraîne $|Z - 30| \geqslant 16$.
Donc $P(Z \geqslant 46) \leqslant \frac{22{,}5}{256} \approx 0{,}088 \leqslant 0{,}09$. En répondant au hasard, un tel score arrive au plus 9 fois sur 100 : le score de Zoé rend le hasard peu plausible.

Ex. 19 ★★★ **Le stock de la pharmacie**

(a) $V(X) = \sigma^2 = 20^2 = 400$. Le contraire de $|X - 500| \geqslant 50$ est $|X - 500| < 50$, c'est-à-dire $450 < X < 550$ (bornes exclues). D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 50 > 0$: $P(|X - 500| \geqslant 50) \leqslant \frac{400}{50^2} = 0{,}16$.
Donc $P(450 < X < 550) \geqslant 1 - 0{,}16 = 0{,}84$: la pharmacie vend entre 451 et 549 boîtes avec une probabilité d'au moins 84 %.

(b) Méthode 1 : $]460\,;560[$ contient l'intervalle centré $]460\,;540[$ ($\delta = 40$).
Donc $P(460 < X < 560) \geqslant P(|X - 500| < 40) \geqslant 1 - \frac{400}{40^2} = 0{,}75$. Méthode 2 : $X \leqslant 460$ entraîne $|X - 500| \geqslant 40$, et $X \geqslant 560$ entraîne $|X - 500| \geqslant 60$. Ces deux événements sont incompatibles, donc $P(460 < X < 560) = 1 - P(X \leqslant 460) - P(X \geqslant 560) \geqslant 1 - \frac{400}{1600} - \frac{400}{3600} = \frac{23}{36} \approx 0{,}639$. La méthode 1 donne le meilleur minorant : au moins 0,75.

(c) X est entier, donc $X > 570$ équivaut à $X \geqslant 571$. Alors $X - 500 \geqslant 71$, donc $|X - 500| \geqslant 71$. Ainsi $P(X > 570) \leqslant P(|X - 500| \geqslant 71) \leqslant \frac{400}{71^2} = \frac{400}{5041} \approx 0{,}0794$ (arrondi par excès). Le risque de rupture est inférieur à 8 %. Avec $\delta = 70$, on obtient $\frac{400}{4900} \approx 0{,}0816$: c'est juste aussi, mais moins précis.

(d) Pour $S > 500$ entier, $X > S$ équivaut à $X \geqslant S + 1$, et cet événement est inclus dans $|X - 500| \geqslant S - 499$. Donc $P(X > S) \leqslant \frac{400}{(S-499)^2}$. On veut $\frac{400}{(S-499)^2} \leqslant 0{,}05$, soit $(S - 499)^2 \geqslant 8000$, soit $S - 499 \geqslant \sqrt{8000} \approx 89{,}44$. Comme S est entier, $S - 499 \geqslant 90$, donc $S \geqslant 589$. Vérification : pour $S = 589$, $\frac{400}{90^2} \approx 0{,}0494 \leqslant 0{,}05$; pour $S = 588$, $\frac{400}{89^2} \approx 0{,}0505 > 0{,}05$. Le stock minimal est de 589 boîtes.

Ex. 19 **(suite)**

(e) Soit $T = X_1 + X_2$ la vente sur deux semaines. Les ventes sont indépendantes, donc $E(T) = 1000$ et $V(T) = 2 \times 400 = 800$. Pour $S > 1000$ entier, $T > S$ équivaut à $T \geqslant S + 1$, et cet événement est inclus dans $|T - 1000| \geqslant S - 999$. On veut $\frac{800}{(S-999)^2} \leqslant 0{,}05$, soit $(S - 999)^2 \geqslant 16000$, soit $S - 999 \geqslant \sqrt{16000} \approx 126{,}5$. Donc $S - 999 \geqslant 127$, soit $S \geqslant 1126$. Vérification : $\frac{800}{127^2} \approx 0{,}0496 \leqslant 0{,}05$ et $\frac{800}{126^2} \approx 0{,}0504 > 0{,}05$. Or $2 \times 589 = 1178$: on économise 52 boîtes, car $\sigma(T) = \sqrt{800} \approx 28{,}3$ est inférieur à $2 \times 20 = 40$.

Ex. 20 ★★★ **Le stand de Maëlle**

(a) $E(X) = -2 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}1 = 1$. $E(X^2) = 4 \times 0{,}3 + 0 + 9 \times 0{,}2 + 100 \times 0{,}1 = 13$, donc $V(X) = 13 - 1^2 = 12$.

(b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 5$: $P(|X - 1| \geqslant 5) \leqslant \frac{12}{5^2} = 0{,}48$. Valeur exacte : $|X - 1|$ vaut 3, 1, 2 ou 9, donc seule la valeur $X = 10$ convient, et $P(|X - 1| \geqslant 5) = 0{,}1$. Le majorant est vrai, mais grossier : il vaut presque cinq fois la valeur exacte.

(c) S est la somme de 30 variables indépendantes qui suivent la même loi que X.
Donc $E(S) = 30 \times 1 = 30$ et $V(S) = 30 \times 12 = 360$.

(d) Non. L'intervalle est centré en $E(S) = 30$, avec $\delta = 50$. L'inégalité donne seulement $P(-20 < S < 80) \geqslant 1 - \frac{360}{2500} = 0{,}856$, qui est inférieur à 0,9. L'inégalité ne garantit donc pas 0,9, mais elle ne prouve pas non plus que la probabilité est inférieure à 0,9. Pour garantir 0,9, il faut $\frac{360}{\delta^2} \leqslant 0{,}1$, soit $\delta \geqslant 60$: l'intervalle $]-30\,;90[$ convient.

(e) Vrai. S est un entier, donc l'événement contraire de $S \geqslant 0$ est $S \leqslant -1$. Dans ce cas $S - 30 \leqslant -31$, donc $|S - 30| \geqslant 31$. Alors $P(S \leqslant -1) \leqslant \frac{360}{31^2} = \frac{360}{961}$, et $P(S \geqslant 0) \geqslant 1 - \frac{360}{961} = \frac{601}{961} \approx 0{,}625 \geqslant 0{,}6$. Ben a raison.

Ex. 21 ★★★ **Lots de pièces (type bac)**

(a) X suit la loi $\mathcal{B}(2500\,;0{,}04)$, donc $E(X) = 2500 \times 0{,}04 = 100$ et $V(X) = 2500 \times 0{,}04 \times 0{,}96 = 96$.

(b) L'événement $80 < X < 120$ est $|X - 100| < 20$, contraire de $|X - 100| \geqslant 20$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 20$: $P(|X - 100| \geqslant 20) \leqslant \frac{96}{20^2} = 0{,}24$.
Donc $P(80 < X < 120) \geqslant 1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

Ex. 21 (suite)

(c) La première partie est juste : X est entier, donc $80 < X < 120$ équivaut à $81 \leqslant X \leqslant 119$, et $P(81 \leqslant X \leqslant 119) \geqslant 0{,}76$. La seconde est fausse : l'événement $80 \leqslant X \leqslant 120$ contient l'événement $81 \leqslant X \leqslant 119$, donc $P(80 \leqslant X \leqslant 120) \geqslant P(81 \leqslant X \leqslant 119) \geqslant 0{,}76$. Noé n'a donc que partiellement raison.

