50 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Probabilité et fréquence observée

À retenir : Probabilité : calculée sur le modèle, $P(A) = \frac{\text{issues de } A}{\text{total d'issues}}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Fréquence : mesurée, $f = \frac{k}{n}$ (k est un effectif). Écart $|f - p| \geqslant 0$: $|0{,}22 - 0{,}25| = 0{,}03$. Écrire « $f = p$ » est presque toujours faux.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : probabilités sur un modèle** — Calcule chaque probabilité, en fraction puis en décimal quand c'est possible.

(a) Dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 : probabilité d'obtenir un multiple de 4.

(b) Même dé à 12 faces : probabilité d'obtenir un nombre premier.

(c) Dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10 : probabilité d'obtenir un multiple de 3.

(d) Dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10 : probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3.

(e) Roue équilibrée à 16 secteurs égaux, dont 5 bleus : probabilité d'obtenir bleu.

(f) Sac de 24 jetons dont 9 verts, tirage au hasard : probabilité de ne pas tirer un jeton vert.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : fréquences et écarts** — Calcule en ligne.

(a) Sur 80 lancers d'une pièce, pile sort 46 fois : fréquence observée de pile ?

(b) Sur 250 tirages, un événement se produit 70 fois : fréquence observée en pourcentage ?

(c) Sur 125 lancers d'un dé, le 6 sort 20 fois : fréquence observée de « ne pas obtenir 6 » ?

(d) Probabilité $p = 0{,}6$ et fréquence observée $f = 0{,}52$: calcule l'écart $|f - p|$.

(e) Pour $f = 0{,}27$ et $p = 0{,}25$, un élève écrit : « écart $= 0{,}25 - 0{,}27 = -0{,}02$ ». Corrige.

(f) Écris la fréquence 0,045 en pourcentage.

Ex. 3 ★★☆ **Probabilité ou fréquence ?** — Léna lance 300 fois un dé équilibré à 6 faces. La face 1 sort 47 fois.

(a) Calcule la probabilité d'obtenir 1. D'où vient ce nombre ?

(b) Le nombre 47 est-il une fréquence ? Justifie, puis calcule la fréquence observée de « obtenir 1 » (arrondie au millième).

Ex. 3 (suite)

(c) Calcule la fréquence observée de « ne pas obtenir 1 » (arrondie au millième).

(d) Léna écrit : « $f = p$ car le dé est équilibré ». Corrige-la en calculant l'écart $|f - p|$.

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs de Mathis** — Une roue équilibrée a 5 secteurs égaux numérotés de 1 à 5. On note A : « obtenir un nombre pair ». Mathis fait tourner la roue 200 fois : A se produit 86 fois.

(a) Mathis affirme : « $P(A) = 0{,}5$ car un nombre est pair ou impair ». Corrige son erreur.

(b) Il écrit : « la fréquence observée de A est 86 % ». Corrige.

(c) Il calcule l'écart entre la fréquence observée de A et $P(A)$ et trouve un nombre négatif. Qu'en penses-tu ? Donne l'écart correct.

(d) Mathis affirme : « si je refais tourner la roue 200 fois, A se produira encore 86 fois ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **Le bouchon d'Inès** — Un bouchon de bouteille lancé retombe « sur le côté », « à l'endroit » ou « à l'envers ». Inès le lance 400 fois : 236 fois sur le côté, 108 fois à l'endroit, 56 fois à l'envers.

(a) Inès affirme : « il y a 3 issues, donc chacune a une probabilité de $\frac{1}{3}$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Calcule la fréquence observée de chaque issue.

(c) Calcule la fréquence observée de « ne pas retomber sur le côté ».

(d) Propose une valeur pour la probabilité de « retomber sur le côté ». Est-ce une valeur exacte ?

Ex. 6 ★★☆ **Un écart calculé en Python** — Un sac contient 20 jetons dont 6 bleus. Hugo tire un jeton au hasard, avec remise, 150 fois et obtient 39 fois un jeton bleu. Il écrit ce programme :

```
def ecart(k, n, p):
    f = k / n
    if f >= p:
        return f - p
    else:
        return p - f
```

(a) Justifie que la probabilité de tirer un jeton bleu est $p = 0{,}3$.

(b) Que représente la variable `f` ?

(c) Que renvoie `ecart(39, 150, 0.3)` ?

(d) Pourquoi Hugo n'a-t-il pas simplement écrit `return f - p` ?

Ex. 7 ★★☆ **Cinq groupes, un dé à 4 faces** — Dans une classe, chaque groupe lance 50 fois un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4. On compte le nombre de « 4 ».

Groupe	A	B	C	D	E
Nombre de 4	14	9	12	15	11

(a) Calcule la fréquence observée de « obtenir 4 » pour chaque groupe.

(b) Quel groupe a la fréquence la plus éloignée de la probabilité ? Donne cet écart.

(c) L'étendue d'une série de fréquences est la plus grande moins la plus petite. Calcule l'étendue des cinq fréquences.

(d) Explique pourquoi les cinq fréquences sont différentes alors que la probabilité est la même.

Ex. 8 ★★★ **Le dé à 20 faces de Zoé** — Zoé lance 250 fois un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On note A : « obtenir un nombre premier ». L'événement A se produit 91 fois.

(a) Liste les issues de A, puis calcule $P(A)$. Ce nombre est-il une probabilité ou une fréquence ? Justifie.

(b) Calcule la fréquence observée de A, en écriture décimale puis en pourcentage.

(c) Calcule l'écart $|f - p|$ pour A. Calcule ensuite $P(\overline{A})$ et la fréquence observée de $\overline{A}$.

(d) Calcule l'écart entre la fréquence observée et la probabilité de $\overline{A}$. Explique pourquoi tu trouves le même écart que pour A.

