**49 exercices** en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

## 1. Rappels de 1re : dérivées usuelles et opérations

**À retenir :** $(uv)' = u'v + uv'$ ; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ; $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$ ; $(\cos)' = -\sin$ ; une constante additive disparaît. Tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ex. : $(x\sin x)' = \sin x + x\cos x$.

**Ex. 1** ★☆☆ **Automatismes : dérivées des fonctions de référence** — Pour chaque fonction, donne $f'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = 4x^3 - 7x + 11$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{5}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

c. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ est définie sur $[0\,;+\infty[$. Sur quel intervalle est-elle dérivable ? Donne $f'(x)$.

d. $f(x) = -2\cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

e. $f(x) = 6\mathrm{e}^x + \dfrac{x^2}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

f. $f(x) = -\dfrac{8}{x} + \pi$ sur $]-\infty\,;0[$.

**Ex. 2** ★☆☆ **Automatismes : produits et quotients** — Pour chaque fonction, calcule $f'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle indiqué et donne le résultat sous forme simplifiée.

a. $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

c. $f(x) = x^2\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

d. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ sur $]-2\,;+\infty[$.

e. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

f. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ (simplifie d'abord).

**Ex. 3** ★★☆ **Les erreurs de Lina** — Lina a calculé ces dérivées et chaque calcul contient au moins une erreur. Pour chacun, repère l'erreur, explique-la puis corrige le calcul.

a. $g(x) = (x^2+1)(3x-2)$ sur $\mathbb{R}$. Lina écrit : $g'(x) = 2x \times 3 = 6x$.

b. $h(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Lina écrit : $h'(x) = \frac{2(x+3)-1\times(2x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{7}{(2x-1)^2}$.

c. $w(x) = \frac{4}{x} + 5$ sur $]0\,;+\infty[$. Lina écrit : $w'(x) = \frac{4}{x^2} + 5$.

d. $t(x) = 2\cos x - \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Lina écrit : $t'(x) = 2\sin x - \mathrm{e}^x$.

**Ex. 4** ★★☆ **Variations et tangente d'un produit** — Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-3)\,\mathrm{e}^x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

a. Calcule $f'(x)$, puis écris-le comme un produit de trois facteurs.

b. Étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$, avec les extremums locaux en valeur exacte.

c. Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

d. Sam affirme : « $f(0) > f(1)$ ». Vrai ou faux ? Justifie à l'aide des variations de $f$.

**Ex. 5** ★★★ **Coût moyen minimal** — Une entreprise fabrique $q$ centaines d'objets, avec $q \in [0{,}5\,;6]$. Le coût total, en milliers d'euros, est $C(q) = 2q^2 - 5q + 8$. Le coût moyen est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de $C_M$.

a. Pour tout $q$ de $[0{,}5\,;6]$, écris $C_M(q)$ sous la forme $aq + b + \frac{c}{q}$. Explique en quoi cette écriture simplifie la dérivation.

b. Calcule $C_M'(q)$, puis factorise-le pour étudier son signe sur $[0{,}5\,;6]$.

c. Dresse le tableau de variations de $C_M$ sur $[0{,}5\,;6]$. Donne le coût moyen minimal et interprète-le en euros par objet.

d. Léo propose pour la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 : $y = 5(q-1) - 6$. Explique son erreur et donne l'équation correcte.

e. Vrai ou faux : $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2q$. Justifie.

**Ex. 6** ★★★ **Un produit avec une racine** — Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

a. Justifie que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, calcule $f'(x)$ et écris-le comme un seul quotient factorisé.

b. Sami affirme : « $f$ s'annule en 3, donc $f'(x)$ a le signe de $x-3$. » A-t-il raison ? Justifie.

c. Dresse le tableau de variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$ et donne le minimum de $f$.

d. Pour $h > 0$, simplifie $\frac{f(h)-f(0)}{h}$. Ce quotient a-t-il une limite finie quand $h$ tend vers 0 ? Conclus sur la dérivabilité de $f$ en 0.

e. Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

**Ex. 7** ★★★ **Quotient trigonométrique** — Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par $f(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On rappelle que $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

(a) Justifie que $f$ est bien définie et dérivable sur $[0\,;2\pi]$.

(b) Inès écrit : $f'(x)=\frac{-\sin x\,(2+\sin x)-\cos x\times\cos x}{2+\sin x}$. Repère son erreur, puis calcule $f'(x)$ en simplifiant le numérateur.

(c) Résous dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation $2\sin x+1>0$, puis déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;2\pi]$.

(d) Dresse le tableau de variations de $f$ sur $[0\,;2\pi]$ avec les valeurs exactes. Donne le maximum et le minimum de $f$.

