1. Développer $k(a+b)$ et $k(a-b)$: nombres et lettres

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : développer avec des nombres**

(a) $9 \times (10+7) = 9 \times 10 + 9 \times 7 = 90 + 63 = 153$

(b) $4 \times (30-2) = 4 \times 30 - 4 \times 2 = 120 - 8 = 112$

(c) $(20+3) \times 5 = 20 \times 5 + 3 \times 5 = 100 + 15 = 115$

(d) $0{,}5 \times (6-0{,}8) = 0{,}5 \times 6 - 0{,}5 \times 0{,}8 = 3 - 0{,}4 = 2{,}6$

(e) $2 \times (40+5+0{,}3) = 2 \times 40 + 2 \times 5 + 2 \times 0{,}3 = 80 + 10 + 0{,}6 = 90{,}6$

(f) $(7-0{,}2) \times 3 = 7 \times 3 - 0{,}2 \times 3 = 21 - 0{,}6 = 20{,}4$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : développer avec des lettres**

(a) $8(x+3) = 8 \times x + 8 \times 3 = 8x + 24$

(b) $3(y-5) = 3 \times y - 3 \times 5 = 3y - 15$

(c) $5(3x+2) = 5 \times 3x + 5 \times 2 = 15x + 10$

(d) $(a+8) \times 2 = a \times 2 + 8 \times 2 = 2a + 16$

(e) $7(a+b) = 7 \times a + 7 \times b = 7a + 7b$

(f) $2(x+y+3) = 2 \times x + 2 \times y + 2 \times 3 = 2x + 2y + 6$

(g) $0{,}5(4x-6) = 0{,}5 \times 4x - 0{,}5 \times 6 = 2x - 3$

Ex. 3 ★☆☆ **Somme ou produit ?**

(a) La dernière opération est la multiplication par 8 : c'est un produit. Développé, il donne $8(x+1) = 8 \times x + 8 \times 1 = 8x + 8$, et non $8x + 1$.

(b) On calcule $8x$, puis on ajoute 1 : c'est une somme (déjà développée).

(c) On calcule $y - 2$, puis on multiplie par 6 : c'est un produit.

(d) On calcule $2a$ et $2b$, puis on les ajoute : c'est une somme.

(e) On calcule $n + 3$, puis on multiplie par 5 : c'est un produit.

(f) On calcule $3 \times x$, puis on soustrait 7 : c'est une différence.

Ex. 4 ★★☆ **Les calculs de Noah**

(a) Noah a tort : il a oublié de multiplier 9 par 5. $5 \times (10+9) = 5 \times 10 + 5 \times 9 = 50 + 45 = 95$.

(b) Noah a tort : il a ajouté 4 et 3 au lieu de les multiplier. $4(3x+2) = 4 \times 3x + 4 \times 2 = 12x + 8$.

(c) Noah a tort : la distributivité ne s'applique pas à un produit. $2 \times (6 \times 5) = 2 \times 30 = 60$.

(d) Noah a tort : le 2 doit aussi être multiplié par 9. $9(y+2) = 9 \times y + 9 \times 2 = 9y + 18$.

(e) Noah a raison : $(x+5) \times 3 = x \times 3 + 5 \times 3 = 3x + 15$.

Ex. 5 ★★☆ **Retrouver ce qui manque**

(a) $4(x+5) = 4 \times x + 4 \times 5 = 4x + 20$: le facteur manquant est 4.

(b) $(y-3) \times 7 = y \times 7 - 3 \times 7 = 7y - 21$: le facteur manquant est 7.

(c) $6(3x+2) = 6 \times 3x + 6 \times 2 = 18x + 12$: le terme manquant est $3x$.

(d) $5(2a+b) = 5 \times 2a + 5 \times b = 10a + 5b$: le facteur manquant est 5.

(e) $2(x-0{,}8) = 2 \times x - 2 \times 0{,}8 = 2x - 1{,}6$: le terme manquant est 0,8.

Ex. 6 ★★☆ **Comparer trois expressions**

(a)

x	1	2	0,5
5(x + 3)	20	25	17,5
5x + 3	8	13	5,5
5x + 15	20	25	17,5

Par exemple, pour $x = 0{,}5$: $5 \times (0{,}5+3) = 5 \times 3{,}5 = 17{,}5$.

(b) Dans le tableau, $5x + 15$ donne toujours le même résultat que $5(x+3)$.

(c) $5(x+3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$. Les deux expressions sont donc égales pour toutes les valeurs de x.

(d) Chloé a tort : pour $x = 1$, $5(x+3) = 20$ alors que $5x + 3 = 8$. Elle a oublié de multiplier 3 par 5.

Ex. 7 ★★☆ Le potager de Malik

(a) L'aire est largeur × longueur : $6(x+4)$ m².

(b) $6(x+4) = 6\times x + 6\times 4 = 6x+24$. L'aire est $6x+24$ m².

(c) $6\times(2{,}5+4) = 6\times 6{,}5 = 39$ et $6\times 2{,}5 + 24 = 15 + 24 = 39$. Les deux expressions donnent la même aire : 39 m².

(d) Le périmètre vaut $2\times(x+4+6) = 2\times x + 2\times 4 + 2\times 6 = 2x+8+12 = 2x+20$. Le périmètre est $2x+20$ m.

Ex. 8 ★★★ Vrai ou faux ?

(a) Vrai. $(x+0{,}25)\times 8 = x\times 8 + 0{,}25\times 8 = 8x+2$. Le développement prouve l'égalité pour tout nombre x.

(b) Faux. $1{,}2(5x-10) = 1{,}2\times 5x - 1{,}2\times 10 = 6x-12$. Contre-exemple : pour $x=4$, $1{,}2\times(5\times 4-10) = 1{,}2\times 10 = 12$ alors que $6\times 4 - 10 = 14$.

(c) Faux. Un seul essai ne suffit pas. Pour $x=2$: $3\times(2+2) = 12$ alors que $2+8=10$. En fait, $3(x+2) = 3\times x + 3\times 2 = 3x+6$.