(e) Zoé affirme : « 91 est très loin de $P(A)$. De toute façon, l'écart n'est pas nul, donc le dé est truqué. » Relève ses deux erreurs.

Ex. 9 ★★★ **La playlist aléatoire de Ben** — Le lecteur de musique de Ben choisit au hasard un morceau parmi 8, numérotés de 1 à 8. Les morceaux 1, 2 et 3 sont du rap. Pour simuler n choix, Ben écrit ce programme :

```
from random import randint
def frequence(n):
    c = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 8) <= 3:
            c = c + 1
        return c / n
```

(a) Calcule la probabilité p que le morceau choisi soit du rap.

(b) Explique pourquoi le test `randint(1, 8) <= 3` simule « le morceau est du rap ». Que compte la variable `c` ?

(c) Avec `frequence(1000)`, Ben obtient toujours `0` ou `0.001`. Explique pourquoi, puis corrige le programme.

(d) Une fois le programme corrigé, `frequence(10000)` renvoie-t-il une probabilité ou une fréquence ? De quel nombre son résultat est-il proche ? Justifie.

Ex. 9 (suite)

(e) Sur 120 choix réels, le lecteur a joué 51 morceaux de rap. Calcule f et $|f - p|$. Ben en conclut que le lecteur « favorise le rap ». Est-ce prouvé ? Justifie.

Ex. 10 ★★★ **Deux stands à la kermesse** — Kermesse. Jeu A : on tire au hasard un jeton, avec remise, dans un sac de 25 jetons dont 7 gagnants. Jeu B : on gagne si un osselet (4 faces de formes différentes) tombe sur la face « creuse ». Bilan : jeu A, 104 gains sur 400 parties ; jeu B, 146 gains sur 500 lancers.

(a) Calcule la probabilité de gagner au jeu A, puis celle de perdre.

(b) Noah affirme : « l'osselet a 4 faces, donc on gagne au jeu B avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(c) Calcule la fréquence observée de gain au jeu B, en écriture décimale puis en pourcentage.

(d) Calcule la fréquence observée de gain au jeu A et son écart avec la probabilité de gagner.

(e) Noah écrit : « au jeu B, la probabilité de gagner est égale à la fréquence trouvée, donc B est meilleur que A à coup sûr ». Corrige sa rédaction et propose une conclusion prudente.

2. *Fluctuation d'échantillonnage*

À retenir : Échantillon de taille n : n répétitions indépendantes (tirage avec remise), k succès, $f = \frac{k}{n}$. f fluctue, p reste fixe ; le hasard n'a pas de mémoire. Étendue = plus grande − plus petite fréquence, elle diminue si n augmente. Ex. : $\frac{12}{40} = 0{,}3$.

Ex. 11 ★☆☆ **Automatismes : taille, succès, fréquence** — Réponds en une ligne.

(a) On lance 80 fois une pièce équilibrée et on obtient 44 fois pile. Donne n, k et la fréquence de pile.

(b) On prélève au hasard, avec remise, 250 ampoules : 9 sont défectueuses. Calcule la fréquence des ampoules défectueuses.

(c) Un échantillon de taille 40 donne une fréquence de succès de 0,35. Combien y a-t-il eu de succès ?

(d) Un échantillon donne 27 succès, soit une fréquence de 0,15. Quelle est sa taille n ?

(e) Une toupie équilibrée a 5 faces, dont 2 bleues. Sur 60 lancers, elle tombe 21 fois sur une face bleue. Calcule l'écart $|f - p|$.

Ex. 12 ★☆☆ **Automatismes : étendue, fréquence et probabilité** — Réponds en une ligne.

(a) Cinq échantillons de taille 50 donnent les fréquences 0,4 ; 0,58 ; 0,34 ; 0,5 ; 0,46. Calcule leur étendue.

(b) Quatre échantillons de taille 1 000 donnent 0,452 ; 0,481 ; 0,467 ; 0,439. Calcule leur étendue.

Ex. 12 **(suite)**

(c) Une série de fréquences a une étendue de 0,19 et sa plus grande valeur est 0,62. Quelle est sa plus petite valeur ?

(d) Une pièce équilibrée vient de donner cinq piles de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir face au sixième lancer ?

(e) Un dé équilibré à 6 faces donne 11 fois le six en 50 lancers. Donne la fréquence observée du six, puis la probabilité du six.

Ex. 13 ★★☆ **Sondage au lycée** — Un lycée compte 1 200 élèves. On tire au hasard, avec remise, 75 élèves de ce lycée : 21 viennent en cours à vélo.

(a) Précise la population, le caractère étudié et la taille de l'échantillon.

(b) Calcule la fréquence f des élèves qui viennent à vélo dans cet échantillon.

(c) Donne une estimation du nombre d'élèves du lycée qui viennent à vélo.

(d) Un second tirage de 75 élèves donne 27 élèves venant à vélo. Noé dit : « Un des deux sondages contient une erreur. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 14 ★★☆ **La roue de la fête foraine** — À un stand, la probabilité de gagner est $p = 0{,}45$. Ben simule cinq échantillons de 25 parties, puis cinq échantillons de 500 parties. Le tableau donne la fréquence de gain de chaque échantillon.

échantillon	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
taille 25	0,32	0,56	0,44	0,6	0,4
taille 500	0,438	0,462	0,454	0,43	0,446

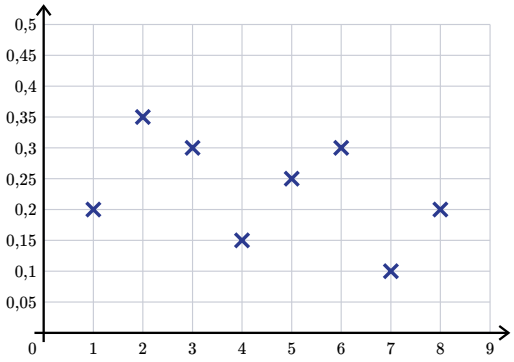
(a) Calcule l'étendue des fréquences pour les échantillons de taille 25.