(e) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

## 2. *Composer et décomposer deux fonctions*

**À retenir :** $(g\circ u)(x)=g\big(u(x)\big)$ : on remplace la variable de $g$ par $u(x)$ tout entier ; $g$ est le dernier calcul effectué. $u$ et $g$ de même sens : $g\circ u$ croissante ; de sens contraires : décroissante. Attention : $g\circ u\neq u\circ g$.

**Ex. 8** ★☆☆ **Écrire une composée** — Dans chaque cas, exprime la fonction demandée en fonction de $x$.

(a) $u(x)=x-4$ et $g(X)=X^2$ : donne $(g\circ u)(x)$.

(b) $u(x)=x-4$ et $g(X)=X^2$ : donne $(u\circ g)(x)$.

(c) $u(x)=2x+5$ et $g(X)=\frac{1}{X}$ : donne $(g\circ u)(x)$ et précise pour quels $x$ elle existe.

(d) $u(x)=x^3$ et $g(X)=\mathrm{e}^X$ : donne $(g\circ u)(x)$.

(e) $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $g(X)=X^3$ : donne $(g\circ u)(x)$ sous la forme $\mathrm{e}^{\cdots}$.

(f) $u(x)=x+1$ et $g(X)=X^3-2X$ : donne $(g\circ u)(x)$ sous forme développée.

**Ex. 9** ★☆☆ **Décomposer une fonction** — Pour chaque fonction $f$, donne une fonction $u$ et une fonction de référence $g$ telles que $f=g\circ u$.

(a) $f(x)=\mathrm{e}^{2-5x^2}$

(b) $f(x)=(x^2+3x)^5$

(c) $f(x)=\sqrt{4x+7}$ pour $x\geqslant-\frac{7}{4}$

(d) $f(x)=\frac{1}{x^3-8}$ pour $x\neq 2$

(e) $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ pour $x\geqslant 0$

(f) $f(x)=(\mathrm{e}^x+1)^4$

(g) $f(x)=\cos(5x-1)$

**Ex. 10** ★★☆ **Définition et variations : vrai ou faux** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) « La fonction $f:x\mapsto\sqrt{5-x}$ est définie sur $[5\,;+\infty[$. »

(b) « La fonction $h:x\mapsto\frac{1}{x^2-25}$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 5. »

**Ex. 10** (suite)

(c) « La fonction $k:x\mapsto\frac{1}{3-x}$ est croissante sur $]3\,;+\infty[$. »

(d) « La fonction $m:x\mapsto\mathrm{e}^{x^2-4x}$ est croissante sur $]-\infty\,;2]$. »

**Ex. 11** ★★☆ **Composer avec un tableau de valeurs** — Les fonctions $u$ et $g$ sont définies sur $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ par le tableau ci-dessous.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| u(x) | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| g(x) | 2 | 0 | 3 | 4 | 1 |

(a) Calcule $(g\circ u)(2)$, puis $(u\circ g)(2)$. Que constates-tu ?

(b) Calcule $(g\circ u)(x)$ pour $x=0$, $x=1$ et $x=4$.

(c) Léo écrit : « $(u\circ g)(3)=g\big(u(3)\big)=g(1)=0$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) Résous l'équation $(g\circ u)(x)=3$ dans $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

**Ex. 12** ★★★ **Une racine carrée et un trou dans le domaine** — On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$. On note $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2-6x+8$.

(a) Écris $f$ sous la forme $g\circ u$, où $g$ est une fonction de référence. Précise la fonction extérieure.

(b) Factorise $u(x)$, puis détermine l'ensemble de définition $D$ de $f$ à l'aide d'un tableau de signes.

(c) Vérifie que pour tout réel $x$, $u(x)=(x-3)^2-1$. Déduis-en le sens de variation de $u$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Lina affirme : « $u$ est décroissante sur $]-\infty\,;3]$, donc $f$ aussi. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Justifie le sens de variation de $f$ sur $]-\infty\,;2]$ et sur $[4\,;+\infty[$, puis donne le minimum de $f$ sur $D$.

**Ex. 13** ★★★ **Deux fonctions décroissantes, deux ordres** — On considère la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et la fonction $g$ définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $g(X)=\frac{4}{X+1}$.

(a) Exprime $(g\circ u)(x)$ et $(u\circ g)(x)$ en fonction de $x$.

(b) Détermine l'ensemble de définition de $g\circ u$, puis celui de $u\circ g$.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(g\circ u)(x)=2$.

(d) Justifie que $g$ est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$, puis donne le sens de variation de $g\circ u$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Noé affirme : « $u\circ g$ est croissante sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$. » Vrai ou faux ? Justifie.