(d) Pour $m > 100$, $X \geqslant m$ entraîne $X - 100 \geqslant m - 100$, donc $|X - 100| \geqslant m - 100$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(X \geqslant m) \leqslant \frac{96}{(m-100)^2}$. Le second nombre est ce majorant du risque de refus, arrondi au millième. Le programme affiche 110 0.96, 120 0.24, 130 0.107 et 140 0.06. Pour $m = 130$, le majorant 0,107 dépasse 0,1 : l'inégalité ne garantit pas 10 %. Parmi ces seuils, seul $m = 140$ garantit un risque de refus d'au plus 6 %, donc d'au plus 10 %.

(e) Le programme simule 1 000 lots de 2 500 pièces. Il compte les lots dont le nombre x de pièces défectueuses vérifie $80 < x < 120$, puis il affiche la fréquence de ces lots, qui est une estimation de $P(80 < X < 120)$. Les fréquences changent d'un essai à l'autre (fluctuation d'échantillonnage), mais elles restent proches de 0,95. Elles sont toutes supérieures à 0,76 : il n'y a aucune contradiction. Le minorant 0,76 est vrai, mais grossier.

4. *Inégalité de concentration*

Ex. 22 ★☆☆ **Majorants en ligne**

(a) $\frac{6}{120 \times 0{,}5^2} = \frac{6}{30} = 0{,}2$.
Donc $P(|M_{120} - \mu| \geqslant 0{,}5) \leqslant 0{,}2$.

(b) On élève l'écart type au carré : $V = 3^2 = 9$. Puis $\frac{9}{200 \times 0{,}25} = \frac{9}{50} = 0{,}18$. Le majorant est 0,18.

(c) $V = p(1-p) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$. Puis $\frac{0{,}16}{500 \times 0{,}05^2} = \frac{0{,}16}{1{,}25} = 0{,}128$.
Donc $P(|F_{500} - 0{,}2| \geqslant 0{,}05) \leqslant 0{,}128$.

(d) $\frac{12}{150 \times 1^2} = 0{,}08$.
Donc $P(|M_{150} - \mu| \geqslant 1) \leqslant 0{,}08$.

(e) $V = 0{,}8^2 = 0{,}64$. Puis $\frac{0{,}64}{40 \times 0{,}04} = \frac{0{,}64}{1{,}6} = 0{,}4$. Le majorant est 0,4.

(f) $V = 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}09$. Puis $\frac{0{,}09}{1\,000 \times 0{,}0004} = \frac{0{,}09}{0{,}4} = 0{,}225$.
Donc $P(|F_{1000} - 0{,}9| \geqslant 0{,}02) \leqslant 0{,}225$.

Ex. 23 ★☆☆ **Minorants : transformer l'événement**

(a) Par l'événement contraire : $P(|M_{50} - \mu| < 1) \geqslant 1 - \frac{5}{50 \times 1^2} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

(b) L'intervalle est centré en 20 avec $\delta = 0{,}5$, et $V = 1{,}5^2 = 2{,}25$.
Donc $P(|M_{60} - 20| < 0{,}5) \geqslant 1 - \frac{2{,}25}{60 \times 0{,}25} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

(c) $n\mu = 250 \times 3 = 750$. On divise par $n = 250$: $|S_{250} - 750| < 50 \iff |M_{250} - 3| < 0{,}2$.
Donc la probabilité est au moins $1 - \frac{2}{250 \times 0{,}04} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

(d) L'intervalle est centré en 0,4 avec $\delta = 0{,}05$, et $V = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$. La probabilité est au moins $1 - \frac{0{,}24}{400 \times 0{,}0025} = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

Ex. 24 ★★☆ **Le gain moyen d'Hugo à la fête foraine**

(a) $\mu = -1 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}2 = 0{,}5$ €. $E(X^2) = 0{,}5 + 0 + 25 \times 0{,}2 = 5{,}5$, donc $V(X) = 5{,}5 - 0{,}5^2 = 5{,}25$.

(b) Elle obtient $\frac{V(X)}{\delta^2} = \frac{5{,}25}{0{,}5^2} = 21$: un majorant supérieur à 1 ne dit rien. Son erreur : Bienaymé-Tchebychev appliquée à X concerne UNE partie ; pour la moyenne, il faut diviser par $n = 300$. D'après l'inégalité de concentration (X_i indépendantes et de même loi) : $P(|M_{300} - 0{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{5{,}25}{300 \times 0{,}25} = 0{,}07$.

(c) $0 < S_{300} < 300 \iff 0 < M_{300} < 1 \iff |M_{300} - 0{,}5| < 0{,}5$. Par l'événement contraire, cette probabilité est au moins $1 - 0{,}07 = 0{,}93$. Le gain total d'Hugo est donc entre 0 € et 300 € avec une probabilité d'au moins 93 %.

Ex. 25 ★★☆ **Sachets de farine et programme de seuil**

(a) La variance d'un sachet est $V = 6^2 = 36$ (on élève l'écart type au carré). D'après l'inégalité de concentration avec $\delta = 2$: $P(|M_n - 1\,000| \geqslant 2) \leqslant \frac{36}{n \times 2^2} = \frac{9}{n}$.

(b) Ligne 2 : `while 9/n > 0.05:`. La boucle s'arrête dès que $\frac{9}{n} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant 180$. Le programme affiche 180.

(c) Faux. L'inégalité porte sur la masse MOYENNE M_{180}, et non sur chaque sachet. Elle dit seulement que $P(998 < M_{180} < 1\,002) \geqslant 1 - \frac{9}{180} = 0{,}95$. Chaque sachet reste dispersé
(écart type 6 g).

Ex. 25 (suite)

(d) Avec $\delta = 1$: $P(|M_n - 1\,000| \geqslant 1) \leqslant \frac{36}{n \times 1^2} = \frac{36}{n}$. Ligne 2 : `while 36/n > 0.05:`. Le programme affiche 720 (car $\frac{36}{0{,}05} = 720$). Diviser la précision δ par 2 multiplie la taille par 4.

Ex. 26 ★★★ Autonomie des trottinettes : de la somme à la moyenne

(a) Pour une batterie : $\mu = E(X) = 25$ km et $V(X) = \sigma^2 = 4^2 = 16$ (km^2). Les batteries sont prises au hasard et les X_i sont indépendantes, de même loi que X : $(X_1, \dots, X_n)$ est donc un échantillon de taille n de la loi de X.

(b) Nora a mis l'écart type 4 à la place de la variance : il faut l'élever au carré, $V = 16$. D'après l'inégalité de concentration (échantillon, $n = 50$, $\delta = 1$) : $P(|M_{50} - 25| \geqslant 1) \leqslant \frac{16}{50 \times 1^2} = 0{,}32$. La probabilité est au plus 0,32, et non 0,08.

(c) $n\mu = 50 \times 25 = 1\,250$. $1\,200 < S_{50} < 1\,300 \iff |S_{50} - 1\,250| < 50 \iff \left|\frac{S_{50}}{50} - 25\right| < 1 \iff |M_{50} - 25| < 1$ (on divise par $50 > 0$). Par l'événement contraire : $P(|M_{50} - 25| < 1) \geqslant 1 - 0{,}32 = 0{,}68$. Avec une probabilité d'au moins 0,68, les 50 batteries parcourent au total entre 1 200 et 1 300 km, soit une autonomie moyenne entre 24 et 26 km.