(d) Vrai. $4(a+2b+3) = 4\times a + 4\times 2b + 4\times 3 = 4a+8b+12$, pour tous nombres a et b.

(e) Faux. $2\times(5\times x)$ est un produit : la distributivité ne s'applique pas, et $2\times(5\times x) = 10x$. Contre-exemple : pour $x=1$, $2\times(5\times 1) = 10$ alors que $2\times 5 + 2\times 1 = 12$.

Ex. 9 ★★★ Les deux programmes de Yanis

(a) Avec 5 : A donne $(5+3)\times 4 - 12 = 32-12 = 20$ et B donne $(5\times 2+5)\times 2 - 10 = 30-10 = 20$. Avec 2,5 : A donne $(2{,}5+3)\times 4 - 12 = 22-12 = 10$ et B donne $(2{,}5\times 2+5)\times 2 - 10 = 20-10 = 10$. Les deux programmes donnent le même résultat à chaque fois.

(b) $4(x+3) - 12 = 4\times x + 4\times 3 - 12 = 4x+12-12 = 4x$. Le programme A donne $4x$.

(c) $2(2x+5) - 10 = 2\times 2x + 2\times 5 - 10 = 4x+10-10 = 4x$ (attention : $2\times 2x = 4x$). Le programme B donne aussi $4x$.

(d) Oui. Les essais ne suffisent pas à le prouver, mais le calcul littéral, lui, le prouve : les deux programmes donnent $4x$ pour n'importe quel nombre x. Ils donnent donc toujours le même résultat, le quadruple du nombre choisi.

Ex. 10 ★★★ L'équipe de Lina

(a) Chaque joueuse coûte $x+12{,}5+4$ €. Pour 6 joueuses, le prix total est donc $6(x+12{,}5+4)$ €.

(b) $6(x+12{,}5+4) = 6\times x + 6\times 12{,}5 + 6\times 4 = 6x + 75 + 24 = 6x+99$. Le prix total est $6x+99$ €.

(c) C'est une somme, et sa dernière opération est une addition. Le frère n'a multiplié par 6 que le premier terme. Il a oublié $6\times 12{,}5$ et 6×4 : il n'a compté qu'un seul short et une seule paire de chaussettes.

(d) Avec le produit : $6\times(18+12{,}5+4) = 6\times 34{,}5 = 207$. Avec la forme développée : $6\times 18 + 99 = 108+99 = 207$. Le prix total est 207 €, et les deux calculs concordent.

(e) Lina économise $6\times 1{,}5 = 9$ € au total. Le nouveau prix total est $6(x+11+4) = 6\times x + 6\times 11 + 6\times 4 = 6x+66+24 = 6x+90$ €.

2. *Factoriser avec un facteur commun*

Ex. 11 ★☆☆ Automatismes : factoriser par un nombre

(a) $6x+66 = 6\times x + 6\times 11 = 6(x+11)$

(b) $9x+9 = 9\times x + 9\times 1 = 9(x+1)$: il reste 1, pas 0.

(c) $7a-7b = 7\times a - 7\times b = 7(a-b)$

(d) $15x+10 = 5\times 3x + 5\times 2 = 5(3x+2)$: le facteur commun 5 était caché.

(e) $12x-12 = 12\times x - 12\times 1 = 12(x-1)$: on garde le signe $-$.

(f) $4x+8y+20 = 4\times x + 4\times 2y + 4\times 5 = 4(x+2y+5)$

Ex. 12 ★☆☆ Automatismes : compléter les trous

(a) $14x+21 = 7\times 2x + 7\times 3 = 7(2x+3)$

(b) $10x-25 = 5\times 2x - 5\times 5 = 5(2x-5)$

(c) $18a+6 = 6\times 3a + 6\times 1 = 6(3a+1)$

(d) $2{,}5x+2{,}5 = 2{,}5\times x + 2{,}5\times 1 = 2{,}5(x+1)$

(e) $y\times 8 + z\times 8 = 8\times y + 8\times z = 8(y+z)$: le facteur commun 8 est écrit à droite.

(f) $16x-24 = 8\times 2x - 8\times 3 = 8(2x-3)$

Ex. 13 ★☆☆ **Calcul astucieux par facteur commun**

(a) $6 \times 14 + 6 \times 26 = 6 \times (14 + 26) = 6 \times 40 = 240$

(b) $13 \times 8 + 87 \times 8 = (13 + 87) \times 8 = 100 \times 8 = 800$

(c) $4{,}5 \times 17 - 4{,}5 \times 7 = 4{,}5 \times (17 - 7) = 4{,}5 \times 10 = 45$

(d) $2{,}3 \times 6 + 2{,}3 \times 4 = 2{,}3 \times (6 + 4) = 2{,}3 \times 10 = 23$

(e) $25 \times 13 - 25 \times 9 = 25 \times (13 - 9) = 25 \times 4 = 100$

(f) $3 \times 15 + 3 \times 25 + 3 \times 60 = 3 \times (15 + 25 + 60) = 3 \times 100 = 300$

Ex. 14 ★☆☆ **Le facteur commun est une lettre**

(a) Facteur commun x : $xy + 3x = x \times y + x \times 3 = x(y + 3)$

(b) Facteur commun b : $7b + ab = 7 \times b + a \times b = b(7 + a)$

(c) Facteur commun a : $a + ab = a \times 1 + a \times b = a(1 + b)$

(d) Facteur commun x : $x^2 + 4x = x \times x + x \times 4 = x(x + 4)$

(e) Facteur commun n : $mn - 2n = m \times n - 2 \times n = n(m - 2)$

(f) Facteur commun c : $ac + bc + c = a \times c + b \times c + 1 \times c = c(a + b + 1)$

Ex. 15 ★★☆ **Factoriser, c'est possible ?**

(a) Impossible : 4 et 9 n'ont aucun diviseur commun autre que 1 (aucune table autre que celle de 1 ne contient à la fois 4 et 9). On ne peut pas factoriser $4x + 9$.