**Ex. 14** ★★★ **Le carré de l'exponentielle ou l'exponentielle du carré ?** — On considère les fonctions $f$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(\mathrm{e}^x\right)^2$ et $h(x)=\mathrm{e}^{x^2}$. Sami pense que $f$ et $h$ sont égales.

(a) Calcule $f(-1)$ et $h(-1)$ en valeur exacte. Sami a-t-il raison ? Justifie.

**Ex. 14** **(suite)**

(b) On pose $v(x) = x^2$ et $w(x) = \mathrm{e}^x$. Écris $f$ et $h$ comme composées de $v$ et $w$, et précise chaque fonction extérieure.

(c) Justifie le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$, en précisant l'intervalle où la fonction extérieure est monotone.

(d) Justifie le sens de variation de $h$ sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$, puis donne le minimum de $h$.

(e) Montre que pour tout réel $x$, $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, puis résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = h(x)$.

## 3. *Dériver une composée : règle générale et $g(ax+b)$*

**À retenir :** $\big(g(u(x))\big)' = u'(x) \times g'\big(u(x)\big)$ : on dérive l'extérieur en gardant $u(x)$, puis on multiplie par $u'(x)$. Pour $g(ax+b)$, le facteur est $a$ : $((6x+1)^3)' = 18(6x+1)^2$. On ne développe pas avant de dériver, et on factorise le résultat.

**Ex. 15** ★☆☆ **Automatismes : dériver $g(ax+b)$** — Chaque fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donne $f'(x)$ sans développer.

(a) $f(x) = (4x+3)^5$ (b) $f(x) = (7-3x)^4$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{2-5x}$ (d) $f(x) = \cos(3x+2)$

(e) $f(x) = \sin(1-2x)$ (f) $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+4}$

**Ex. 16** ★☆☆ **Automatismes : la règle générale $u' \times (g' \circ u)$** — Chaque fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; $g$ désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Donne $u(x)$, $u'(x)$, puis $f'(x)$ sous forme factorisée.

(a) $f(x) = (x^2+3)^4$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3-x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ (d) $f(x) = g(x^3+1)$

(e) $f(x) = g(9-4x)$ (f) $f(x) = (\mathrm{e}^x+1)^3$

**Ex. 17** ★★☆ **Composée à partir d'un tableau de valeurs** — $u$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f = g \circ u$. On donne :

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| u(x) | 3 | 2 | 0 | 1 |
| u'(x) | −1 | 4 | 2 | −3 |
| g(x) | 1 | 5 | −2 | 0 |
| g'(x) | 2 | −3 | 6 | 1 |

(a) Calcule $f(1)$.

(b) Calcule $f'(1)$.

(c) Lina écrit : $f'(0) = u'(0) \times g'(0) = -2$. A-t-elle raison ? Justifie et corrige si besoin.

(d) Détermine une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 2.

**Ex. 17** **(suite)**

(e) On pose $h = u \circ g$. Calcule $h'(3)$.

**Ex. 18** ★★☆ **Refroidissement d'un thé** — La température (en °C) d'un thé posé sur une table est modélisée par $T(t) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en minutes. $T$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Hugo affirme que $T'(t) = 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. A-t-il raison ? Justifie et donne $T'(t)$.

(b) Déduis-en le sens de variation de $T$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Calcule $T'(0)$ et interprète ce résultat dans le contexte.

(d) Donne l'arrondi au centième de $T'(20)$. Compare-le avec $T'(0)$ et interprète.

**Ex. 19** ★★★ **Étude d'une fonction $\cos(ax+b)$** — Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. On admet que $f$ est dérivable sur $[0\,;\pi]$.

(a) Léa écrit $f'(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ et Tom écrit $f'(x) = -2\sin(x)$. Explique l'erreur de chacun, puis donne $f'(x)$.

(b) Pour $x \in [0\,;\pi]$, encadre $2x - \frac{\pi}{3}$, puis étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

(c) Dresse le tableau de variations de $f$ sur $[0\,;\pi]$ avec les valeurs exactes.

(d) Détermine une équation de la tangente $T$ à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0.

(e) Vrai ou faux : « la tangente au point d'abscisse $\pi$ est parallèle à $T$ ». Justifie.

**Ex. 20** ★★★ **Concentration d'un médicament** — Après une prise orale, la concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est modélisée par $C(t) = 10\left(\mathrm{e}^{-0{,}2t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$, où $t \geqslant 0$ est le temps en heures. $C$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0$.

(a) Calcule $C'(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

(b) Calcule $C'(0)$ et interprète ce nombre dans le contexte.