(b) Calcule l'étendue pour la taille 500, puis compare-la avec la précédente.

(c) Calcule l'écart $|f - p|$ pour l'échantillon 4 de taille 25.

(d) Inès affirme : « L'échantillon 4 de taille 25 prouve que la probabilité de gagner vaut en fait 0,6. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 15 ★★☆ **Le dé à quatre faces** — Un dé équilibré a 4 faces numérotées de 1 à 4. Lou simule 8 échantillons de 40 lancers et place, pour chacun, la fréquence de la face 4.



(a) Calcule la probabilité p d'obtenir 4 en un lancer.

(b) Lis la fréquence de l'échantillon 2, puis calcule le nombre de 4 obtenus dans cet échantillon.

(c) Calcule l'étendue des huit fréquences.

(d) Lou refait 8 échantillons, de taille 4 000 cette fois. Décris, sauf exception, l'étendue et la position des fréquences obtenues.

Ex. 16 ★★☆ **Contrôle qualité : un return mal placé** — Dans une usine, 15 % des pièces sont défectueuses. Enzo simule le prélèvement avec remise de n pièces :

```
from random import random
def echantillon(n):
    k = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.15:
            k = k + 1
        return k / n
```

(a) Que représente la variable `k` ?

(b) Enzo veut simuler une usine où 8 % des pièces sont défectueuses. Quelle ligne doit-il modifier, et comment ?

(c) Avec `echantillon(200)`, Enzo obtient toujours 0 ou 0,005. Repère l'erreur, explique ces résultats et corrige le programme.

(d) Après correction, un appel à `echantillon(200)` renvoie 0,135. Quelle valeur avait `k` à la fin de la boucle ?

Ex. 17 ★★☆ **L'urne aux billes noires** — Une urne contient 20 billes, dont 4 noires. On tire une bille au hasard, on note sa couleur et on la remet.

(a) Calcule la probabilité $P(N)$ de tirer une bille noire.

(b) Vrai ou faux ? « Après six tirages sans noire, la noire devient plus probable au tirage suivant. » Justifie.

(c) Vrai ou faux ? « Si on ne remet pas les billes, les tirages restent indépendants. » Justifie.

(d) Combien de billes noires peut-on prévoir sur 100 tirages ? En obtient-on forcément ce nombre ? Justifie.

Ex. 17 (suite)

(e) Lucas simule un tirage avec `randint(1, 20)` : la bille est noire si le résultat est inférieur ou égal à 4. Explique pourquoi cette simulation respecte le modèle.

Ex. 18 ★★★ **La boîte de la tombola** — Une boîte contient 16 tickets de tombola, dont 4 gagnants. On tire un ticket au hasard.

(a) Calcule la probabilité p de tirer un ticket gagnant au premier tirage.

(b) Mila tire sans remise. Ses deux premiers tickets sont perdants. Calcule la probabilité que le troisième soit gagnant.

(c) Explique pourquoi des tirages sans remise ne forment pas un échantillon au sens du cours.

(d) Cette fois, Mila tire avec remise : 40 tirages, 14 gagnants. Calcule f et l'écart $|f - p|$.

(e) Hugo affirme : « Il y a eu trop de gagnants : sur les 40 tirages suivants, il y en aura moins de 10 pour compenser. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Enquête sur le covoiturage** — Dans une entreprise de 2 400 salariés, 36 % viennent en covoiturage. On tire des salariés au hasard, avec remise : cinq échantillons de taille 50, puis cinq de taille 800. Le tableau donne le nombre k de covoitureurs dans chaque échantillon.

échantillon	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
k pour 50	14	22	17	21	15
k pour 800	280	304	272	296	288

(a) Calcule la fréquence observée de covoitureurs dans chacun des cinq échantillons de taille 50.

(b) Pour la taille 800, Yanis écrit : « étendue $= 304 - 272 = 32$ ». Explique son erreur, puis corrige-la.

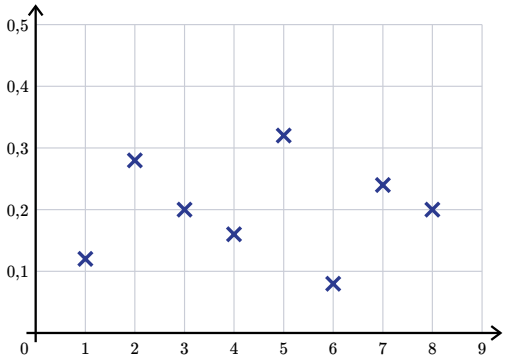
(c) Calcule l'étendue des fréquences pour la taille 50. Compare-la à celle de la taille 800, puis conclus.

(d) Pour l'échantillon n° 2 de taille 50, calcule l'écart $|f - p|$. Peut-on dire que cet échantillon est « raté » ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Simuler les jours de pluie** — Dans une ville, on choisit le modèle suivant : chaque jour de juin est pluvieux avec la probabilité $p = 0{,}2$, indépendamment des autres jours. Adèle écrit ce programme :

```
from random import random
def echantillon(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.2:
            s = s + 1
    return s / n
```

Elle fait huit appels à `echantillon(25)` et obtient :



(a) Explique pourquoi le test `random() < 0.2` permet de simuler un jour pluvieux.

(b) Que renvoie `echantillon(25)` ? Peut-on prévoir sa valeur exacte ? Justifie.

(c) À l'aide du nuage, calcule l'étendue des huit fréquences, puis le plus grand écart $|f - p|$.

(d) Manon pense que le programme est faux, parce que les fréquences sont différentes et que l'une d'elles vaut 0,08. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Vrai ou faux ? « Avec `echantillon(1000)`, on obtiendrait exactement 0,2 à chaque appel. » Justifie.