(b) $14x + 35 = 7 \times 2x + 7 \times 5 = 7(2x + 5)$. Vérification : $7 \times 2x + 7 \times 5 = 14x + 35$.

(c) Impossible : aucun facteur n'est commun aux deux produits. On calcule directement : $42 + 55 = 97$.

(d) Le facteur commun 13 est à droite dans le 1er terme, à gauche dans le 2e : $9 \times 13 + 13 \times 11 = 13 \times (9 + 11) = 13 \times 20 = 260$.

(e) $22a - 33 = 11 \times 2a - 11 \times 3 = 11(2a - 3)$. Vérification : $11 \times 2a - 11 \times 3 = 22a - 33$.

Ex. 16 ★★☆ **Les factorisations de Malik**

(a) Faux : $8(x + 0) = 8x$, pas $8x + 8$. Comme $8 = 8 \times 1$, on a $8x + 8 = 8 \times x + 8 \times 1 = 8(x + 1)$.

(b) Faux : $20(x + 1) = 20x + 20$. Il faut garder le signe : $20x - 20 = 20 \times x - 20 \times 1 = 20(x - 1)$.

(c) Juste mais pas terminé : 6 et 9 sont encore dans la table de 3. Au plus loin : $12x + 18 = 6 \times 2x + 6 \times 3 = 6(2x + 3)$.

Ex. 16 (suite)

(d) Juste et terminé : $15 \times 2x + 15 \times 3 = 30x + 45$, et 2 et 3 n'ont plus que 1 en commun.

Ex. 17 ★★☆ **La recette du cinéma de Rodez**

(a) Recette du samedi : $7{,}5 \times 38 + 7{,}5 \times 62$.

(b) $7{,}5 \times 38 + 7{,}5 \times 62 = 7{,}5 \times (38 + 62) = 7{,}5 \times 100 = 750$. La recette du samedi est de 750 €.

(c) $7{,}5x + 7{,}5 \times 45 = 7{,}5(x + 45)$. La recette du dimanche est $7{,}5(x + 45)$ euros.

(d) $7{,}5 \times (35 + 45) = 7{,}5 \times 80 = 600$. La recette du dimanche est de 600 €.

Ex. 18 ★★★ **Les parcelles de Lucie à Colmar**

(a) $8 \times x + 8 \times 5 = 8x + 40$. L'aire totale est $8x + 40$ m².

(b) $8x + 40 = 8 \times x + 8 \times 5 = 8(x + 5)$. La parenthèse $x + 5$ est la longueur du grand rectangle : l'aire est bien largeur × longueur.

(c) $2 \times (x + 5) + 2 \times 8 = 2 \times x + 2 \times 5 + 16 = 2x + 10 + 16 = 2x + 26$, puis $2x + 26 = 2 \times x + 2 \times 13 = 2(x + 13)$. Le périmètre est $2(x + 13)$ m.

(d) Aire : $8 \times (7{,}5 + 5) = 8 \times 12{,}5 = 100$. Périmètre : $2 \times (7{,}5 + 13) = 2 \times 20{,}5 = 41$. L'aire est 100 m² et le périmètre 41 m.

(e) $8 \times x + 8 \times 5 + 8 \times 2{,}5 = 8(x + 5 + 2{,}5) = 8(x + 7{,}5)$. La nouvelle aire est $8(x + 7{,}5)$ m², c'est-à-dire $8x + 60$ m².

Ex. 19 ★★★ **À la recherche du meilleur facteur commun**

(a) $24x + 36 = 2(12x + 18) = 3(8x + 12) = 4(6x + 9) = 6(4x + 6) = 12(2x + 3)$. La forme factorisée au plus loin est $12(2x + 3)$: 2 et 3 n'ont plus de facteur commun autre que 1, alors que dans les autres parenthèses on peut encore factoriser.

(b) $15x - 10y + 5 = 5 \times 3x - 5 \times 2y + 5 \times 1 = 5(3x - 2y + 1)$. Le dernier terme laisse 1, pas 0, et les signes sont gardés.

(c) $a \times 9 + b \times 9 - 9 \times 1 = 9(a + b - 1)$. Le facteur commun 9 est écrit à droite, mais on le met devant la parenthèse.

(d) k doit être dans la table de 6 mais pas dans celle de 18 (sinon on factoriserait par 18). Par exemple $k = 12$: $18x + 12 = 6 \times 3x + 6 \times 2 = 6(3x + 2)$, et 3 et 2 n'ont plus de diviseur commun autre que 1. Avec $k = 12$, c'est factorisé au plus loin.

Ex. 19 (suite)

(e) $2{,}4x + 1{,}2 = 1{,}2 \times 2x + 1{,}2 \times 1 = 1{,}2(2x + 1)$. Il reste 1, pas 0, et 2 et 1 sont les plus petits entiers possibles. Vérification : $1{,}2 \times 2x + 1{,}2 \times 1 = 2{,}4x + 1{,}2$.

Ex. 20 ★★★ **Les programmes de calcul de Ben**

(a) A : $1 \times 4 + 28 = 32$; $3 \times 4 + 28 = 40$; $10 \times 4 + 28 = 68$. B : $(1 + 7) \times 4 = 32$; $(3 + 7) \times 4 = 40$; $(10 + 7) \times 4 = 68$.

Nombre choisi	1	3	10
Programme A	32	40	68
Programme B	32	40	68

(b) $x \times 4 + 28 = 4x + 28$. Le résultat du programme A est $4x + 28$.

(c) $4x + 28 = 4 \times x + 4 \times 7 = 4(x + 7)$. Le programme B donne $(x + 7) \times 4 = 4(x + 7)$. Les deux expressions sont égales pour toutes les valeurs de x : les programmes donnent toujours le même résultat.

(d) Le résultat est $4(x + 7)$: c'est 4 fois le nombre entier $x + 7$. C'est donc toujours un multiple de 4.