(c) Résous l'inéquation $C'(t) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$. Donne la solution exacte à l'aide de ln.

(d) Dresse le tableau de variations de $C$ sur $[0\,;+\infty[$.

(e) Montre que la concentration maximale vaut $8\,\mathrm{e}^{-0{,}25\ln 5}$ mg/L. Donne sa valeur à 0,01 près et l'instant où elle est atteinte, à la minute près.

**Ex. 21** ★★★ **Ne pas développer : dériver, factoriser, étudier** — Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3(5-2x)^2$. On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Inès veut développer $f(x)$ avant de dériver. Ben lui conseille plutôt de dériver $x \mapsto (x-1)^3$ et $x \mapsto (5-2x)^2$. Donne ces deux dérivées.

(b) Montre que, pour tout réel $x$, $f'(x) = (x-1)^2(5-2x)(19-10x)$.

**Ex. 21 (suite)**

(c) Dresse le tableau de signes de $f'(x)$ et déduis-en le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Vrai ou faux : « $f'(1) = 0$, donc $f$ admet un extremum en 1 ». Justifie.

(e) Donne la valeur exacte du maximum local de $f$ (fraction irréductible), puis dresse le tableau de variations de $f$ (limites non demandées).

## 4. Dériver $\sqrt{u}$, $u^n$, $1/u$, $e^u$ (et $\ln u$)

**À retenir :** $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ si $u > 0$ ; $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $u \neq 0$ si $n < 0$) ; $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ ; $(e^u)' = u'\,e^u$ ; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ si $u > 0$. Piège : $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, jamais $u\,e^{u-1}$.

**Ex. 22** ★☆☆ **Automatismes : racines, puissances et inverses** — Pour chaque fonction, écris $u(x)$ et $u'(x)$, vérifie la condition, puis calcule la dérivée sur l'intervalle donné.

(a) $f_1(x) = (5x-2)^6$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$ sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ (écris d'abord $f_2$ sous la forme $u^n$).

(c) $f_3(x) = \frac{4}{x^2+5}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f_4(x) = \sqrt{6-2x}$ sur $]-\infty\,;3[$.

(e) $f_5(x) = (x^2-3x)^4$ sur $\mathbb{R}$.

(f) $h(x) = \sqrt{16-x^2}$ : donne l'ensemble de définition de $h$, puis l'ensemble où $h$ est dérivable, et calcule $h'(x)$ sur cet ensemble.

**Ex. 23** ★☆☆ **Automatismes : exponentielles et logarithmes** — Pour chaque fonction, écris $u(x)$ et $u'(x)$, puis calcule la dérivée sur l'intervalle donné.

(a) $g_1(x) = 3e^{2x} + 1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $g_2(x) = e^{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $g_3(x) = e^{\frac{4}{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $g_4(x) = \sqrt{e^x}$ sur $\mathbb{R}$ (utilise la formule de $\sqrt{u}$).

(e) $g_5(x) = \ln(x^2+4)$ sur $\mathbb{R}$.

(f) $g_6(x) = \ln(3x-1)$ sur $]\frac{1}{3}\,;+\infty[$.

**Ex. 24** ★★☆ **Erreurs de copies à corriger** — Ben a relevé quatre calculs faux dans des copies. Pour chacun, explique l'erreur, puis donne le bon résultat.

(a) Lina : $f(x) = e^{x^2+1}$, donc $f'(x) = (x^2+1)\,e^{x^2}$.

(b) Tom : $g(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$ sur $\mathbb{R}$, donc $g'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$.

(c) Inès : $k(x) = \ln(5x)$ sur $]0\,;+\infty[$, donc $k'(x) = \frac{1}{\ln(5x)}$.

(d) Hugo : $m(x) = e^{-3x}$, donc $m'(x) = e^{-3x} > 0$ et $m$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**Ex. 25** ★★☆ **Concentration d'un médicament** — La concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) $t$ heures après la prise est $C(t) = 8t\,e^{-\frac{t}{2}}$ pour $t \in [0\,;10]$.

(a) Calcule $C'(t)$, puis factorise-le par $e^{-\frac{t}{2}}$.

(b) Étudie le signe de $C'(t)$ sur $[0\,;10]$.

(c) Dresse le tableau de variations de $C$. Donne l'instant où la concentration est maximale et cette concentration en valeur exacte, puis arrondie à 0,01.

(d) Calcule $C'(4)$ en valeur exacte et arrondie à 0,01, puis interprète ce nombre.

**Ex. 26** ★★★ **Une racine dérivable… presque partout** — Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2-9}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

(a) Détermine l'ensemble de définition de $f$. Justifie ensuite que $f$ est dérivable sur $]3\,;+\infty[$, puis calcule $f'(x)$.