3. *Loi des grands nombres*

À retenir : Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée f est proche de p (pas égale ; la loi ne dit rien pour 10 lancers). Pas de compensation. Ex. : 5 030 piles sur 10 000 : $k - np = 30$ mais $|f - p| = 0{,}003$.

Ex. 21 ★☆☆ **Automatismes : probabilité, fréquence, écart** — Une roue équilibrée a 5 secteurs égaux, dont 1 rouge. On la fait tourner plusieurs fois. On note p la probabilité d'obtenir rouge.

(a) Calcule p.

(b) Calcule la probabilité de ne pas obtenir rouge.

(c) Sur 50 lancers, Inès obtient 13 fois rouge. Calcule la fréquence observée f.

(d) Sur 400 lancers, Inès obtient 86 fois rouge. Calcule l'écart $|f - p|$.

(e) Sur 5 000 lancers, on obtient 1 012 rouges. Calcule l'écart en nombre $k - n \times p$.

Ex. 21 **(suite)**

(f) Sur 2 000 lancers, la fréquence observée de rouge vaut 0,207. Combien de rouges a-t-on obtenus ?

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : probabilité ou fréquence ?** — Une urne contient 20 boules, dont 4 vertes. Lou tire une boule au hasard, note sa couleur, puis la remet. On note V l'événement « obtenir une boule verte ». Réponds en justifiant.

(a) « $P(V) = 0{,}2$. » Ce nombre est-il une probabilité ou une fréquence ? Justifie par un calcul.

(b) « Sur 250 tirages, Lou a obtenu 55 vertes. » Calcule la fréquence observée. Est-ce une probabilité ?

(c) « Si Lou refait 250 tirages, elle obtiendra encore 55 vertes. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) « Avec 250 tirages de plus, $P(V)$ va changer. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Pour 10 000 tirages, de quel nombre la fréquence de vertes sera-t-elle proche, sauf exception ?

Ex. 23 ★★☆ **Lire un tableau de simulations** — Sami simule le tirage au hasard, avec remise, d'un ticket parmi 10, dont 3 gagnants. Il note la fréquence f de ticket gagnant pour des tailles n croissantes :

n	10	100	1 000	10 000	100 000
f	0,1	0,31	0,287	0,3034	0,29962

(a) Calcule la probabilité p de tirer un ticket gagnant.

(b) Calcule l'écart $|f - p|$ pour chaque valeur de n.

(c) Sami dit : « L'écart augmente entre $n = 100$ et $n = 1\,000$, donc la loi des grands nombres est fausse. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Pour quelles tailles n du tableau l'écart $|f - p|$ est-il inférieur à 0,005 ?

(e) Conclus avec les mots de la loi des grands nombres.

Ex. 24 ★★☆ **Écart en nombre, écart en fréquence** — Jade utilise un générateur qui donne au hasard un chiffre de 0 à 9. On s'intéresse à l'événement « obtenir un chiffre pair », de probabilité $p = 0{,}5$. On note k le nombre de chiffres pairs obtenus :

n	100	1 000	10 000	100 000
k	56	518	5 060	50 180

(a) Calcule l'écart en nombre $k - n \times p$ pour chaque valeur de n.

(b) Calcule la fréquence f et l'écart $|f - p|$ pour chaque valeur de n.

(c) Jade dit : « L'écart en nombre grandit, donc la fréquence s'éloigne de 0,5. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Kenza fait 100 000 tirages et obtient 250 pairs de plus que $n \times p$. Calcule son écart $|f - p|$. Qui est le plus proche de 0,5 : Kenza, ou Jade avec $n = 10\,000$?

Ex. 25 ★★☆ **Vrai ou faux sur la loi des grands nombres** — Élise et ses amis lancent une pièce équilibrée. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) « Si je lance la pièce 1 000 fois, j'aurai exactement 500 piles. »

(b) « Sur 10 lancers, j'ai eu 8 piles : d'après la loi des grands nombres, la pièce est truquée. »

(c) « J'ai eu 5 faces de suite, donc le prochain lancer a plus de chances de donner pile. »

(d) « Même sur 80 000 lancers, la fréquence de pile peut s'écarter nettement de 0,5, mais c'est très rare. »

(e) « J'ai obtenu 2 076 piles sur 4 000 lancers : l'écart $|f - p|$ vaut 76. »

Ex. 26 ★★☆ **Corriger un programme de simulation** — Léo veut simuler n lancers d'un dé équilibré à 20 faces et obtenir la fréquence de l'événement « obtenir 7 ou moins ». Il écrit :

```
from random import randint
def frequence(n):
    k = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 20) <= 7:
            k = k + 1
        return k / n
```

(a) Quelle est la probabilité que la condition `randint(1, 20) <= 7` soit vraie ?

(b) Que représente la variable `k` ?

(c) Avec `frequence(1000)`, Léo obtient toujours 0 ou 0,001. Explique l'erreur et corrige-la.

(d) Une fois le programme corrigé, de quelle valeur `frequence(50000)` sera-t-il proche ? Justifie.

Ex. 27 ★★☆ **Estimer avec une capsule** — Maëlle lance une capsule de bouteille, qui retombe « sur le dos » ou « sur la face ». Elle note k, le nombre total de « dos » obtenus au fil des lancers :

n	50	500	5 000
k	31	287	2 840

(a) Calcule la fréquence observée de « dos » pour chaque valeur de n.

(b) Peut-on calculer la probabilité p de « dos » avec un modèle d'équiprobabilité ? Justifie.

(c) Quelle fréquence choisir pour estimer p ? Justifie avec la loi des grands nombres.

(d) Prévois le nombre de « dos » sur 1 500 nouveaux lancers.

(e) Estime la probabilité que la capsule retombe « sur la face ».