(e) Faux. $6x + 33 = 3 \times 2x + 3 \times 11 = 3(2x + 11)$: le plus grand facteur commun est 3, pas 6. Contre-exemple : avec 1, on obtient $6 \times 1 + 33 = 39$, qui n'est pas un multiple de 6. Le résultat est toujours un multiple de 3.

3. *Calculer astucieusement avec la distributivité*

Ex. 21 ★☆☆ **Automatismes : développer pour calculer de tête**

(a) $34 \times 101 = 34 \times (100 + 1) = 34 \times 100 + 34 \times 1 = 3\,400 + 34 = 3\,434$

(b) $99 \times 27 = (100 - 1) \times 27 = 100 \times 27 - 1 \times 27 = 2\,700 - 27 = 2\,673$

(c) $83 \times 1\,001 = 83 \times (1\,000 + 1) = 83 \times 1\,000 + 83 \times 1 = 83\,000 + 83 = 83\,083$

(d) $19 \times 18 = (20 - 1) \times 18 = 20 \times 18 - 1 \times 18 = 360 - 18 = 342$

(e) $0{,}99 \times 300 = (1 - 0{,}01) \times 300 = 1 \times 300 - 0{,}01 \times 300 = 300 - 3 = 297$

(f) $52 \times 1{,}01 = 52 \times (1 + 0{,}01) = 52 \times 1 + 52 \times 0{,}01 = 52 + 0{,}52 = 52{,}52$

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : factoriser pour calculer de tête**

(a) $41 \times 28 + 41 \times 72 = 41 \times (28 + 72) = 41 \times 100 = 4\,100$

(b) $13 \times 67 - 13 \times 57 = 13 \times (67 - 57) = 13 \times 10 = 130$

(c) $27 \times 3{,}5 + 73 \times 3{,}5 = (27 + 73) \times 3{,}5 = 100 \times 3{,}5 = 350$

(d) $8 \times 17 + 8 \times 25 + 8 \times 58 = 8 \times (17 + 25 + 58) = 8 \times 100 = 800$

(e) $7{,}5 \times 64 - 7{,}5 \times 24 = 7{,}5 \times (64 - 24) = 7{,}5 \times 40 = 300$

(f) $0{,}6 \times 85 + 0{,}6 \times 15 = 0{,}6 \times (85 + 15) = 0{,}6 \times 100 = 60$

Ex. 23 ★☆☆ **Compléter les égalités**

(a) $9 \times 49 = 9 \times (50 - 1) = 450 - 9 = 441$

(b) $14 \times 52 = 14 \times (50 + 2) = 700 + 28 = 728$

(c) $6 \times 3{,}98 = 6 \times (4 - 0{,}02) = 24 - 0{,}12 = 23{,}88$

(d) $15 \times 37 + 15 \times 63 = 15 \times 100 = 1\,500$

(e) $11 \times 23 - 11 \times 13 = 11 \times 10 = 110$

(f) $40 \times 102 = 40 \times (100 + 2) = 4\,000 + 80 = 4\,080$

Ex. 24 ★★☆ **Les calculs d'Inès**

(a) Faux : il faut retirer 16×2, pas 2. $16 \times 98 = 16 \times (100 - 2) = 1\,600 - 32 = 1\,568$.

(b) Faux : $50 + 3 = 53$, pas 47. Le bon découpage est $47 = 50 - 3$: $8 \times 47 = 8 \times (50 - 3) = 400 - 24 = 376$.

(c) Juste : $12 \times 1{,}01 = 12 \times (1 + 0{,}01) = 12 \times 1 + 12 \times 0{,}01 = 12 + 0{,}12 = 12{,}12$.

(d) Faux : il faut retirer $5 \times 0{,}03$. $5 \times 2{,}97 = 5 \times (3 - 0{,}03) = 15 - 0{,}15 = 14{,}85$.

(e) Faux : le facteur commun 25 multiplie la somme. $25 \times 43 + 25 \times 57 = 25 \times (43 + 57) = 25 \times 100 = 2\,500$.

Ex. 25 ★★☆ **Développer ou factoriser ?**

(a) Je développe (102 est proche de 100) : $35 \times 102 = 35 \times (100 + 2) = 3\,500 + 70 = 3\,570$.

(b) Je factorise (facteur commun 4,2) : $4{,}2 \times 73 + 4{,}2 \times 27 = 4{,}2 \times (73 + 27) = 4{,}2 \times 100 = 420$.

(c) Je développe (999 est proche de 1 000) : $999 \times 7 = (1\,000 - 1) \times 7 = 7\,000 - 7 = 6\,993$.

(d) Je factorise (facteur commun 0,4) : $58 \times 0{,}4 - 48 \times 0{,}4 = (58 - 48) \times 0{,}4 = 10 \times 0{,}4 = 4$.

(e) Je développe (2,99 est proche de 3) : $2{,}99 \times 20 = (3 - 0{,}01) \times 20 = 60 - 0{,}2 = 59{,}8$.

Ex. 26 ★★☆ **Calculs de tête en situation**

(a) $14 \times 1{,}99 = 14 \times (2 - 0{,}01) = 28 - 0{,}14 = 27{,}86$. Le prix total est 27,86 €.

(b) $98 \times 9 = (100 - 2) \times 9 = 900 - 18 = 882$. La recette est 882 €.

(c) $6{,}5 \times 42 + 6{,}5 \times 58 = 6{,}5 \times (42 + 58) = 6{,}5 \times 100 = 650$. L'aire totale est 650 m².

(d) $101 \times 2{,}4 = (100 + 1) \times 2{,}4 = 240 + 2{,}4 = 242{,}4$. Le prix total est 242,40 €.

Ex. 27 ★★☆ **Comparer sans poser**

(a) $24 \times 99 = 24 \times (100 - 1) = 2\,400 - 24 = 2\,376$ et $25 \times 98 = 25 \times (100 - 2) = 2\,500 - 50 = 2\,450$.
Donc $24 \times 99 < 25 \times 98$.