(b) Montre que pour $h > 0$, $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \sqrt{\frac{6}{h}+1}$. On admet que ce quotient tend vers $+\infty$ quand $h$ tend vers 0. Que peux-tu en conclure ?

(c) Déduis-en le sens de variation de $f$ sur $]3\,;+\infty[$. Donne ensuite une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 5.

(d) On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ sur $]3\,;+\infty[$. Sam écrit $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$. A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $g'(x)$.

(e) On donne : $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers 3, et vers 0 en $+\infty$. Dresse le tableau de variations de $g$ sur $]3\,;+\infty[$.

**Ex. 27** ★★★ **La dérivée seconde au secours du signe de $f'$** — Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 2x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

(a) Nora écrit $f'(x) = e^{2x} - 4e^x + 2$. Explique son erreur, puis calcule $f'(x)$ pour tout réel $x$.

(b) Calcule $f''(x)$, factorise-le par $e^x$, puis étudie son signe sur $\mathbb{R}$.

(c) Dresse le tableau de variations de $f'$ sur $\mathbb{R}$, en y indiquant la valeur exacte de $f'(0)$.

(d) Déduis-en le signe de $f'(x)$ pour tout réel $x$, puis le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Donne une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Que remarques-tu ?

**Ex. 28** ★★★ **Croissance d'une culture de bactéries** — Une culture compte $N(t)$ bactéries $t$ heures après le début de l'observation, avec $N(t) = \frac{10\,000}{1+9e^{-0{,}5t}}$ pour $t \in [0\,;+\infty[$.

(a) Écris $N(t) = 10\,000 \times (u(t))^{-1}$ en donnant $u(t)$ et $u'(t)$. Justifie que $N$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, puis calcule $N'(t)$.

(b) Étudie le signe de $N'(t)$, puis le sens de variation de $N$ sur $[0\,;+\infty[$. Interprète ce résultat dans le contexte.

**Ex. 28** **(suite)**

(c) Calcule $N(0)$ et $N'(0)$, puis donne une équation de la tangente à la courbe de $N$ au point d'abscisse 0. Interprète $N'(0)$.

(d) On pose $L(t) = \ln(N(t))$. Maël écrit $L'(t) = \frac{1}{N(t)}$. Explique son erreur, puis montre que $L'(t) = \frac{4{,}5}{e^{0{,}5t}+9}$.

(e) $L'(t)$ est le taux de croissance relatif de la culture. Calcule $L'(0)$, puis étudie le sens de variation de $L'$ sur $[0\,;+\infty[$. Interprète.

## 5. *Dérivée seconde*

**À retenir :** $f'' = (f')'$ : je dérive $f'$, souvent un produit. Signe de $f'' \to$ variations de $f' \to$ signe de $f' \to$ variations de $f$. $f'' > 0$ veut dire « $f'$ croissante », pas « $f$ croissante ». Ex. : $(e^{-x^2})'' = (4x^2-2)e^{-x^2}$.

**Ex. 29** ★☆☆ **Calculer des dérivées secondes** — Pour chaque fonction, dérivable deux fois sur l'intervalle indiqué, calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$.

(a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = (3x+2)^5$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = e^{x^2+x}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

(f) On donne $f'(x) = (x+1)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ : calcule seulement $f''(x)$.

**Ex. 30** ★☆☆ **Ce que dit (ou ne dit pas) $f''$** — Dans chaque cas, $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Vrai ou faux ? Justifie.

(a) Si $f''(x) > 0$ pour tout réel $x$, alors $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour $f(x) = x^3$, on a $f''(x) = \big(f'(x)\big)^2 = 9x^4$.

(c) Pour $f(x) = x^3 - 6x^2$, on a $f''(2) = 0$, donc $f$ admet un extremum en 2.

(d) Si $f''(x) < 0$ pour tout réel $x$ et $f'(0) = 0$, alors $f$ admet un maximum en 0.

(e) Pour $f(x) = e^{3x}$, on a $f''(x) = 9e^{3x}$.

**Ex. 31** ★★☆ **Le signe de $f'$ grâce à $f''$** — Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2x^2$. On admet que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Calcule $f'(x)$ pour tout réel $x$. Son signe se lit-il directement ? Justifie.

(b) Calcule $f''(x)$ et étudie son signe selon les valeurs de $x$.

(c) Dresse le tableau de variations de $f'$ et donne la valeur exacte de son minimum.

**Ex. 31** **(suite)**

(d) Déduis-en le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Ex. 32** ★★☆ **Un ressort qui oscille** — L'extrémité d'un ressort a pour position $x(t) = 3\cos(2t)$ (en cm, $t$ en s, $t \geqslant 0$). Sa vitesse est $v(t) = x'(t)$ et son accélération est $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

(a) Calcule la vitesse $v(t)$.