Ex. 28 ★★★ **Pas de compensation, mais une dilution** — Tom lance un dé équilibré à 4 faces, numérotées de 1 à 4, et compte les « 1 ». On note p la probabilité d'obtenir 1. Sur ses 40 premiers lancers, il obtient 17 fois « 1 ».

(a) Calcule p. Calcule ensuite la fréquence observée f de « 1 » sur ces 40 lancers, puis l'écart $|f - p|$.

(b) Cette fréquence contredit-elle la loi des grands nombres ? Justifie.

(c) Hugo affirme : « Le dé a donné trop de 1. Il va maintenant en donner moins pour compenser. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Tom fait ensuite 7 960 autres lancers et obtient « 1 » sur exactement un quart d'entre eux. Calcule la fréquence de « 1 » sur l'ensemble des 8 000 lancers, puis son écart à p.

(e) Calcule l'écart en nombre $k - n \times p$ après 40 lancers, puis après 8 000 lancers. Explique comment la fréquence s'est rapprochée de p sans aucune compensation.

Ex. 29 ★★★ **Lancers francs : « sauf exception »** — Anaïs simule des séries de lancers francs d'une joueuse qui réussit chaque tir avec la probabilité $p = 0{,}7$. Elle obtient 5 échantillons de taille 20 et 5 échantillons de taille 1 000 (fréquences de tirs réussis) :

Éch.	1	2	3	4	5
n = 20	0,55	0,8	0,7	0,9	0,6
n = 1 000	0,712	0,694	0,701	0,689	0,705

(a) Calcule l'étendue des fréquences pour les échantillons de taille 20, puis pour ceux de taille 1 000.

(b) Pour chaque taille, trouve le plus grand écart $|f - p|$ parmi les 5 échantillons.

(c) Nina affirme : « Avec 1 000 tirs, la fréquence sera toujours comprise entre 0,68 et 0,72. » A-t-elle raison ? Justifie avec les mots de la loi des grands nombres.

(d) Sur une vraie saison, la joueuse a réussi 640 lancers francs sur 1 000. Calcule la fréquence observée et son écart à 0,7.

(e) Peut-on douter que la probabilité de réussite de cette joueuse soit 0,7 ? Justifie, en disant si c'est une preuve.

Ex. 30 ★★★ **Question de DS : simuler, lire, conclure** — Une urne contient 25 boules, dont 9 rouges. Clara simule n tirages au hasard avec remise :

```
from random import random
def frequence(n):
    k = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.36:
            k = k + 1
    return k / n
```

Elle obtient :

n	10	100	1 000	10 000	100 000
f	0,6	0,31	0,362	0,3566	0,360 41

(a) Calcule la probabilité p de tirer une boule rouge. Explique pourquoi le test `random() < 0.36` simule bien ce tirage.

(b) Dis ce que représente k à la fin de la boucle, et ce que renvoie `frequence(n)`.

(c) Calcule l'écart $|f - p|$ pour chaque valeur de n du tableau.

(d) Rayan remplace le test par `randint(1, 25) < 9`. Simule-t-il encore le tirage d'une boule rouge ? Justifie.

(e) Rédige la conclusion de Clara avec l'énoncé exact de la loi. De quel nombre `frequence(1000000)` sera-t-il proche ? Peut-on connaître sa valeur exacte à l'avance ?

4. *Estimer une probabilité par une fréquence*

À retenir : Probabilité inconnue : on regroupe les séries, $p \approx \frac{\text{total des succès}}{\text{total des répétitions}}$, jamais la moyenne des fréquences ; puis on prévoit environ $N \times f$ succès. Ex. : $\frac{12+138}{40+260} = \frac{150}{300} = 0{,}5$.

Ex. 31 ★★☆ **Automatismes : estimer et prévoir** — Calcule en ligne. Les fréquences sont observées sur des expériences réelles.

(a) Un bouchon est tombé 312 fois sur le côté en 800 lancers. Calcule la fréquence observée de « sur le côté ».

(b) Pour une pièce déformée, on estime $P(\text{pile}) \approx 0{,}47$. Estime $P(\text{face})$.

(c) Sur 5 000 essais, le rouge d'une roue déséquilibrée sort avec la fréquence 0,18. Prévois le nombre de rouges sur 650 essais.

(d) Série 1 : 27 succès sur 60. Série 2 : 93 succès sur 240. Calcule la fréquence globale des deux séries regroupées.

(e) Dans un sondage auprès de 1 200 personnes, la fréquence des « oui » vaut 0,35. Combien de personnes ont répondu « oui » ?

(f) Une punaise lancée 2 000 fois donne $p \approx 0{,}612$ pour « pointe en haut ». Sur 50 autres lancers, on obtient $f = 0{,}7$. Calcule l'écart $|f - 0{,}612|$.

Ex. 32 ★☆☆ **Automatismes : probabilité ou fréquence ?** — Réponds en une ou deux phrases, en utilisant les mots « probabilité » et « fréquence observée ».

(a) Dans une maternité, 255 garçons sont nés sur 500 naissances. Calcule $\frac{255}{500}$. Ce nombre est-il une probabilité ou une fréquence observée ? Justifie.

(b) Avec un dé équilibré à 6 faces, la probabilité d'obtenir 5 vaut $\frac{1}{6}$. Ce nombre change-t-il si on lance le dé 100 fois ? Justifie.

(c) Une pièce déformée donne 2 870 piles sur 5 000 lancers. Lina écrit $P(\text{pile}) = 0{,}574$. Corrige son écriture.

(d) Tom lance une punaise 12 fois : 9 fois pointe en haut. Il annonce une probabilité de 0,75. Est-ce fiable ? Justifie.

(e) Théo lance 100 fois un bouchon et note 42 chutes sur le côté. Il écrit : « la probabilité vaut 42 ». Corrige son erreur.