(b) $13 \times 1\,001 = 13 \times (1\,000 + 1) = 13\,000 + 13 = 13\,013$ et $1\,301 \times 10 = 13\,010$.
Donc $13 \times 1\,001 > 1\,301 \times 10$.

(c) $59 = 60 - 1$, donc $6 \times 59 = 6 \times (60 - 1) = 360 - 6 = 354$.
Donc $6 \times 59 > 350$.

(d) $3{,}4 \times 56 - 3{,}4 \times 46 = 3{,}4 \times (56 - 46) = 3{,}4 \times 10 = 34$.
Donc les deux nombres sont égaux.

(e) On retire $72 \times 0{,}01$, pas 0,01 : $72 \times 0{,}99 = 72 \times (1 - 0{,}01) = 72 - 0{,}72 = 71{,}28$.
Donc $72 \times 0{,}99 < 71{,}5$.

Ex. 28 ★★★ **Le stand de confitures de Zoé**

(a) $45 \times 2{,}98 = 45 \times (3 - 0{,}02) = 45 \times 3 - 45 \times 0{,}02 = 135 - 0{,}9 = 134{,}1$. On retire 0,9, pas 0,02. Le samedi, Zoé encaisse 134,1 €.

(b) $45 \times 2{,}98 + 55 \times 2{,}98 = (45 + 55) \times 2{,}98 = 100 \times 2{,}98 = 298$. Sur le week-end, Zoé encaisse 298 €.

(c) Pots : $60 \times 1{,}01 = 60 \times (1 + 0{,}01) = 60 \times 1 + 60 \times 0{,}01 = 60 + 0{,}6 = 60{,}6$. Étiquettes : $3{,}2 \times 19 = 3{,}2 \times (20 - 1) = 3{,}2 \times 20 - 3{,}2 \times 1 = 64 - 3{,}2 = 60{,}8$. Les pots vides coûtent 60,6 € et les étiquettes 60,8 €.

(d) Dépenses : $60{,}6 + 60{,}8 = 121{,}4$ €. Bénéfice : $298 - 121{,}4 = 176{,}6$. Le bénéfice de Zoé est de 176,6 €.

Ex. 29 ★★★ **Le programme magique de Léo**

(a) $237 \times 1\,000 + 237 = 237\,000 + 237 = 237\,237$. On obtient 237 237 : le nombre 237 est écrit deux fois de suite.

Ex. 29 **(suite)**

(b) Le résultat est $1\,000n + n$. On factorise : $1\,000n + n = 1\,000 \times n + 1 \times n = (1\,000 + 1) \times n = 1\,001n$. Le programme revient donc à multiplier le nombre choisi par 1 001.

(c) $58 \times 1\,001 = 58 \times (1\,000 + 1) = 58 \times 1\,000 + 58 \times 1 = 58\,000 + 58 = 58\,058$.
Donc $58 \times 1\,001 = 58\,058$.

(d) Non. Il faut ajouter $64 \times 1 = 64$, et non 1 : $64 \times 1\,001 = 64 \times (1\,000 + 1) = 64\,000 + 64 = 64\,064$. Lina a tort, le bon résultat est 64 064.

(e) D'après la question 2, le résultat vaut $1\,001n$. Or $409 \times 1\,001 = 409\,000 + 409 = 409\,409$. Le nombre choisi est 409.

Ex. 30 ★★★ **Le concours de calcul mental**

(a) $A = 46 \times (1 - 0{,}01) = 46 \times 1 - 46 \times 0{,}01 = 46 - 0{,}46 = 45{,}54$.
Donc $A = 45{,}54$.

(b) $B = 0{,}46 \times (100 - 1) = 0{,}46 \times 100 - 0{,}46 \times 1 = 46 - 0{,}46 = 45{,}54$.
Donc $B = 45{,}54$: A et B sont égaux.

(c) $C = 13 \times 4{,}6 - 3 \times 4{,}6 = (13 - 3) \times 4{,}6 = 10 \times 4{,}6 = 46$.
Donc $C = 46$.

(d) $4{,}6 \times 31 + 4{,}6 \times \ldots = 4{,}6 \times (31 + \ldots)$. Comme $4{,}6 \times 100 = 460$, il faut $31 + \ldots = 100$. Le nombre manquant est 69.

(e) Le découpage de Jade change la valeur : $1 + 0{,}02 = 1{,}02$ et non 0,98. Il faut écrire $0{,}98 = 1 - 0{,}02$. Alors $46 \times 0{,}98 = 46 \times (1 - 0{,}02) = 46 \times 1 - 46 \times 0{,}02 = 46 - 0{,}92 = 45{,}08$.
Donc $46 \times 0{,}98 = 45{,}08$.

4. *Conventions d'écriture, réduire, développer puis réduire*

Ex. 31 ★☆☆ **Automatismes : écrire sans le signe ×**

(a) $5 \times x \times 3 = 5 \times 3 \times x = 15x$

(b) $1 \times t = 1t = t$

(c) $x \times x = x^2$

(d) $0 \times y = 0y = 0$

(e) $a \times 7 \times b = 7ab$

(f) $2{,}5 \times n \times 4 = 2{,}5 \times 4 \times n = 10n$

Ex. 31 **(suite)**

(g) $y \times 6 = 6y$
(le nombre s'écrit devant la lettre)

Ex. 32 ★☆☆ **Automatismes : réduire**

(a) $6t + 9t = (6 + 9)t = 15t$

(b) $x + x = 1x + 1x = 2x$

(c) $11x - 11x = 0x = 0$

(d) $1{,}3y + 0{,}9y = (1{,}3 + 0{,}9)y = 2{,}2y$

(e) Déjà réduite : $5x$ est un terme en x et 3 est un nombre seul, ils ne s'ajoutent pas.

(f) Déjà réduite : a et b sont deux lettres différentes, on ne peut pas les regrouper.