(b) Calcule l'accélération $a(t)$, puis exprime-la en fonction de $x(t)$.

(c) Calcule $x(0)$, $v(0)$ et $a(0)$. Le ressort reste-t-il immobile après $t = 0$ ? Justifie.

(d) Tom affirme : « À $t = \frac{\pi}{4}$, l'accélération est nulle, donc le ressort est immobile. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Étudie le signe de $a(t)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Déduis-en les variations de $v$ et sa valeur minimale sur cet intervalle.

**Ex. 33** ★★★ **Étudier une fonction avec un logarithme grâce à $f''$** — Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - \frac{x^2}{2} + 3$. On admet que $f$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

(a) Calcule $f'(x)$ pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$, puis $f''(x)$.

(b) Étudie le signe de $f''(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, puis dresse le tableau de variations de $f'$ (sans les limites).

(c) Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, puis le sens de variation de $f$.

(d) Donne une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 1.

(e) Lina affirme : « $f''(1) = 0$, donc $f$ admet un extremum en 1. » A-t-elle raison ? Justifie.

**Ex. 34** ★★★ **La pente la plus forte d'une courbe en cloche** — Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x^2}$. On admet que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Calcule $f'(x)$ pour tout réel $x$.

(b) Noé dérive $f'(x)$ et obtient $f''(x) = 16x^2e^{-2x^2}$. Explique son erreur, puis calcule $f''(x)$ sous forme factorisée.

(c) Étudie le signe de $f''(x)$, puis dresse le tableau de variations de $f'$ sur $\mathbb{R}$ (sans les limites).

(d) Déduis-en l'abscisse du point de la courbe de $f$ où la tangente a le plus grand coefficient directeur. Justifie.

(e) Donne une équation de cette tangente, en valeurs exactes.

**Ex. 35** ★★★ **Élimination d'un médicament** — La concentration d'un médicament dans le sang est modélisée par $C(t) = \frac{4t}{t^2+1}$ (en mg/L, $t$ en heures, $t \geqslant 0$). La vitesse d'évolution de la concentration est $C'(t)$. On admet que $C$ est deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Calcule $C'(t)$, puis dresse le tableau de variations de $C$ sur $[0\,;+\infty[$ (sans la limite).

(b) Calcule $C''(t)$ et donne-le sous forme factorisée.

(c) Étudie le signe de $C''(t)$, puis dresse le tableau de variations de $C'$ sur $[0\,;+\infty[$ (sans la limite).

(d) À quel instant la concentration baisse-t-elle le plus vite ? Donne cette vitesse et l'instant à la minute près.

(e) Inès lit le tableau de variations de $C'$ et affirme : « La concentration finit par remonter. » A-t-elle raison ? Justifie.

## 6. *Étudier une fonction composée*

**À retenir :** $\mathrm{e}^u$ et $\sqrt{u}$ varient comme $u$. $\frac{1}{u}$ varie en sens contraire là où $u > 0$. Dans $f'(x)$, écarte en le disant les facteurs positifs, puis étudie le signe du reste. Le maximum de $\mathrm{e}^u$ est $\mathrm{e}^M$, pas $M$ : $\mathrm{e}^{1-x^2}$ a pour maximum $\mathrm{e}^1$, et non 1.

**Ex. 36** ★☆☆ **Écarter le facteur de signe connu** — Chaque fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$ sous forme factorisée. Nomme le facteur de signe connu que tu écartes. Donne ensuite l'intervalle sur lequel $f$ est croissante.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-6x}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$ (le discriminant du trinôme est négatif)

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

(d) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$

(e) $f(x) = \ln(x^2+1)$

**Ex. 37** ★☆☆ **Variations d'une composée sans dériver** — Sans dériver, écris $f$ sous la forme $g \circ u$, avec $g$ et $u$ monotones. Déduis-en le sens de variation de $f$ sur l'intervalle $I$.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \sqrt{5-2x}$ sur $I = \left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ sur $I = ]0\,;+\infty[$

(d) $f(x) = (\mathrm{e}^x+1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \ln(4-x)$ sur $I = ]-\infty\,;4[$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $I = ]0\,;+\infty[$

**Ex. 38** ★★☆ **Le maximum d'une exponentielle** — Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+2x+3}$. On admet que $f(x)$ tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.

(a) Justifie que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$ sous forme factorisée.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ en précisant le facteur que tu écartes. Dresse ensuite le tableau de variations de $f$, avec les limites.