(d) $E(M_n) = \mu = 25$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{16}{n}$. D'après Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n avec $\delta = 0{,}5$: $P(|M_n - 25| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{16/n}{0{,}5^2} = \frac{16}{0{,}25\,n} = \frac{64}{n}$.

(e) Pour tout n : $0 \leqslant P(|M_n - 25| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{64}{n}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{64}{n} = 0$. Par encadrement (théorème des gendarmes), la limite vaut 0. C'est la loi faible des grands nombres : plus on teste de batteries, plus il est probable que l'autonomie moyenne soit à moins de 0,5 km de 25 km. Cela ne dit rien d'une batterie seule.

Ex. 27 ★★★ Enquête sur le vélo et simulation de Ben

(a) X suit une loi de Bernoulli : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$. On a $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc $V(X) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $p \in [0\,;1]$.

(b) F_{625} est la moyenne d'un échantillon de taille 625 de la loi de X : $\mu = p$, $V \leqslant 0{,}25$, $\delta = 0{,}04$. D'après l'inégalité de concentration, $P(|F_{625} - p| \geqslant 0{,}04) \leqslant \frac{0{,}25}{625 \times 0{,}04^2} = \frac{0{,}25}{1} = 0{,}25$. Par l'événement contraire, $P(|F_{625} - p| < 0{,}04) \geqslant 0{,}75$: quelle que soit p, la fréquence observée est à moins de 0,04 de la vraie proportion avec une probabilité d'au moins 0,75.

Ex. 27 (suite)

(c) `c` compte les enquêtes simulées (sur 200) dont la fréquence s'écarte de 0,3 d'au moins 0,04. La valeur affichée est la fréquence observée de l'événement $|F_{625} - 0{,}3| \geqslant 0{,}04$ sur ces 200 simulations.

(d) Pour $p = 0{,}3$: $V = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$ et $P(|F_{625} - 0{,}3| \geqslant 0{,}04) \leqslant \frac{0{,}21}{625 \times 0{,}04^2} = 0{,}21$. La fréquence simulée 0,03 est inférieure à 0,21 : la simulation ne contredit pas l'inégalité. Elle suggère que ce majorant est grossier : la probabilité réelle semble nettement plus petite que 0,21.

(e) On veut $\frac{V}{n\delta^2} \leqslant 0{,}1$ avec $\delta = 0{,}03$. Comme p est inconnue, on prend $V \leqslant 0{,}25$: il suffit que $\frac{0{,}25}{n \times 0{,}03^2} \leqslant 0{,}1$, soit $n \geqslant \frac{0{,}25}{0{,}1 \times 0{,}0009} \approx 2\,777{,}8$. Inès doit interroger au moins 2 778 lycéens. Vérification :

```
n = 1
while 0.25/(n*0.03**2) > 0.1:
    n = n + 1
print(n)
```

affiche 2 778.

Ex. 28 ★★★ Combien de baguettes pour la boulangerie de Zoé ?

(a) $\mu = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2 = 1{,}6$. $E(X^2) = 0{,}4 + 4 \times 0{,}3 + 9 \times 0{,}2 = 3{,}4$, donc $V(X) = 3{,}4 - 1{,}6^2 = 0{,}84$. M_{200} est le nombre moyen de baguettes achetées par client ce jour-là.

(b) $(X_1, \dots, X_{200})$ est un échantillon de taille 200 de la loi de X (variables indépendantes, de même loi). D'après l'inégalité de concentration avec $V(X) = 0{,}84$, $n = 200$ et $\delta = 0{,}1$: $P(|M_{200} - 1{,}6| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{0{,}84}{200 \times 0{,}1^2} = 0{,}42$. Le nombre moyen de baguettes par client s'écarte de 1,6 d'au moins 0,1 avec une probabilité d'au plus 0,42.

(c) Si $S_{200} > 340$, alors $M_{200} = \frac{S_{200}}{200} > 1{,}7$, donc $M_{200} - 1{,}6 > 0{,}1$ et $|M_{200} - 1{,}6| \geqslant 0{,}1$. L'événement « rupture » est inclus dans $\{|M_{200} - 1{,}6| \geqslant 0{,}1\}$, donc $P(S_{200} > 340) \leqslant 0{,}42$: Zoé manque de baguettes avec une probabilité d'au plus 0,42.

(d) $n\mu = 320$. Si $S_{200} > b$, alors $S_{200} - 320 > b - 320$, donc $|M_{200} - 1{,}6| \geqslant \delta$ avec $\delta = \frac{b - 320}{200}$. D'après l'inégalité de concentration : $P(S_{200} > b) \leqslant \frac{0{,}84}{200\delta^2} = \frac{0{,}84 \times 200}{(b-320)^2} = \frac{168}{(b-320)^2}$.

(e) Il suffit que $\frac{168}{(b-320)^2} \leqslant 0{,}1$, soit $(b - 320)^2 \geqslant 1\,680$, soit $b - 320 \geqslant \sqrt{1\,680} \approx 40{,}99$. Comme b est entier, $b \geqslant 361$ (pour $b = 360$: $\frac{168}{1\,600} = 0{,}105 > 0{,}1$). Avec 361 baguettes, le risque de rupture est au plus 0,1.

5. *Loi faible des grands nombres*

Ex. 29 ★☆☆ **Majorer, minorer, passer à la limite**

(a) $\mu = 12$, $V = 5$, $n = 200$, $\delta = 0{,}5$. L'inégalité de concentration donne $P(|M_{200} - 12| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{5}{200 \times 0{,}5^2} = 0{,}1$. La probabilité vaut au plus 0,1.

(b) $M_{80} \leqslant 11$ ou $M_{80} \geqslant 13 \iff |M_{80} - 12| \geqslant 1$. Avec $n = 80$ et $\delta = 1$, l'inégalité de concentration donne $P(|M_{80} - 12| \geqslant 1) \leqslant \frac{5}{80 \times 1^2} = 0{,}0625$. La probabilité vaut au plus 0,0625.

(c) $n = 500$, $\delta = 0{,}1$: majorant $\frac{5}{500 \times 0{,}1^2} = 1$. Une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1 : ce majorant ne t'apprend rien. La précision 0,1 demande un échantillon plus grand.

(d) $11{,}5 < M_{400} < 12{,}5 \iff |M_{400} - 12| < 0{,}5$. On passe à l'événement contraire : $P(|M_{400} - 12| < 0{,}5) \geqslant 1 - \frac{5}{400 \times 0{,}5^2} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. La probabilité vaut au moins 0,95.

(e) Pour tout $n \geqslant 1$, une probabilité est positive et l'inégalité de concentration s'applique : $0 \leqslant P(|M_n - 12| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{5}{n \times 0{,}5^2} = \frac{20}{n}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{20}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, la probabilité tend vers 0.

Ex. 30 ★☆☆ **Vrai ou faux à la roulette**

(a) Faux. Les tours sont indépendants : au tour suivant, le noir garde la probabilité $\frac{18}{37} \approx 0{,}4865$. La loi des grands nombres ne dit pas qu'un écart passé sera « compensé ».