Ex. 33 ★★☆ **Trois groupes, une capsule** — Trois groupes lancent la même capsule de bouteille et comptent les chutes « ouverte en haut ».

groupe	A	B	C
lancers	40	160	600
ouverte en haut	26	88	330
fréquence	0,65	?	?

(a) Complète la ligne des fréquences.

(b) Calcule la fréquence de « ouverte en haut » sur l'ensemble des lancers.

(c) Nora fait la moyenne des trois fréquences. Calcule-la, arrondie au millième, puis explique pourquoi elle est à écarter.

(d) La capsule tombe toujours soit « ouverte en haut », soit « ouverte en bas ». Estime la probabilité qu'elle tombe « ouverte en bas ».

(e) Prévois le nombre de chutes « ouverte en haut » sur 1 400 nouveaux lancers.

Ex. 34 ★★☆ **Ce dé est-il équilibré ?** — Un dé à 6 faces est vendu comme « équilibré ». Un club de jeux le lance 12 000 fois : le 6 sort 2 640 fois.

(a) Calcule la fréquence observée du 6.

(b) Calcule l'écart $|f - p|$ avec la probabilité donnée par le modèle, arrondi au millième.

(c) Jade affirme : « C'est prouvé, le dé est truqué. » Corrige sa phrase.

(d) Plus tôt, Malik avait obtenu 9 six en 30 lancers et avait conclu de la même façon. A-t-il raison ? Justifie.

(e) On garde ce dé. Prévois le nombre de 6 sur 500 nouveaux lancers.

Ex. 35 ★★☆ **Une fonction à corriger** — Avec une pièce déformée, Ilyes a obtenu 30 piles sur 50 lancers, puis 513 piles sur 950 lancers. Pour regrouper, il écrit :

```
def frequence_globale(k1, n1, k2, n2):
    f1 = k1 / n1
    f2 = k2 / n2
    return (f1 + f2) / 2
```

(a) Calcule la valeur renvoyée par `frequence_globale(30, 50, 513, 950)`.

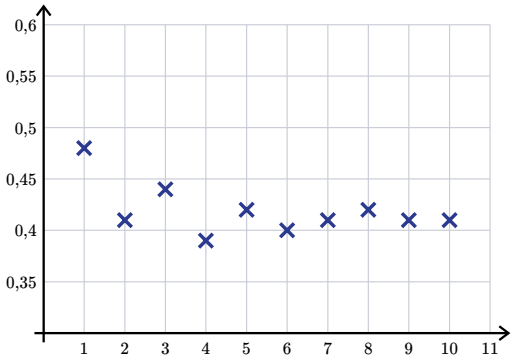
(b) Explique pourquoi cette fonction ne donne pas la bonne fréquence globale.

(c) Réécris la ligne du `return` pour qu'elle renvoie la bonne fréquence globale.

(d) Calcule la fréquence globale correcte des deux séries.

(e) Prévois le nombre de piles sur 3 000 nouveaux lancers.

Ex. 36 ★★☆ **Un pion qui n'est pas symétrique** — Sami lance un pion de jeu en bois non symétrique. Après chaque centaine de lancers, il note la fréquence cumulée de « face marquée ». Le point de rang k correspond à $100k$ lancers.



(a) Lis la fréquence après 100 lancers, puis après 1 000 lancers.

(b) Quelle valeur proposes-tu pour estimer la probabilité de « face marquée » ? Justifie.

(c) Calcule l'écart entre l'estimation après 100 lancers et celle après 1 000 lancers.

(d) Combien de fois la face marquée est-elle sortie sur les 1 000 lancers ?

(e) Prévois le nombre de « face marquée » sur 300 nouveaux lancers.

Ex. 37 ★★☆ **Deux sondages dans une ville** — Avant un vote local, l'institut A interroge 400 électeurs au hasard : 236 sont « pour ». L'institut B en interroge 1 600 : 896 sont « pour ».

(a) Calcule la fréquence de « pour » dans chacun des deux sondages.

(b) Quelle estimation est la plus fiable ? Justifie.

(c) En regroupant les deux sondages, estime la proportion d'électeurs « pour ».

Ex. 37 **(suite)**

(d) La ville compte 45 000 électeurs. Prévois le nombre d'électeurs « pour ».

Ex. 38 ★★★ **Les osselets de la classe** — Quatre groupes lancent le même osselet et notent la fréquence des chutes « sur le dos ».

groupe	A	B	C	D
lancers	60	140	400	600
fréquence	0,55	0,45	0,405	0,39

(a) Calcule le nombre de chutes « sur le dos » obtenues par chaque groupe.

(b) Estime la probabilité p qu'a l'osselet de tomber « sur le dos » en utilisant toutes les données. Justifie ta méthode.

(c) Léna fait la moyenne des quatre fréquences et trouve environ 0,449. À l'aide de la taille des échantillons, explique pourquoi son résultat est plus grand que ton estimation.

(d) Le groupe A annonce : « La probabilité de tomber sur le dos est égale à 0,55. » Relève deux erreurs dans cette phrase.

(e) Estime la probabilité que l'osselet ne tombe pas « sur le dos ». Sur 2 500 nouveaux lancers, combien de chutes « pas sur le dos » prévois-tu ?

Ex. 39 ★★★ **La roue de la kermesse** — Sur un stand de kermesse, une roue est partagée en 8 secteurs de même taille. Un seul secteur est « gagnant ». Bastien, l'organisateur, suppose que la roue est équilibrée. Lors des 40 premiers lancers, on compte 8 gains. Sur toute la saison, on compte 1 360 gains en 8 000 lancers.

(a) Selon le modèle de Bastien, calcule la probabilité p de gagner.

(b) Calcule la fréquence observée des gains et l'écart $|f - p|$, d'abord sur les 40 premiers lancers, puis sur les 8 000 lancers.