(c) Lina affirme : « le maximum de $f$ vaut 4 ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Lis dans le tableau le nombre de solutions de $f(x) = 1$. Vérifie ensuite en résolvant l'équation.

**Ex. 39** ★★☆ **Racine d'un trinôme : domaine, variations, tangente** — Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+4x+5}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

(a) Étudie le signe de $-x^2+4x+5$. Donne l'ensemble de définition de $f$, puis l'intervalle ouvert sur lequel $f$ est dérivable.

(b) Pour tout $x$ de cet intervalle ouvert, calcule $f'(x)$ et simplifie.

(c) Dresse le tableau de variations de $f$. Calcule les valeurs exactes aux bornes et le maximum.

(d) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

**Ex. 40** ★★★ **Logarithme d'un trinôme : domaine, maximum, solutions** — Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(6x-x^2)$. On admet que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers les bornes de son ensemble de définition. On donne $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$ et $\mathrm{e}^3 \approx 20{,}09$. Donne les résultats en valeur exacte.

(a) Étudie le signe de $6x-x^2$ sur $\mathbb{R}$. Déduis-en l'ensemble de définition de $f$, puis justifie que $f$ est dérivable sur cet ensemble.

(b) Calcule $f'(x)$. Étudie son signe en disant quel facteur tu écartes, puis dresse le tableau de variations de $f$.

(c) Montre que $f(6-x) = f(x)$ pour tout $x$ de $]0\,;6[$. Explique ce que cela traduit dans le tableau de variations.

(d) Sans résoudre, détermine le nombre de solutions de $f(x) = 2$ puis celui de $f(x) = 3$ sur l'ensemble de définition de $f$.

(e) Détermine une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 1.

**Ex. 41** ★★★ **Dérivée seconde : du signe de f″ au signe de f′** — Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - x^2 - x$. On admet que $f(x)$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

(a) Justifie que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour tout réel $x$.

(b) Étudie le signe de $f''(x)$. Dresse le tableau de variations de $f'$ en précisant la valeur de $f'(0)$.

**Ex. 41 (suite)**

(c) Déduis-en le signe de $f'(x)$ pour tout réel $x$, puis dresse le tableau de variations de $f$.

(d) Tom affirme : « $f''(0) = 0$, donc $f$ admet un extremum en 0. » A-t-il raison ? Justifie, puis donne une équation de la tangente à la courbe de $f$ en 0.

(e) Lis dans le tableau le nombre de solutions de $f(x) = 0$. Calcule $f(-2)$ et $f(-1)$, puis encadre chaque solution entre deux entiers.

**Ex. 42** ★★★ **Modèle : le débit d'une rivière en crue** — Pendant une crue, le débit d'une rivière, en $\text{m}^3/\text{s}$, est modélisé par $D(t) = 20\,\text{e}^{0{,}5t - 0{,}05t^2}$, où $t$ est le temps en jours, $t \in [0\,;10]$.

(a) Écris $D(t) = 20 \times g(u(t))$ en précisant $g$ et $u$. Sans dériver, justifie le sens de variation de $D$ sur $[0\,;5]$ puis sur $[5\,;10]$.

(b) Ilyes calcule $u(5) = 1{,}25$ et conclut : « le débit maximal vaut $20 \times 1{,}25 = 25\ \text{m}^3/\text{s}$ ». A-t-il raison ? Donne le débit maximal exact, puis arrondi à l'unité.

(c) Calcule $D(0)$ et $D(10)$, puis dresse le tableau de variations de $D$ sur $[0\,;10]$.

(d) L'alerte crue dure tant que le débit dépasse $50\ \text{m}^3/\text{s}$. Résous $D(t) \geqslant 50$ sur $[0\,;10]$, puis donne la durée de l'alerte au dixième de jour.

(e) Calcule $D'(t)$ sous forme factorisée. Donne une équation de la tangente à la courbe de $D$ au point d'abscisse 0, puis interprète $D'(0)$.

## 7. *Problèmes type bac*

**À retenir :** Étude de $f = g \circ u$ : intervalle, $f'(x)$ factorisée, j'écarte $\text{e}^u > 0$, $2\sqrt{u} > 0$ et les carrés, puis j'étudie le signe du reste. Piège : $\text{e}^{1-x^2}$ atteint son maximum en 0, mais ce maximum vaut $\text{e}^1$, pas 1.

**Ex. 43** ★☆☆ **Automatismes : extremum d'une composée** — Chaque fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Utilise les variations de la fonction $u$ intérieure. Donne l'abscisse de l'extremum, sa nature (maximum ou minimum) et sa valeur exacte.