(b) Faux. $100\,000 \times \frac{18}{37} \approx 48\,648{,}65$ n'est pas entier, donc aucun nombre de rouges ne donne exactement cette fréquence. La loi dit seulement que F_n est proche de $\frac{18}{37}$ avec une probabilité proche de 1, pas qu'elle lui devient égale.

(c) Vrai. C'est la loi faible des grands nombres, avec des variables de Bernoulli : $\mu = p = \frac{18}{37}$ et $\delta = 0{,}01$. On a $0 \leqslant P \leqslant \frac{p(1-p)}{n \times 0{,}01^2}$, qui tend vers 0, puis on applique les gendarmes.

(d) Faux. Un grand écart reste possible : par exemple, l'événement « aucun rouge en 10 000 tours » a une probabilité non nulle. On sait seulement que $V = \frac{18 \times 19}{37^2} \approx 0{,}2498$, donc la probabilité d'un écart d'au moins 0,01 vaut au plus $\frac{0{,}2498}{10\,000 \times 0{,}01^2} \approx 0{,}2498$. L'écart est peu probable, pas impossible.

Ex. 30 (suite)

(e) Vrai. D'après la loi faible des grands nombres, la fréquence observée se stabilise autour de la probabilité quand n grandit. La fréquence d'un grand échantillon est donc une bonne estimation de p : c'est le lien entre l'expérience et le modèle.

Ex. 31 ★★☆ **Simuler des moyennes de lancers de dé**

(a) `s` est la somme des n résultats, donc `s / n` est la moyenne observée M_n d'un échantillon. La fonction simule N échantillons de taille n. Elle renvoie la proportion de ceux dont la moyenne s'écarte de 3,5 d'au moins `d`.

(b) $E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$. $E(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$.
Donc $V(X) = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = \frac{35}{12}$.

(c) $\mu = 3{,}5$, $V = \frac{35}{12}$, $n = 100$, $\delta = 0{,}5$. On a $P(|M_{100} - 3{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{35/12}{100 \times 0{,}5^2} = \frac{7}{60} \approx 0{,}1167$. La probabilité vaut au plus environ 0,117.

(d) Non. 0,0036 estime la probabilité de l'écart, et $0{,}0036 \leqslant 0{,}1167$. L'inégalité ne donne qu'un majorant : elle est vraie, mais souvent grossière.

(e) Pour tout $n \geqslant 1$: $0 \leqslant P(|M_n - 3{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{35/12}{n \times 0{,}5^2} = \frac{35}{3n}$. Or $\frac{35}{3n} \to 0$, donc la probabilité tend vers 0 d'après les gendarmes. La fonction estime cette probabilité : quand n grandit, ses valeurs sont en général de plus en plus proches de 0, aux fluctuations près.

Ex. 32 ★★☆ **Contrôle de flacons : corriger Léa**

(a) $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Avec des variables de Bernoulli, $\mu = p$ et $V = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.
L'inégalité de concentration avec $\delta = 0{,}02$ donne $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02) \leqslant \frac{p(1-p)}{n \times 0{,}02^2} \leqslant \frac{1/4}{n \times 0{,}02^2} = \frac{625}{n}$.

(b) Un majorant qui tend vers 0 ne suffit pas : il faut aussi un minorant. Une probabilité est positive, donc $0 \leqslant P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02) \leqslant \frac{625}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{625}{n} = 0$, le théorème des gendarmes donne une limite 0.

(c) Non. La loi faible des grands nombres dit que F_n est proche de p (à moins de 0,02) avec une probabilité proche de 1. Elle ne dit pas que F_n devient égale à p : des écarts restent possibles, mais de moins en moins probables.

(d) Les fréquences se stabilisent autour de 0,036, donc $p \approx 0{,}036$. Par l'événement contraire, $P(|F_{6000} - p| < 0{,}02) \geqslant 1 - \frac{625}{6000} \approx 0{,}8958$. Cette probabilité vaut au moins 0,89 environ.

Ex. 33 ★★★ **Tombola : du modèle à la garantie**

(a) $E(X) = 3 \times 0{,}7 + 1 \times 0{,}2 + (-7) \times 0{,}1 = 2{,}1 + 0{,}2 - 0{,}7 = 1{,}6$. On a $E(X^2) = 9 \times 0{,}7 + 1 \times 0{,}2 + 49 \times 0{,}1 = 11{,}4$, donc $V(X) = 11{,}4 - 1{,}6^2 = 8{,}84$.

(b) M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de X, avec $\mu = 1{,}6$ et $V = 8{,}84$. Soit $\delta > 0$. Une probabilité est positive, et l'inégalité de concentration donne $0 \leqslant P(|M_n - 1{,}6| \geqslant \delta) \leqslant \frac{8{,}84}{n\delta^2}$. Comme δ est fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8{,}84}{n\delta^2} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, la probabilité tend vers 0. Interprétation : sur un très grand nombre de tickets, le bénéfice moyen par ticket est proche de 1,60 € avec une probabilité proche de 1.

(c) On cherche $\frac{8{,}84}{n \times 0{,}4^2} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant \frac{8{,}84}{0{,}05 \times 0{,}16} = 1105$. Le plus petit entier est $n = 1105$.

(d) On passe à l'événement contraire : $P(|M_{1105} - 1{,}6| < 0{,}4) \geqslant 1 - \frac{8{,}84}{1105 \times 0{,}16} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Or $|M_{1105} - 1{,}6| < 0{,}4 \iff 1{,}2 < M_{1105} < 2$. En multipliant par 1105, cela équivaut à $1326 < S_{1105} < 2210$. Le bénéfice total est donc dans $]1326\,;2210[$ avec une probabilité d'au moins 0,95.

(e) Faux. D'après la question précédente, $S_{1105} > 1326 > 0$ avec une probabilité d'au moins 0,95 : le bénéfice est positif avec une forte probabilité, pas de façon certaine. Par exemple, l'événement « chaque ticket donne un bénéfice de -7 € » a la probabilité $0{,}1^{1105} > 0$, et alors $S_{1105} = -7735 < 0$. L'inégalité de concentration donne une garantie en probabilité, jamais une certitude.

Ex. 34 ★★★ **Semis simulés et indépendance**

(a) `random()` renvoie un réel au hasard dans $[0\,;1[$. Il est inférieur à 0,7 avec la probabilité 0,7. Le test modélise donc « la graine germe ». À la fin de la boucle, `c` contient le nombre de graines germées parmi les n graines semées. `germe(n)` renvoie `c / n`, la fréquence F_n observée sur un semis simulé. Cette valeur change d'une exécution à l'autre.

(b) Pour les petites tailles, les fréquences s'écartent nettement de 0,7 (0,66 pour $n = 100$, 0,735 pour $n = 200$). À partir de $n = 500$, elles restent entre 0,694 et 0,705 : elles se stabilisent autour de 0,7. Avec des variables de Bernoulli de paramètre 0,7, on a $M_n = F_n$ et $\mu = p = 0{,}7$. La loi faible donne $P(|F_n - 0{,}7| \geqslant \delta) \to 0$: la fréquence se rapproche de la probabilité quand n grandit.