(g) $9n - n = 9n - 1n = 8n$

(h) Les x : $2x + x = 3x$; les nombres : $6 + 3 = 9$.
Donc $6 + 2x + 3 + x = 3x + 9$.

Ex. 33 ★☆☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux : $4x$ est un terme en x et 1 un nombre seul, ils ne s'ajoutent pas. $4x + 1$ est déjà réduite.

(b) Faux : $y \times y = y^2$. C'est $y + y$ qui vaut $2y$.

(c) Faux : $9a$ est un terme en a et 9 est un nombre seul, on ne peut pas les regrouper. $9a - 9$ est déjà réduite (c'est $9a - 9a$ qui vaut 0).

(d) Vrai : $1a = a$, donc $1a + 2 = a + 2$.

(e) Vrai : les termes en a se regroupent, $a + a = 2a$; b est une autre lettre, il reste seul.
Donc $a + b + a = 2a + b$.

Ex. 34 ★★☆ **Développer, puis réduire**

(a) $2x + 4(x + 3) - 5 = 2x + 4 \times x + 4 \times 3 - 5 = 2x + 4x + 12 - 5 = 6x + 7$

(b) $6(y + 1) + 4(y - 1) = 6 \times y + 6 \times 1 + 4 \times y - 4 \times 1 = 6y + 6 + 4y - 4 = 10y + 2$

(c) $(2a + 1) \times 3 + a = 2a \times 3 + 1 \times 3 + a = 6a + 3 + a = 7a + 3$

(d) $0{,}5(4x + 8) + 1{,}5x = 0{,}5 \times 4x + 0{,}5 \times 8 + 1{,}5x = 2x + 4 + 1{,}5x = 3{,}5x + 4$

(e) $2(x + 3y + 5) + 4y = 2 \times x + 2 \times 3y + 2 \times 5 + 4y = 2x + 6y + 10 + 4y = 2x + 10y + 10$

Ex. 35 ★★☆ **Corrige les erreurs**

(a) Léa a tort : elle a regroupé le nombre 7 avec les x. Les x : $4x + 2x = 6x$; le 7 reste seul.
Donc $4x + 7 + 2x = 6x + 7$.

(b) Hugo a tort : il a oublié de multiplier 2 par 5. $5(x + 2) + 3x = 5 \times x + 5 \times 2 + 3x = 5x + 10 + 3x = 8x + 10$.

(c) Inès a tort : $y \times y = y^2$ et non $2y$.
Donc $y \times y + y = y^2 + y$, qui est déjà réduite.

(d) Tom a raison : $2(x - 4) + 9 = 2 \times x - 2 \times 4 + 9 = 2x - 8 + 9 = 2x + 1$.

Ex. 36 ★★☆ **Deux programmes de calcul**

(a) A avec 1 : $2 \times (1 + 3) + 1 = 9$; avec 4 : $2 \times (4 + 3) + 4 = 18$; avec 2,5 : $2 \times (2{,}5 + 3) + 2{,}5 = 13{,}5$. B : $3 \times 1 + 6 = 9$; $3 \times 4 + 6 = 18$; $3 \times 2{,}5 + 6 = 13{,}5$.

Nombre choisi	**1**	**4**	**2,5**
Programme A	9	18	13,5
Programme B	9	18	13,5

(b) Non : trois essais ne prouvent rien pour tous les nombres. Il faudrait faire le calcul avec une lettre, qui représente n'importe quel nombre.

(c) $2(x + 3) + x = 2 \times x + 2 \times 3 + x = 2x + 6 + x = 3x + 6$. Le programme A donne $3x + 6$.

(d) Le programme B donne $3 \times x + 6 = 3x + 6$. A donne aussi $3x + 6$. Donc, quel que soit le nombre choisi, A et B donnent toujours le même résultat.

Ex. 37 ★★☆ **Une sortie au cinéma**

(a) Une place enfant coûte $x - 2$ €.

(b) Prix total : $2x + 3(x - 2) + 15 = 2x + 3 \times x - 3 \times 2 + 15 = 2x + 3x - 6 + 15 = 5x + 9$. La famille paie $5x + 9$ €.

(c) $5 \times 8{,}5 + 9 = 42{,}5 + 9 = 51{,}5$. La famille paie 51,50 €.

Ex. 38 ★★★ **Le potager de Clémence**

(a) Non. L'aire du carré est $x \times x = x^2$ m². Malo a écrit $x + x = 2x$: il a confondu l'addition et la multiplication.

(b) Le potager est un rectangle de largeur x et de longueur $x + 2{,}5$. Son aire vaut donc $x(x + 2{,}5)$. En développant : $x(x + 2{,}5) = x \times x + x \times 2{,}5 = x^2 + 2{,}5x$. On retrouve l'aire du carré plus celle du petit rectangle. L'aire est $x^2 + 2{,}5x$ m².

Ex. 38 **(suite)**

(c) $P = 2 \times x + 2 \times (x + 2{,}5) = 2x + 2x + 5 = 4x + 5$. Le périmètre est $4x + 5$ m. $4x$ est un terme en x et 5 est un nombre seul : ils ne sont pas de même nature, donc $4x + 5$ est déjà réduite (écrire $9x$ serait faux).

(d) Coût $= (4x + 5) \times 1{,}5 + 3{,}4 = 4x \times 1{,}5 + 5 \times 1{,}5 + 3{,}4 = 6x + 7{,}5 + 3{,}4 = 6x + 10{,}9$. Le coût total est bien $6x + 10{,}9$ €.

(e) Aire : $4^2 + 2{,}5 \times 4 = 16 + 10 = 26$ m². Coût : $6 \times 4 + 10{,}9 = 24 + 10{,}9 = 34{,}9$ €. Pour $x = 4$, le potager mesure 26 m² et le grillage coûte 34,90 €.

Ex. 39 ★★★ **Le défi des expressions**

(a) $A = 12x + 2x - 14x = (12 + 2 - 14)x = 0x = 0$. Quel que soit x, A vaut toujours 0.