(c) Bastien pense : « Avec beaucoup de lancers, la roue va compenser, et l'écart en nombre $k - np$ va revenir vers 0. » Calcule $k - np$ après 40 lancers, puis après 8 000 lancers. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Sur les 8 000 lancers, que décides-tu à propos du modèle « roue équilibrée » ? Justifie.

(e) La saison prochaine, Bastien prévoit 3 000 lancers et un lot par gain. Combien de lots faut-il prévoir avec le modèle ? Et avec une estimation tirée des données ? Laquelle retenir ?

Ex. 40 ★★★ **Des vis au contrôle qualité** — Une usine fabrique des vis. Le service qualité contrôle 2 400 vis prises au hasard : 96 sont défectueuses. Chloé simule un carton de n vis, chacune défectueuse avec la probabilité p :

```
from random import random

def carton(n, p):
    c = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            c = c + 1
    return c
```

(a) Estime la probabilité p qu'une vis soit défectueuse, puis la probabilité qu'elle soit conforme.

(b) Que simule le test `random() < p` ? Que renvoie `carton(250, p)` ?

(c) Moussa affirme : « `carton(250, p)` renvoie toujours le même nombre. » Vrai ou faux ? Justifie. Un seul carton suffit-il pour bien estimer p ? Justifie.

(d) Un second contrôle donne 72 vis défectueuses sur 1 600. Inès fait la moyenne des deux fréquences. A-t-elle raison ? Justifie, puis estime p avec toutes les données.

(e) Avec l'estimation obtenue sur toutes les données, combien de vis défectueuses prévois-tu environ dans une commande de 5 000 vis ?

5. *Simuler une expérience en Python*

À retenir : `random() < p` est vrai avec la probabilité p ; `random() > p` l'est avec la probabilité $1 - p$. `randint(a, b)` inclut b : `randint(1, 10) <= 3` a la probabilité $\frac{3}{10}$. Le compteur vaut 0 avant la boucle, $+1$ dans le `if` ; le `return` vient après la boucle.

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : la probabilité d'un test** — Pour chaque test Python, réponds à la question posée. `random()` et `randint(a, b)` viennent du module random.

(a) Avec quelle probabilité le test `random() < 0.42` est-il vrai ?

(b) Avec quelle probabilité le test `random() > 0.42` est-il vrai ?

(c) Avec quelle probabilité le test `randint(1, 25) <= 8` est-il vrai ?

(d) Avec quelle probabilité le test `randint(0, 9) < 4` est-il vrai ?

(e) Quel nombre écrire dans `random() < …` pour que le test soit vrai avec la probabilité 12 % ?

(f) Avec quelle probabilité le test `randint(1, 5) >= 2` est-il faux ?

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : boucles, compteurs et appels** — Réponds par un calcul en ligne.

(a) Combien de tours la boucle `for i in range(40):` fait-elle ?

(b) Combien de valeurs entières différentes `randint(0, 12)` peut-il renvoyer ?

(c) Une fonction se termine par `return succes / n`. Que renvoie-t-elle quand `succes` vaut 27 et `n` vaut 60 ?

(d) Une fonction se termine par `return succes`. Que renvoie-t-elle quand `succes` vaut 27 et `n` vaut 60 ?

(e) Une fonction appelle `random()` une fois par tour de boucle et fait n tours. On l'appelle pour $n = 50$, puis 500, puis 5 000. Combien de fois `random()` est-il appelé en tout ?

(f) Calcule l'écart $|f - p|$ pour $f = 0{,}57$ et $p = 0{,}52$.

Ex. 43 ★☆☆ **Du tableur à Python, et inversement** — Au tableur, `=ALEA()` joue le rôle de `random()` et `=ALEA.ENTRE.BORNES(a;b)` celui de `randint(a, b)`.

(a) Traduis en Python la formule de tableur `=ALEA()<0,28`.

(b) Écris la formule de tableur qui affiche VRAI avec la probabilité 0,64.

(c) Traduis en Python la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)>=2`. Avec quelle probabilité affiche-t-elle VRAI ?

(d) Écris la formule de tableur qui simule le lancer d'un dé équilibré à 12 faces.

(e) Un élève écrit `if randint(1, 4) = 1:`. Corrige son erreur et explique-la.

(f) Sur combien de lignes faut-il recopier la formule pour simuler un échantillon de taille 250 ?

Ex. 44 ★★☆ **Quelle expérience ce programme simule-t-il ?** — Sacha a écrit cette fonction sans dire ce qu'elle simule.

```
from random import randint
def tirage():
    if randint(1, 12) <= 5:
        return 1
    else:
        return 0
```

(a) Combien de valeurs différentes `randint(1, 12)` peut-il renvoyer ?

(b) Quelle est la probabilité que `tirage()` renvoie 1 ?

(c) Quelle est la probabilité que `tirage()` renvoie 0 ?

(d) Propose une expérience aléatoire réelle que cette fonction simule.

(e) Noé affirme qu'on peut écrire le test `randint(1, 12) < 5` à la place. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Contrôle qualité : corriger le programme de Hugo** — Une machine fabrique une pièce défectueuse avec la probabilité 0,15. Hugo veut une fonction qui renvoie la fréquence des pièces défectueuses dans un échantillon de n pièces.

```
from random import random
def frequence(n):
    for i in range(n):
        succes = 0
        if random() < 0.15:
            succes = succes + 1
        return succes / n
```

(a) La ligne `succes = 0` est placée dans la boucle. Explique le problème et dis où la placer.

(b) Le `return` est lui aussi dans la boucle. Quelles valeurs `frequence(200)` peut-elle renvoyer ?

(c) Hugo écrit `random() > 0.15` à la place du test. Avec quelle probabilité ce test est-il vrai ? Que compterait-on alors ?

(d) Le programme est corrigé. De quel nombre `frequence(5000)` est-elle proche ? Combien de pièces défectueuses environ y a-t-il sur 5 000 pièces ?