Ex. 34 (suite)

(c) Faux. Les graines sont indépendantes : chaque graine suivante germe avec la probabilité 0,7, quel que soit le passé. Le retard n'est pas rattrapé, il est dilué. Sur n graines ($n > 100$), on compte en moyenne $66 + 0{,}7(n - 100)$ graines germées, soit une fréquence moyenne $\frac{66 + 0{,}7(n-100)}{n} = 0{,}7 - \frac{4}{n}$, qui tend vers 0,7. Par exemple, pour $n = 10\,000$: $0{,}7 - 0{,}0004 = 0{,}6996$. Le retard de 4 graines reste en moyenne, mais il pèse de moins en moins dans la fréquence.

(d) Toutes les graines ont le même résultat. La fonction renvoie 1 (si `r < 0.7`, avec la probabilité 0,7) ou 0 (avec la probabilité 0,3). L'écart $|F_n - 0{,}7|$ vaut alors 0,3 ou 0,7, donc $P(|F_n - 0{,}7| \geqslant 0{,}3) = 1$ pour tout n : cette probabilité ne tend pas vers 0. La loi ne s'applique pas, car les variables ne sont plus indépendantes ($X_1 = X_2 = \cdots = X_n$).

(e) On sème un grand nombre n de graines et on prend la fréquence observée F_n comme estimation de p. D'après la loi des grands nombres, F_n est proche de p avec une probabilité proche de 1. Mais F_n fluctue d'un échantillon à l'autre (0,735 pour $n = 200$ alors que $p = 0{,}7$). C'est donc une valeur approchée, obtenue avec une forte probabilité, et non une égalité.

Ex. 35 ★★★ **Quiz au hasard : fréquence et nombre de succès**

(a) S_n suit la loi $\mathcal{B}(n\,;0{,}5)$. On a $E(S_n) = 0{,}5n$ et $V(S_n) = n \times 0{,}5 \times 0{,}5 = \frac{n}{4}$. Ensuite, $E(F_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = 0{,}5$ et $V(F_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{4n}$.

(b) On a $|F_{20} - 0{,}5| \geqslant 0{,}2 \iff |S_{20} - 10| \geqslant 4 \iff S_{20} \leqslant 6$ ou $S_{20} \geqslant 14$. F_{20} est la moyenne d'un échantillon de taille 20 d'une variable de Bernoulli, avec $\mu = 0{,}5$ et $V = 0{,}25$. Avec $\delta = 0{,}2$: $P(|F_{20} - 0{,}5| \geqslant 0{,}2) \leqslant \frac{0{,}25}{20 \times 0{,}2^2} = 0{,}3125$.

(c) $P(S_{20} \leqslant 6) + P(S_{20} \geqslant 14) = 0{,}0577 + (1 - 0{,}9423) = 0{,}1154$, soit environ 0,115. Le majorant 0,3125 est juste, mais il est près de trois fois trop grand : l'inégalité de concentration est grossière.

(d) Tom a tort. $S_n - \frac{n}{2} = n(F_n - 0{,}5)$ et $V\left(S_n - \frac{n}{2}\right) = V(S_n) = \frac{n}{4}$, qui tend vers $+\infty$. L'écart type $\frac{\sqrt{n}}{2}$ passe d'environ 2,24 pour $n = 20$ à 5 pour $n = 100$: les écarts en nombre de bonnes réponses grandissent. D'ailleurs, $P(S_{100} = 50) \approx 0{,}0796 < P(S_{20} = 10) \approx 0{,}1762$. C'est l'écart divisé par n qui tend vers 0. Un écart en nombre de réponses n'est pas « compensé ».

Ex. 35 **(suite)**

(e) La condition est `0.25 / (n * 0.05**2) > 0.03` : on continue tant que le majorant dépasse 0,03. Par le calcul, $\frac{0{,}25}{n\times 0{,}05^2} = \frac{100}{n} \leqslant 0{,}03 \iff n \geqslant \frac{100}{0{,}03} \approx 3333{,}3$. Donc $n = 3334$.

6. *Choisir la taille d'un échantillon*

Ex. 36 ★☆☆ **Tailles minimales en ligne**

(a) $n \geqslant \frac{9}{0{,}04\times 0{,}25} = \frac{9}{0{,}01} = 900$, donc $n = 900$.

(b) $n \geqslant \frac{2{,}5}{0{,}03\times 0{,}01} = \frac{2{,}5}{0{,}0003} \approx 8\,333{,}33$. On prend l'entier supérieur : $n = 8\,334$.

(c) Ici $\delta = 1$, et « au moins 0,9 » donne $\alpha = 0{,}1$. Alors $n \geqslant \frac{16}{0{,}1\times 1} = 160$, donc $n = 160$.

(d) p est inconnu, donc $V = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ et l'on prend $V = 0{,}25$. Alors $n \geqslant \frac{0{,}25}{0{,}03\times 0{,}0004} = \frac{0{,}25}{0{,}000012} \approx 20\,833{,}33$, donc $n = 20\,834$.

(e) $V = 0{,}2\times 0{,}8 = 0{,}16$, $\delta = 0{,}03$ (3 points) et $\alpha = 0{,}01$. Alors $n \geqslant \frac{0{,}16}{0{,}01\times 0{,}0009} \approx 17\,777{,}78$, donc $n = 17\,778$.

(f) Attention, $V = \sigma^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$. Alors $n \geqslant \frac{2{,}25}{0{,}07\times 0{,}16} = \frac{2{,}25}{0{,}0112} \approx 200{,}89$, donc $n = 201$ (entier supérieur).

Ex. 37 ★☆☆ **Traduire, isoler, ajuster**

(a) 4 points donnent $\delta = 0{,}04$. « Au moins 92 % » donne $\alpha = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$.

(b) Comme $n\delta^2 > 0$ et $\alpha > 0$: $\frac{V}{n\delta^2} \leqslant \alpha \iff V \leqslant \alpha n\delta^2 \iff n \geqslant \frac{V}{\alpha\delta^2}$.

(c) On doit avoir $n \geqslant 912{,}1$. Or $912 < 912{,}1$, donc 912 ne convient pas. On arrondit toujours à l'entier supérieur : $n = 913$.

(d) Avec $\frac{\delta}{2}$, on obtient $\frac{V}{\alpha(\delta/2)^2} = 4\times\frac{V}{\alpha\delta^2} = 4\times 1\,500 = 6\,000$. Il faut donc $n = 6\,000$: diviser δ par 2 multiplie la taille par 4.

(e) Avec 3δ, on obtient $\frac{V}{\alpha\times 9\delta^2} = \frac{1\,500}{9} \approx 166{,}67$. On arrondit à l'entier supérieur : $n = 167$.

(f) $\frac{4}{400\delta^2} \leqslant 0{,}1 \iff \delta^2 \geqslant \frac{4}{40} = 0{,}1 \iff \delta \geqslant \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}316$. La plus petite précision est $\delta = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}316$.

Ex. 38 ★★☆ **Contrôle qualité : le programme de Lina**

(a) Pour tout réel p, $p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$. Donc $\frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leqslant \frac{0{,}25}{n\delta^2}$. Si ce majorant est inférieur ou égal à α, la condition est vraie pour toutes les valeurs de p.