(a) $f(x) = \text{e}^{4x - x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$

(d) $f(x) = \text{e}^{x^2 - 2x + 3}$

(e) $f(x) = (x^2 - 4x + 7)^3$

(f) $f(x) = \ln(x^2 + 8x + 20)$

**Ex. 44** ★☆☆ **Automatismes : tangentes** — On rappelle que la tangente au point d'abscisse $a$ a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Donne les réponses en valeurs exactes.

(a) Équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \text{e}^{2x-4}$ au point d'abscisse 2.

(b) Équation de la tangente à la courbe de $f(x) = (x^2 - 3)^3$ au point d'abscisse 1.

(c) Équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ au point d'abscisse 1.

(d) Équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \ln(3x - 2)$, définie sur $]\frac{2}{3}\,;+\infty[$, au point d'abscisse 1.

(e) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ : en quel point la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$ ?

(f) $f(x) = \text{e}^{3x-1}$ : en quel point la tangente passe-t-elle par l'origine $O$ du repère ? Donne son équation.

**Ex. 45** ★★☆ **Concentration d'un antibiotique** — On injecte un antibiotique à un patient. La concentration dans le sang, en mg/L, $t$ heures après l'injection, est $C(t) = 8t\,\text{e}^{-0{,}5t}$ pour $t \in [0\,;10]$.

(a) Montre que, pour tout réel $t$ de $[0\,;10]$, $C'(t) = 4(2 - t)\,\text{e}^{-0{,}5t}$.

(b) Étudie le signe de $C'(t)$, puis dresse le tableau de variations de $C$ sur $[0\,;10]$.

(c) Détermine l'instant où la concentration est maximale. Donne la concentration maximale en valeur exacte, puis arrondie à 0,01 mg/L.

(d) Calcule $C'(0)$ et interprète ce résultat dans le contexte, avec son unité.

**Ex. 46** ★★☆ **Fonction auxiliaire et signe de f'** — Pour tout réel $x$, on pose $g(x) = \text{e}^{2x} - 2x - 1$ et $f(x) = \frac{1}{2}\text{e}^{2x} - x^2 - x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de $f$.

(a) Calcule $g'(x)$ et étudie son signe sur $\mathbb{R}$.

(b) Dresse le tableau de variations de $g$, puis déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout réel $x$.

(c) Calcule $f'(x)$ et exprime-le à l'aide de $g(x)$.

(d) Déduis-en le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Donne une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0. Léa dit : « si $f$ est strictement croissante, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

**Ex. 47** ★★★ **Une famille de fonctions et un paramètre** — Soit $k$ un réel strictement positif. Pour tout réel $x$, on pose $f_k(x) = (2x + 1)\,\text{e}^{-kx}$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de $f_k$ et $A(3\,;-2)$.

(a) Montre que, pour tout réel $x$, $f_k'(x) = (2 - k - 2kx)\,\text{e}^{-kx}$.

**Ex. 47** **(suite)**

(b) Dresse le tableau de variations de $f_k$ sur $\mathbb{R}$ (sans les limites). Calcule son maximum en valeur exacte, en fonction de $k$.

(c) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0. Déduis-en la valeur de $k$ pour laquelle elle passe par $A$.

(d) Pour cette valeur de $k$, donne le maximum de $f_k$ en valeur exacte, puis arrondi à $10^{-2}$.

**Ex. 48** ★★★ **Dérivée seconde et tangente parallèle** — Pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1} - \ln x$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de $f$ et $D$ la droite d'équation $y = (2\mathrm{e}-1)x + 4$.

(a) Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$.

(b) Déduis-en les variations de $f'$ sur $]0\,;+\infty[$. Calcule $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et donne le signe de $f'(x)$.

(c) Dresse le tableau de variations de $f$. Donne son minimum en valeur exacte, puis arrondi à $10^{-2}$.

(d) Montre que $\mathcal{C}$ admet une seule tangente parallèle à $D$ et donnes-en une équation réduite.

**Ex. 49** ★★★ **Le point de la piste le plus proche du refuge** — Dans un repère orthonormé d'unité 1 km, une piste cyclable suit la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$. Le refuge de Noé est au point $R(2\,;0)$. Pour $x \geqslant 0$, on note $M(x\,;\sqrt{x})$ un point de la piste et $d(x) = RM$.

(a) Montre que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $d(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

(b) Justifie que $d$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, puis calcule $d'(x)$.

(c) Dresse le tableau de variations de $d$ sur $[0\,;+\infty[$. Donne les coordonnées exactes du point $M_0$ de la piste le plus proche du refuge.

(d) Inès affirme : « la distance minimale vaut $\frac{7}{4}$ km ». A-t-elle raison ? Justifie, puis donne cette distance au mètre près.