(b) Non. $2a$ et $4a$ se regroupent : $2a + 4a = 6a$. Mais a et b sont deux lettres différentes : $6a$ et $3b$ ne se regroupent pas.
Donc $2a + 3b + 4a = 6a + 3b$. Vérification avec $a = 2$ et $b = 1$: $6 \times 2 + 3 \times 1 = 15$, alors que $9 \times 2 \times 1 = 18$.

(c) $(x + \ldots) \times 3 + 2x = 3x + 3 \times \ldots + 2x = 5x + 3 \times \ldots$. Il faut $3 \times \ldots = 12$, donc le nombre manquant est 4. Vérification : $(x + 4) \times 3 + 2x = 3x + 12 + 2x = 5x + 12$.

(d) Le facteur manquant multiplie x, et on ajoute ensuite $x = 1x$. Il faut $\ldots + 1 = 6$, donc le facteur manquant est 5. Vérification : $5(x - 2) + x = 5 \times x - 5 \times 2 + x = 5x - 10 + x = 6x - 10$.

(e) Les termes en y : $2{,}7y + 1{,}3y + 1y = 5y$. Les nombres seuls : $0{,}8 + 4 = 4{,}8$.
Donc $B = 5y + 4{,}8$.

Ex. 40 ★★★ **Le tour de magie de Yanis**

(a) Avec 6 : $5 \times (6 + 3) + 2 \times (6 - 1) - 7 \times 6 = 45 + 10 - 42 = 13$. Avec 2,5 : $5 \times 5{,}5 + 2 \times 1{,}5 - 7 \times 2{,}5 = 27{,}5 + 3 - 17{,}5 = 13$. On obtient 13 les deux fois.

(b) Le résultat s'écrit $5(x + 3) + 2(x - 1) - 7x$.

(c) $5(x + 3) + 2(x - 1) - 7x = 5x + 15 + 2x - 2 - 7x$. Les termes en x : $5x + 2x - 7x = 0x = 0$. Les nombres seuls : $15 - 2 = 13$. Le résultat vaut 13 quel que soit le nombre choisi : deux essais ne suffisaient pas, le calcul avec x le prouve.

Ex. 40 **(suite)**

(d) $6(x + 3) + 2(x - 1) - 7x = 6x + 18 + 2x - 2 - 7x = x + 16$ (car $6x + 2x - 7x = 1x = x$). Zoé a ajouté le terme x et le nombre seul 16 : ils ne sont pas de même nature. $x + 16$ est déjà réduite. Contrôle avec $x = 2$: le programme donne $6 \times 5 + 2 \times 1 - 14 = 18$, comme $2 + 16$, alors que $17 \times 2 = 34$.

5. *Problèmes : périmètres, aires, prix, programmes de calcul*

Ex. 41 ★☆☆ **Aires de rectangles en ligne**

(a) $5(x + 6) = 5 \times x + 5 \times 6 = 5x + 30$ cm².

(b) $2{,}5(x + 4) = 2{,}5 \times x + 2{,}5 \times 4 = 2{,}5x + 10$ m².

(c) $9(x - 2) = 9 \times x - 9 \times 2 = 9x - 18$ dm².

(d) $7(2x + 1) = 7 \times 2x + 7 \times 1 = 14x + 7$ cm².

(e) $6(a + b + 4) = 6 \times a + 6 \times b + 6 \times 4 = 6a + 6b + 24$ m².

(f) $0{,}5(4y + 3) = 0{,}5 \times 4y + 0{,}5 \times 3 = 2y + 1{,}5$ km².

Ex. 42 ★☆☆ **Retrouver la dimension manquante**

(a) $6x + 42 = 6 \times x + 6 \times 7 = 6(x + 7)$: la longueur est $x + 7$ cm.

(b) $8x + 8 = 8 \times x + 8 \times 1 = 8(x + 1)$: la longueur est $x + 1$ m.

(c) $5y + 3{,}5 = 5 \times y + 5 \times 0{,}7 = 5(y + 0{,}7)$: un ticket coûte $y + 0{,}7$ €.

(d) $10x - 15 = 5 \times 2x - 5 \times 3 = 5(2x - 3)$: la longueur est $2x - 3$ cm.

(e) $3a + 3b = 3 \times a + 3 \times b = 3(a + b)$: la longueur est $a + b$ dm.

Ex. 43 ★☆☆ **Prix calculés de tête**

(a) $6 \times 4{,}98 = 6 \times (5 - 0{,}02) = 6 \times 5 - 6 \times 0{,}02 = 30 - 0{,}12 = 29{,}88$ €.

(b) $15 \times 1{,}02 = 15 \times (1 + 0{,}02) = 15 \times 1 + 15 \times 0{,}02 = 15 + 0{,}3 = 15{,}30$ €.

(c) $6{,}5 \times 3 + 6{,}5 \times 7 = 6{,}5 \times (3 + 7) = 6{,}5 \times 10 = 65$ €.

(d) $9 \times 11 = 9 \times (10 + 1) = 9 \times 10 + 9 \times 1 = 90 + 9 = 99$ €.

(e) $4 \times 2{,}25 + 4 \times 0{,}75 = 4 \times (2{,}25 + 0{,}75) = 4 \times 3 = 12$ €.

Ex. 44 ★★☆ **Le panneau de Dijon : aire ou périmètre ?**

(a) $A = 3(x+8) = 3\times x + 3\times 8 = 3x + 24$. L'aire est $3x + 24$ m².

(b) $P = 2(x+8) + 2\times 3 = 2x + 16 + 6 = 2x + 22$. Le périmètre est $2x + 22$ m.

(c) $A = 3\times 4{,}5 + 24 = 13{,}5 + 24 = 37{,}5$ et $P = 2\times 4{,}5 + 22 = 9 + 22 = 31$. Pour $x = 4{,}5$, l'aire est 37,5 m² et le périmètre 31 m.