Ex. 38 **(suite)**

(b) Pour $n = 1$, $\frac{0{,}25}{0{,}03^2} \approx 277{,}8$ est supérieur à 0,1. La condition du while est donc fausse dès le départ, la boucle ne s'exécute pas et la fonction renvoie 1. C'est absurde : une seule pièce ne garantit rien.

(c) La boucle doit continuer tant que la condition cherchée n'est pas réalisée. La condition du while est donc la négation : `while 0.25/(n*delta**2) > alpha:`

(d) Il renvoie le plus petit entier $n \geqslant \frac{0{,}25}{0{,}1\times 0{,}0009} \approx 2\,777{,}78$, c'est-à-dire 2 778. Avec au moins 2 778 pièces, $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}03) \leqslant 0{,}1$: la fréquence des pièces défectueuses est à moins de 3 points de p avec une probabilité d'au moins 0,9.

(e) Comme $\delta > 0$, $\frac{0{,}25}{n\delta^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\alpha > 0$, il existe un rang à partir duquel $\frac{0{,}25}{n\delta^2} \leqslant \alpha$. Or n augmente de 1 à chaque tour : la condition du while finit par être fausse, au plus tard au premier entier supérieur ou égal à $\frac{0{,}25}{\alpha\delta^2}$, et la boucle s'arrête.

Ex. 39 ★★☆ **Moyenne de mesures d'un thermomètre**

(a) $E(X) = -2\times 0{,}1 - 1\times 0{,}2 + 0 + 1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}1 = 0$. $E(X^2) = 4\times 0{,}1 + 1\times 0{,}2 + 0 + 1\times 0{,}2 + 4\times 0{,}1 = 1{,}2$, donc $V(X) = 1{,}2 - 0^2 = 1{,}2$.

(b) On a $\mu = 0$ et $\delta = 0{,}3$. L'événement contraire de « $M_n \in]-0{,}3\,;0{,}3[$ » est $|M_n - 0| \geqslant 0{,}3$, de probabilité au plus $\alpha = 0{,}04$. Les mesures sont indépendantes, donc l'inégalité de concentration donne $P(|M_n| \geqslant 0{,}3) \leqslant \frac{1{,}2}{n\times 0{,}09}$. Il suffit que $\frac{1{,}2}{0{,}09\,n} \leqslant 0{,}04$.

(c) $\frac{1{,}2}{0{,}09\,n} \leqslant 0{,}04 \iff n \geqslant \frac{1{,}2}{0{,}04\times 0{,}09} \approx 333{,}33$. Attention : $n = 333$ ne convient pas, car $\frac{1{,}2}{333\times 0{,}09} \approx 0{,}04004 > 0{,}04$. On arrondit à l'entier supérieur : il faut au moins 334 mesures.

(d) $P(|M_{300}| \geqslant 0{,}3) \leqslant \frac{1{,}2}{300\times 0{,}09} = \frac{1{,}2}{27} \approx 0{,}0444$. Par l'événement contraire, $P(-0{,}3 < M_{300} < 0{,}3) \geqslant 1 - 0{,}0444 \approx 0{,}9556$. L'inégalité garantit une probabilité d'au moins 95,6 % environ, moins que les 96 % voulus.

Ex. 40 ★★★ **Sondage sur le tramway : jusqu'où peut-on économiser ?**

(a) Pour tout p, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$. Ici la précision est $\delta = 0{,}05$ (5 points) et le risque $\alpha = 0{,}06$ (« au moins 94 % »). L'inégalité de concentration donne $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{p(1-p)}{n \times 0{,}05^2} \leqslant \frac{0{,}25}{0{,}0025\,n}$. Il suffit donc que $\frac{0{,}25}{0{,}0025\,n} \leqslant 0{,}06$, c'est-à-dire $n \geqslant \frac{0{,}25}{0{,}06 \times 0{,}0025} \approx 1\,666{,}67$. On arrondit à l'entier supérieur : avec $n = 1\,667$ personnes, l'objectif est garanti quel que soit p.

(b) Diviser δ par 2 divise δ^2 par 4 : le seuil $\frac{V}{\alpha\delta^2}$ est multiplié par 4. Il vaut $\frac{0{,}25}{0{,}06 \times 0{,}025^2} \approx 6\,666{,}67$, donc la méthode donne $n = 6\,667$. Les 6 668 personnes du stagiaire conviennent, mais ce n'est pas la plus petite taille donnée par la méthode : il a arrondi avant de multiplier par 4. Il faut multiplier le seuil exact 1 666,67, puis arrondir.

(c) Une proportion vérifie $p \geqslant 0$, donc ici $p \in [0\,;0{,}3]$. Sur cet intervalle, $f(p) = p - p^2$ a pour dérivée $f'(p) = 1 - 2p > 0$: f est croissante, donc $p(1-p) \leqslant f(0{,}3) = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$. Il suffit alors que $n \geqslant \frac{0{,}21}{0{,}06 \times 0{,}025^2} = 5\,600$. Le résultat est entier et l'inégalité est large, donc $n = 5\,600$ convient, sans arrondi. On économise $6\,667 - 5\,600 = 1\,067$ personnes.

(d) $n \geqslant \frac{0{,}21}{0{,}12 \times 0{,}025^2} = 2\,800$: doubler α divise la taille par 2 ($5\,600 \to 2\,800$). Doubler δ (revenir à 5 points) donne $\frac{0{,}21}{0{,}06 \times 0{,}05^2} = 1\,400$: la taille est divisée par 4. Relâcher la précision économise donc plus que relâcher le risque.

Ex. 41 ★★★ **Pesées au laboratoire : le programme de Noé**

(a) $V(X) = 0{,}7^2 = 0{,}49$, $\delta = 0{,}2$ et $\alpha = 0{,}1$. Les pesées forment un échantillon de taille n de X. L'inégalité de concentration donne donc $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}2) \leqslant \frac{0{,}49}{n \times 0{,}04}$. On a $\frac{0{,}49}{0{,}04\,n} \leqslant 0{,}1 \iff n \geqslant \frac{0{,}49}{0{,}1 \times 0{,}04} = 122{,}5$. On prend l'entier supérieur, $n = 123$: la probabilité est alors au plus 0,1.

(b) On continue tant que la condition cherchée n'est pas réalisée, donc on écrit sa négation : `while V / (n * d**2) > a:`. Le premier paramètre est la variance, pas l'écart type : Noé écrit `taille(0.49, 0.2, 0.1)`, et non `taille(0.7, 0.2, 0.1)`. Cet appel renvoie 123, comme à la question précédente.

(c) $V(X) = 0{,}35^2 = 0{,}1225$: diviser l'écart type par 2 divise la variance par 4. On a $n \geqslant \frac{0{,}1225}{0{,}1 \times 0{,}04} = 30{,}625$. L'appel `taille(0.1225, 0.2, 0.1)` renvoie donc 31 : 31 pesées suffisent.

Ex. 41 (suite)

(d) On veut $\frac{0{,}49}{50\,\delta^2} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $\delta^2 \geqslant \frac{0{,}49}{50 \times 0{,}1} = 0{,}098$. Comme $\delta > 0$, cela donne $\delta \geqslant \sqrt{0{,}098} \approx 0{,}313$. Avec 50 pesées, la moyenne est à moins de 0,313 mg environ de μ, avec une probabilité d'au moins 0,9.