Ex. 46 ★★☆ **Lancers francs simulés : lire un tableau** — Inès simule les lancers francs d'une joueuse qui réussit chaque lancer avec la probabilité $p = 0{,}6$. Voici ce que sa fonction renvoie pour n lancers.

n	**20**	**200**	**2 000**	**20 000**
résultat	14	113	1 236	12 054

(a) La fonction d'Inès renvoie-t-elle le nombre ou la fréquence des lancers réussis ? Justifie avec le tableau.

(b) Calcule la fréquence observée de lancers réussis pour chaque valeur de n.

(c) Calcule l'écart en nombre $k - np$, puis l'écart $|f - p|$, pour $n = 2\,000$ et pour $n = 20\,000$. Que constates-tu ?

(d) Léo lit la colonne $n = 20$ et conclut que la joueuse réussit 70 % de ses lancers. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Inès relance son programme. Obtiendra-t-elle les mêmes résultats ? Justifie.

Ex. 47 ★★☆ **La roue de la kermesse : compléter un programme** — Une roue équilibrée a 8 secteurs numérotés de 1 à 8. On gagne si l'on obtient 6, 7 ou 8. La fonction `partie(n)` doit renvoyer la fréquence des parties gagnées sur n parties.

```
from random import randint
def partie(n):
    gagne = 0
    for i in range(n):
        if ..... :
            gagne = ......
    return ......
```

(a) Complète la ligne du test.

(b) Complète la ligne du compteur.

Ex. 47 **(suite)**

(c) Complète la ligne du `return`.

(d) Quelle est la probabilité de gagner une partie ? De quel nombre `partie(10000)` est-elle proche ?

(e) Mehdi place `gagne = gagne + 1` hors du `if`, au même niveau que lui. Que renverrait alors `partie(10000)` ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Pluie de novembre : écrire la simulation** — À Brest, sur les 420 jours de novembre des 14 dernières années, il a plu 147 jours. Lina veut simuler la météo de novembre avec `random()` du module random.

(a) Calcule la fréquence observée des jours de pluie. Quelle probabilité p Lina peut-elle choisir pour son modèle ? Justifie.

(b) Écris une fonction `pluie(n)` qui simule n jours de novembre et renvoie la fréquence des jours de pluie.

(c) Lina exécute deux fois `pluie(30)` et obtient 0,5 puis 0,2. Son frère dit : « Ton programme est faux. » A-t-il raison ? Justifie avec les écarts $|f - p|$.

(d) Avec ce modèle, combien de jours de pluie Lina peut-elle prévoir pour les 30 jours du prochain mois de novembre ? Est-ce une certitude ?

(e) Au tableur, quelle formule faut-il écrire en A1 pour afficher VRAI un jour de pluie simulé ? Comment obtient-on ensuite la fréquence sur 300 jours ?

Ex. 49 ★★★ **Tir à l'arc : deux erreurs à chasser** — Nadia touche le centre de la cible avec la probabilité 0,3. Elle veut une fonction qui renvoie la fréquence des tirs au centre sur n tirs. Voici son premier essai :

```
from random import randint
def cible(n):
    touche = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 20) < 6:
            touche = 1
    return touche / n
```

(a) Avec quelle probabilité le test `randint(1, 20) < 6` est-il vrai ? Corrige-le pour simuler la bonne probabilité.

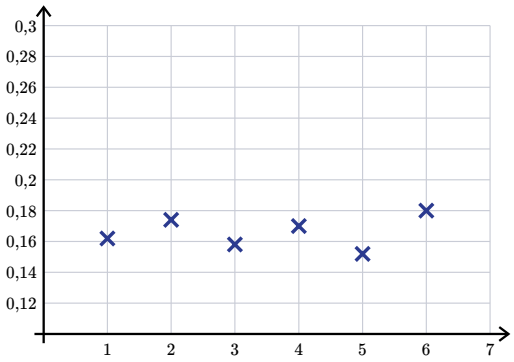
(b) La ligne `touche = 1` est fausse. Quelles valeurs `touche` peut-il avoir après la boucle ? Que renvoie alors `cible(500)` ? Corrige la ligne.

(c) Écris une fonction `tir()` qui simule un seul tir avec `random()` et renvoie 1 si le tir touche le centre, 0 sinon.

(d) Avec la fonction corrigée, un appel `cible(500)` a renvoyé 0,312. Combien de tirs simulés ont touché le centre ? Calcule l'écart $|f - p|$.

Ex. 50 ★★★ **Le dé de Timéo est-il équilibré ?** — Timéo lance 500 fois son dé et obtient 118 fois le 6. Pour comparer avec un dé équilibré, il écrit le programme ci-dessous. Le nuage montre les fréquences de 6 obtenues sur six échantillons simulés de taille 500.

```
from random import randint
def nb_six(n):
    six = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 6) == 6:
            six = six + 1
    return six
```



(a) Avec quelle probabilité le test `randint(1, 6) == 6` est-il vrai ? Timéo avait d'abord écrit `randint(1, 7)` : quelle probabilité aurait-il simulée ?

(b) La fonction renvoie-t-elle un nombre ou une fréquence de 6 ? Justifie, puis modifie une ligne pour qu'elle renvoie la fréquence.

(c) Une simulation de 500 lancers d'un dé équilibré a donné 84 fois le 6 : calcule la fréquence correspondante. Calcule la fréquence des 6 de Timéo et son écart à $\frac{1}{6}$.

(d) Lis l'étendue des fréquences du nuage. Timéo a-t-il des raisons de douter que son dé soit équilibré ? Justifie. Est-ce une preuve ?

(e) Estime la probabilité d'obtenir 6 avec ce dé. Combien de 6 Timéo peut-il prévoir sur 2 000 lancers ?