(d) Léa a oublié les parenthèses : la longueur $x + 8$ compte deux fois, donc il faut $2(x+8) = 2\times x + 2\times 8 = 2x + 16$. Le périmètre est $2x + 16 + 6 = 2x + 22$ m, et non $2x + 14$ m.

Ex. 45 ★★☆ **Le potager de Mme Ortiz**

(a) $7\times x + 7\times 4{,}5 = 7x + 31{,}5$. L'aire totale est $7x + 31{,}5$ m².

(b) Le grand rectangle mesure 7 m sur $x + 4{,}5$ m : son aire est $7(x + 4{,}5)$ m².

(c) $7(x+4{,}5) = 7\times x + 7\times 4{,}5 = 7x + 31{,}5$: les deux expressions sont égales.

(d) $7\times 6 + 31{,}5 = 42 + 31{,}5 = 73{,}5$. Pour $x = 6$, le potager a une aire de 73,5 m².

Ex. 46 ★★☆ **Le programme d'Inès**

(a) $2 + 5 = 7$; $7\times 3 = 21$; $21 - 15 = 6$. Puis $7 + 5 = 12$; $12\times 3 = 36$; $36 - 15 = 21$. Avec 2 on obtient 6, avec 7 on obtient 21.

(b) Non : deux essais ne montrent la propriété que pour deux nombres. Pour prouver qu'elle est vraie pour tous les nombres, il faut calculer avec une lettre.

(c) $(x+5)\times 3 - 15 = x\times 3 + 5\times 3 - 15 = 3x + 15 - 15 = 3x$. Quel que soit le nombre choisi, le résultat est son triple.

(d) Le résultat est le triple de 2,4 : $3\times 2{,}4 = 7{,}2$.

Ex. 47 ★★☆ **Thomas au cinéma de Lille**

(a)

x	6	8	9,5
Prix réel (€)	40	50	57,5
5x + 2	32	42	49,5

(b) Non : pour $x = 6$, le prix réel est 40 € alors que $5x + 2$ donne 32 €. Thomas a oublié de multiplier le 2 par 5.

(c) Prix réel : $5(x+2) = 5\times x + 5\times 2 = 5x + 10$ (en €).

Ex. 47 (suite)

(d) $5\times 8{,}5 + 10 = 42{,}5 + 10 = 52{,}5$. Thomas paie 52,50 €.

Ex. 48 ★★★ **L'affiche de Marseille**

(a) La longueur du grand rectangle est $2x + 1$ cm. Produit : $A = 3(2x+1) = 3\times 2x + 3\times 1 = 6x + 3$. Somme des aires : $A = 3\times 2x + 3\times 1 = 6x + 3$. Les deux façons donnent la même expression : l'aire de l'affiche est $6x + 3$ cm².

(b) $P = 2(2x+1) + 2\times 3 = 2\times 2x + 2\times 1 + 6 = 4x + 8$. Le périmètre est $4x + 8$ cm. Somme des périmètres : $2\times 2x + 2\times 3 = 4x + 6$ et $2\times 1 + 2\times 3 = 8$, soit $4x + 14$. Ce n'est pas P : le côté commun de 3 cm, compté deux fois, n'est pas sur le bord de l'affiche.

(c) Faux. Contre-exemple avec $x = 1$: $A = 6\times 1 + 3 = 9$ cm² et $P = 4\times 1 + 8 = 12$ cm. On obtient $9 \neq 12$, donc Karim a tort : un seul contre-exemple suffit.

(d) $A = 6\times 2{,}5 + 3 = 15 + 3 = 18$ cm² et $P = 4\times 2{,}5 + 8 = 10 + 8 = 18$ cm. On trouve le même nombre, mais les unités sont différentes (cm² et cm). Cela ne contredit pas la question précédente : une égalité vraie pour une seule valeur n'est pas vraie pour tout x.

Ex. 49 ★★★ **Le budget du club de Toulouse**

(a) Chaque membre reçoit un lot à $x + 1{,}5$ €. Prix total : $8(x+1{,}5) = 8\times x + 8\times 1{,}5 = 8x + 12$. Le prix total est $8x + 12$ €.

(b) $8\times 3{,}25 + 12 = 26 + 12 = 38$. Le prix total est 38 €.

(c) $8\times 4{,}80 = 8\times 5 - 8\times 0{,}2 = 40 - 1{,}6 = 38{,}4$, puis $38{,}4 + 12 = 50{,}4$. Le prix total est 50,40 €. C'est plus que 50 € : le budget ne suffit pas, il manque 0,40 €.

(d) $8(x + 1{,}5 + 0{,}75) = 8\times x + 8\times 1{,}5 + 8\times 0{,}75 = 8x + 12 + 6 = 8x + 18$. Le nouveau prix total est $8x + 18$ €.

Ex. 50 ★★★ **Deux programmes jumeaux ?**

(a) Avec 1 : A donne $4\times(1+3) - 2 = 16 - 2 = 14$; B donne $2\times(2\times 1 + 5) = 2\times 7 = 14$. Avec 6 : A donne $4\times(6+3) - 2 = 36 - 2 = 34$; B donne $2\times(2\times 6 + 5) = 2\times 17 = 34$. Pour ces deux nombres, A et B donnent le même résultat.

(b) A : $4(x+3) - 2 = 4\times x + 4\times 3 - 2 = 4x + 12 - 2 = 4x + 10$. B : $2(2x+5) = 2\times 2x + 2\times 5 = 4x + 10$. Les deux expressions sont égales à $4x + 10$, donc A et B donnent le même résultat quel que soit le nombre choisi.

Ex. 50 **(suite)**

ⓒ Faux. C donne $4(x+10) = 4\times x + 4\times 10 = 4x + 40$, et non $4x + 10$. Contre-exemple avec 1 : C donne $4\times(1+10) = 44$, alors que A donne 14. Jade a tort.

ⓓ A donne $4x + 10 = 4\times x + 4\times 2{,}5 = 4(x + 2{,}5)$. Il faut donc ajouter 2,5 : D s'écrit « ajoute 2,5 ; multiplie le résultat par 4 ».