Ex. 42 ★★★ **Graines qui ne germent pas : majorant ou probabilité exacte ?**

(a) On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues de succès « ne germe pas », de probabilité 0,1.
Donc X suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}1)$, avec $E(X) = 0{,}1n$ et $V(X) = n \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09n$. On en déduit $E(F_n) = \frac{E(X)}{n} = 0{,}1$ et $V(F_n) = \frac{V(X)}{n^2} = \frac{0{,}09}{n}$.

(b) $|F_{100} - 0{,}1| \geqslant 0{,}04 \iff |X - 10| \geqslant 4 \iff X \leqslant 6$ ou $X \geqslant 14$. Comme X est entier, $P(X \geqslant 14) = 1 - P(X \leqslant 13)$. La probabilité vaut donc $0{,}1172 + 1 - 0{,}8761 = 0{,}2411$.

(c) L'inégalité de concentration, avec $V = 0{,}09$ et $\delta = 0{,}04$, donne $P(|F_{100} - 0{,}1| \geqslant 0{,}04) \leqslant \frac{0{,}09}{100 \times 0{,}04^2} = 0{,}5625$. Le majorant est juste, car $0{,}2411 \leqslant 0{,}5625$, mais il est grossier : plus de deux fois la vraie valeur.

(d) Il suffit que $\frac{0{,}09}{n \times 0{,}04^2} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant \frac{0{,}09}{0{,}1 \times 0{,}0016} = 562{,}5$. On arrondit à l'entier supérieur : un sachet de 563 graines garantit une probabilité au plus égale à 0,1.

(e) Non. La taille 563 est suffisante, pas forcément nécessaire. En dessous de 563, c'est seulement le majorant qui dépasse 0,1, pas forcément la vraie probabilité. Or la question précédente montre que la vraie probabilité peut être bien plus petite que le majorant (0,2411 contre 0,5625). Un sachet plus petit peut donc déjà convenir.

7. *Problèmes type bac*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : majorants et minorants**

(a) Ici $V = 6$, $n = 160$ et $\delta = 0{,}5$. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_{160} - 8| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{6}{160 \times 0{,}25} = \frac{6}{40} = 0{,}15$.

(b) $V = 4^2 = 16$ et $\delta = 1$. Par l'événement contraire, $P(|M_{200} - \mu| < 1) \geqslant 1 - \frac{16}{200 \times 1^2} = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

(c) Loi de Bernoulli : $\mu = 0{,}3$ et $V = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$. On a $P(|M_{840} - 0{,}3| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{0{,}21}{840 \times 0{,}0025} = \frac{0{,}21}{2{,}1} = 0{,}1$.

(d) L'événement s'écrit $|M_{60} - 7| \geqslant 0{,}4$: l'intervalle est centré en 7 et $\delta = 0{,}4$. La probabilité est donc au plus $\frac{2{,}4}{60 \times 0{,}16} = \frac{2{,}4}{9{,}6} = 0{,}25$.

Ex. 43 **(suite)**

(e) $]11{,}5\,;12{,}5[$ est centré en $\mu = 12$, avec $\delta = 0{,}5$. On obtient $P(|M_{250} - 12| < 0{,}5) \geqslant 1 - \frac{9}{250 \times 0{,}25} = 1 - 0{,}144 = 0{,}856$.

(f) Pour une seule observation (Bienaymé-Tchebychev), le majorant vaut $\frac{5}{2^2} = 1{,}25$: il ne donne aucune information. Pour la moyenne, il vaut $\frac{5}{50 \times 4} = 0{,}025$. Il est 50 fois plus petit, ce qui montre pourquoi on ne doit pas oublier n.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : taille d'échantillon et transformations**

(a) On veut $\frac{0{,}16}{n \times 0{,}1^2} \leqslant 0{,}05$, soit $n \geqslant \frac{0{,}16}{0{,}05 \times 0{,}01} = 320$.
Donc $n = 320$.

(b) $V = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, donc il suffit que $n \geqslant \frac{0{,}25}{0{,}1 \times 0{,}02^2} = \frac{0{,}25}{0{,}00004} = 6\,250$.
Donc $n = 6\,250$.

(c) Comme X est entier, $23 \leqslant X \leqslant 37 \iff 22 < X < 38 \iff |X - 30| < 8$. D'après Bienaymé-Tchebychev, $P \geqslant 1 - \frac{16}{8^2} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

(d) n est multiplié par 3, donc le majorant est divisé par 3 : il vaut $\frac{0{,}12}{3} = 0{,}04$.

(e) δ^2 est divisé par 4, donc le majorant est multiplié par 4 : il vaut $0{,}12 \times 4 = 0{,}48$.

Ex. 45 ★★☆ **Le stand de la fête foraine**

(a) $\mu = -1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}4 + 8 \times 0{,}1 = 1{,}1$. Ensuite $E(G^2) = 0{,}5 + 1{,}6 + 6{,}4 = 8{,}5$, donc $V(G) = 8{,}5 - 1{,}1^2 = 7{,}29$.

(b) $\sigma(G) = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7$, donc $\delta = 5{,}4$. D'après Bienaymé-Tchebychev, $P(|G - 1{,}1| < 5{,}4) \geqslant 1 - \frac{7{,}29}{5{,}4^2} = 1 - \frac{1}{4} = 0{,}75$. Cet événement est $-4{,}3 < G < 6{,}5$.

(c) Les parties forment un échantillon de taille $n = 810$ de la loi de G, avec $V = 7{,}29$ et $\delta = 0{,}3$. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_{810} - 1{,}1| \geqslant 0{,}3) \leqslant \frac{7{,}29}{810 \times 0{,}09} = \frac{7{,}29}{72{,}9} = 0{,}1$.

(d) Par l'événement contraire, le gain moyen de Noé sur 810 parties est dans $]0{,}8\,;1{,}4[$ avec une probabilité d'au moins 0,9. En particulier, il gagne en moyenne au moins 0,80 € par partie avec une probabilité d'au moins 0,9.

(e) On veut $\frac{7{,}29}{n \times 0{,}09} \leqslant 0{,}05$, soit $n \geqslant \frac{7{,}29}{0{,}05 \times 0{,}09} = 1\,620$. Il faut donc au moins 1 620 parties.

Ex. 46 ★★☆ **Les jours de pluie en avril**

(a) Il y a 20 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,5, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}5)$. On a $E(X) = 20 \times 0{,}5 = 10$ et $V(X) = 20 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 5$.

(b) D'après Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - 10| < \delta) \geqslant 1 - \frac{5}{\delta^2}$. On veut $1 - \frac{5}{\delta^2} \geqslant 0{,}75$, soit $\delta^2 \geqslant 20$, donc $\delta \geqslant 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$. On prend $\delta = 2\sqrt{5}$. Comme X est entier, $|X - 10| < 4{,}47 \iff |X - 10| \leqslant 4 \iff 6 \leqslant X \leqslant 14$.
Donc $P(6 \leqslant X \leqslant 14) \geqslant 0{,}75$.

(c) Faux. Comme X est entier, $7 \leqslant X \leqslant 13 \iff 6 < X < 14 \iff |X - 10| < 4$. Bienaymé-Tchebychev donne seulement $P(|X - 10| < 4) \geqslant 1 - \frac{5}{4^2} = 0{,}6875$, ce qui ne garantit pas 0,8. Pourtant, la table donne $P(7 \leqslant X \leqslant 13) = P(X \leqslant 13) - P(X \leqslant 6) = 0{,}9423 - 0{,}0577 = 0{,}8846$. La probabilité dépasse donc bien 0,8, mais l'inégalité, trop grossière, ne permet pas de le montrer.

(d) Zoé a oublié de diviser par $n = 30$: 1 est l'écart δ, et $V = 5$ est la variance d'une seule observation. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_{30} - 10| \geqslant 1) \leqslant \frac{5}{30 \times 1^2} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Le résultat est donc utile.

Ex. 47 ★★★ **Les graines de tomate**

(a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès « la graine ne germe pas » a la probabilité 0,2. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}2)$. On a $E(X) = 20 \times 0{,}2 = 4$ et $V(X) = 20 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 3{,}2$.

(b) X est un entier, donc $1 \leqslant X \leqslant 7 \iff 0 < X < 8 \iff -4 < X - 4 < 4 \iff |X - 4| < 4$. On prend donc $\mu = 4$ et $\delta = 4$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - 4| \geqslant 4) \leqslant \frac{3{,}2}{4^2} = 0{,}2$. Par passage à l'événement contraire, $P(1 \leqslant X \leqslant 7) = P(|X - 4| < 4) \geqslant 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

(c) $P(1 \leqslant X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 0) = 0{,}9679 - 0{,}0115 = 0{,}9564$. Attention : on soustrait $P(X \leqslant 0)$, et non $P(X \leqslant 1)$. Le minorant 0,8 est bien vérifié, mais il est grossier. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne se sert que de μ et de V : elle est valable pour toutes les lois, donc elle est souvent pessimiste.

Ex. 47 **(suite)**

(d) Les 50 sachets sont indépendants et suivent la même loi que X. On a donc $\mu = 4$, $V = 3{,}2$, $n = 50$ et $\delta = 0{,}5$. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_{50} - 4| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{3{,}2}{50 \times 0{,}5^2} = \frac{3{,}2}{12{,}5} = 0{,}256$. Par l'événement contraire, $P(3{,}5 < M_{50} < 4{,}5) \geqslant 1 - 0{,}256 = 0{,}744$. Le nombre moyen est donc dans $]3{,}5\,;4{,}5[$ avec une probabilité d'au moins 0,744.

(e) Il faut que $\frac{3{,}2}{n \times 0{,}2^2} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant \frac{3{,}2}{0{,}05 \times 0{,}04} = 1\,600$. Avec 1 600 sachets (soit 32 000 graines), on a $P(|M_n - 4| < 0{,}2) \geqslant 0{,}95$. C'est une condition suffisante : une taille plus petite pourrait déjà convenir en réalité.

Ex. 48 ★★★ **Le sondage sur la piste cyclable**

(a) X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p, donc $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$. Or $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. On en déduit $V(X_i) \leqslant \frac{1}{4}$, avec égalité si $p = \frac{1}{2}$.

(b) Les X_i sont indépendantes et de même loi, avec $\mu = p$ et $V = p(1-p) \leqslant 0{,}25$. On a $n = 1\,200$ et $\delta = 0{,}04$. D'après l'inégalité de concentration, $P(|F_{1200} - p| \geqslant 0{,}04) \leqslant \frac{p(1-p)}{1200 \times 0{,}04^2} \leqslant \frac{0{,}25}{1{,}92} \approx 0{,}1302$. Donc, avec une probabilité d'au moins 0,8698, la fréquence observée diffère de p de moins de 0,04.

(c) Faux. p est un nombre fixé, pas une variable aléatoire : « la probabilité que p vaille 0,52 » n'a pas de sens, et rien ne dit que $p = 0{,}52$. L'inégalité porte sur la fréquence aléatoire F_{1200} et décrit ce qu'on pouvait attendre avant le sondage : l'événement « F_{1200} diffère de p de moins de 0,04 » a une probabilité d'au moins 0,8698.

(d) La condition est `0.25/(n*delta**2) > alpha` : on augmente n tant que le majorant dépasse α. Pour $\delta = 0{,}03$ et $\alpha = 0{,}1$, il faut $n \geqslant \frac{0{,}25}{0{,}1 \times 0{,}03^2} \approx 2\,777{,}8$. Le programme renvoie donc 2 778.

(e) Vrai, à l'arrondi près. Le majorant $\frac{0{,}25}{n\delta^2}$ dépend de $n\delta^2$. Si l'on divise δ par 2, δ^2 est divisé par 4 : pour garder le même majorant, il faut multiplier n par 4. Ici, $\frac{0{,}25}{0{,}1 \times 0{,}015^2} \approx 11\,111{,}1$, donc `taille(0.015, 0.1)` renvoie 11 112, soit exactement $4 \times 2\,778$.

Ex. 49 ★★★ **L'attente du bus d'Élise**

(a) $\mu = 2 \times 0{,}5 + 5 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}2 = 4{,}5$. On a $E(T^2) = 4 \times 0{,}5 + 25 \times 0{,}3 + 100 \times 0{,}2 = 29{,}5$, donc $V(T) = 29{,}5 - 4{,}5^2 = 29{,}5 - 20{,}25 = 9{,}25$.

Ex. 49 **(suite)**

(b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 5$: $P(|T - 4{,}5| \geqslant 5) \leqslant \frac{9{,}25}{5^2} = 0{,}37$. Calcul exact : $|2 - 4{,}5| = 2{,}5$, $|5 - 4{,}5| = 0{,}5$ et $|10 - 4{,}5| = 5{,}5$. Seule la valeur $T = 10$ convient, donc la probabilité vaut 0,2. Le majorant est juste, mais presque deux fois trop grand.

(c) Les 40 temps sont indépendants et de même loi que T. L'intervalle $]3{,}5\,;5{,}5[$ est centré en $\mu = 4{,}5$, avec $\delta = 1$: l'événement s'écrit $|M_{40} - 4{,}5| < 1$. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_{40} - 4{,}5| \geqslant 1) \leqslant \frac{9{,}25}{40 \times 1^2} = 0{,}23125$. Par l'événement contraire, $P(3{,}5 < M_{40} < 5{,}5) \geqslant 0{,}76875$. Sur 40 matins, l'attente moyenne d'Élise est donc comprise entre 3,5 et 5,5 minutes avec une probabilité d'au moins 0,768.

(d) D'après l'inégalité de concentration, $0 \leqslant P(|M_n - 4{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{9{,}25}{0{,}1^2\, n} = \frac{925}{n}$. Or $\frac{925}{n}$ tend vers 0, donc par encadrement la probabilité tend vers 0 : c'est la loi faible des grands nombres. Sur le graphique, les moyennes observées fluctuent de moins en moins et se stabilisent autour de $\mu = 4{,}5$.

(e) Il faut que $\frac{9{,}25}{n \times 5^2} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant \frac{9{,}25}{0{,}1 \times 0{,}25} = 370$. Il faut donc 370 matins, soit plus d'un an. C'est une condition suffisante : l'inégalité est pessimiste (voir la deuxième question), et un nombre plus petit pourrait déjà suffire en réalité.