1. Rappels de 1re : dérivées usuelles et opérations

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : dérivées des fonctions de référence**

(a) $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 7 = 12x^2 - 7$ (la constante 11 disparaît).

(b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2}$.

(c) $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 : f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

(d) $(\cos)' = -\sin$ et $(\sin)' = \cos$: $f'(x) = -2 \times (-\sin x) + \cos x = 2\sin x + \cos x$.

(e) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = 6\mathrm{e}^x + \frac{2x}{4} = 6\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}$.

(f) $f'(x) = -8 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 = \frac{8}{x^2}$ (π est une constante).

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : produits et quotients**

(a) $u = x$, $v = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$.

(b) $u = 2x+1$, $v = \sqrt{x}$: $f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$.

(c) $u = x^2$, $v = \cos x$: $f'(x) = 2x\cos x + x^2 \times (-\sin x) = 2x\cos x - x^2\sin x$.

(d) $u = 3x-1$, $v = x+2$: $f'(x) = \frac{3(x+2) - 1\times(3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$.

(e) $u = \mathrm{e}^x$, $v = x$: $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$.

(f) Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x(x-4)}{x} = x - 4$, donc $f'(x) = 1$. Aucune formule du quotient n'est nécessaire.

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) Lina a multiplié les dérivées : $(uv)' \neq u'v'$. Avec $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient $g'(x) = 2x(3x-2) + 3(x^2+1) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$.

(b) L'ordre est inversé : c'est $u'v - uv'$ et non $uv' - u'v$. Le bon calcul : $h'(x) = \frac{1\times(2x-1) - (x+3)\times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}$. Le signe change complètement !

(c) Deux erreurs : $\left(\frac{4}{x}\right)' = -\frac{4}{x^2}$ (signe $-$ oublié) et la constante 5 a pour dérivée 0. Donc $w'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

(d) $(\cos)' = -\sin$: le signe $-$ a été oublié. Donc $t'(x) = 2 \times (-\sin x) - \mathrm{e}^x = -2\sin x - \mathrm{e}^x$.

Ex. 4 ★★★ **Variations et tangente d'un produit**

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $u = x^2 - 3$ et $v = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (x^2-3)\mathrm{e}^x = (x^2+2x-3)\mathrm{e}^x$. Comme $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, on a $f'(x) = (x+3)(x-1)\mathrm{e}^x$.

(b) $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $(x+3)(x-1)$, trinôme positif à l'extérieur des racines -3 et 1. $f(-3) = 6\mathrm{e}^{-3}$ et $f(1) = -2\mathrm{e}$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	$6\mathrm{e}^{-3}$	↘	$-2\mathrm{e}$	↗	

f admet un maximum local $6\mathrm{e}^{-3}$ en -3 et un minimum local $-2\mathrm{e}$ en 1.

(c) $f(2) = (4-3)\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2$ et $f'(2) = 5 \times 1 \times \mathrm{e}^2 = 5\mathrm{e}^2$. Donc $y = 5\mathrm{e}^2(x-2) + \mathrm{e}^2$, soit $y = 5\mathrm{e}^2 x - 9\mathrm{e}^2$.

(d) Vrai : f est strictement décroissante sur $[-3\,;1]$ et $0 < 1$, donc $f(0) > f(1)$. On le vérifie : $f(0) = -3 > -2\mathrm{e} \approx -5{,}44$.

Ex. 5 ★★★ **Coût moyen minimal**

(a) On divise chaque terme par $q \neq 0$: $C_M(q) = \frac{2q^2}{q} - \frac{5q}{q} + \frac{8}{q} = 2q - 5 + \frac{8}{q}$. Il n'y a plus de quotient à dériver, seulement des fonctions de référence : on évite la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$ et les erreurs qu'elle peut entraîner.

(b) C_M est dérivable sur $[0{,}5\,;6]$. La constante -5 disparaît et $\left(\frac{8}{q}\right)' = -\frac{8}{q^2}$.
Donc $C'_M(q) = 2 - \frac{8}{q^2} = \frac{2q^2-8}{q^2} = \frac{2(q-2)(q+2)}{q^2}$. Sur $[0{,}5\,;6]$, $q^2 > 0$ et $q + 2 > 0$: $C'_M(q)$ a le signe de $q - 2$. Il est négatif sur $[0{,}5\,;2[$, nul en 2 et positif sur $]2\,;6]$.

(c) $C_M(0{,}5) = 1 - 5 + 16 = 12$, $C_M(2) = 4 - 5 + 4 = 3$, $C_M(6) = 12 - 5 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$.

q	0{,}5		2		6
C_M'(q)		−	0	+	
C_M(q)	12	↘	3	↗	$\frac{25}{3}$

Le coût moyen minimal vaut 3 milliers d'euros par centaine d'objets. Il est atteint pour 200 objets et correspond à 30 € par objet.

(d) Léo a interverti $C_M(1)$ et $C'_M(1)$. Ici, $C_M(1) = 2 - 5 + 8 = 5$ et $C'_M(1) = 2 - 8 = -6$. Avec $y = C'_M(1)(q-1) + C_M(1)$, on obtient $y = -6(q-1) + 5$, soit $y = -6q + 11$.

Ex. 5 **(suite)**

(e) Faux. Une tangente parallèle à cette droite aurait pour coefficient directeur 2, il faudrait donc $C'_M(q) = 2$. Or $C'_M(q) = 2 - \frac{8}{q^2}$ et $\frac{8}{q^2} > 0$, donc $C'_M(q) < 2$ pour tout q de $[0{,}5\,;6]$. Aucune tangente n'est parallèle à cette droite.

Ex. 6 ★★★ **Un produit avec une racine**

(a) $x \mapsto x-3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ l'est sur $]0\,;+\infty[$: f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit. Avec $u(x) = x-3$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

(b) Non. Les zéros de f ne donnent pas le signe de f'. D'après la question précédente, $f'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$ avec $2\sqrt{x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x-1$. Contre-exemple : $f'(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 0$ alors que $2-3 < 0$.

(c) Pour tout $x > 0$, $2\sqrt{x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x-1$: $f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$. $f(0) = 0$ et $f(1) = -2$.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	
f(x)	0	↘	−2	↗	

f est décroissante sur $[0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$. Son minimum est -2, atteint en $x = 1$.

(d) Pour $h > 0$: $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{(h-3)\sqrt{h}}{h} = \frac{h-3}{\sqrt{h}}$. Quand h tend vers 0, le numérateur tend vers -3 et $\sqrt{h}$ tend vers 0 par valeurs positives. Le quotient tend donc vers $-\infty$: il n'a pas de limite finie. f n'est pas dérivable en 0 (la courbe y a une tangente verticale).

(e) $f(4) = (4-3)\times\sqrt{4} = 2$ et $f'(4) = \frac{3\times3}{2\times2} = \frac{9}{4}$. On applique $y = f'(4)(x-4) + f(4)$: $y = \frac{9}{4}(x-4) + 2$, soit $y = \frac{9}{4}x - 7$.

Ex. 7 ★★★ **Quotient trigonométrique**

(a) Pour tout réel x, $\sin x \geqslant -1$, donc $2 + \sin x \geqslant 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais et f est définie sur $[0\,;2\pi]$. Les fonctions cos et $x \mapsto 2 + \sin x$ sont dérivables, et la seconde ne s'annule pas : f est dérivable sur $[0\,;2\pi]$ comme quotient.

(b) Avec $u = \cos$, $u'(x) = -\sin x$, $v(x) = 2 + \sin x$ et $v'(x) = \cos x$ (la constante 2 disparaît), le numérateur $u'v - uv'$ d'Inès est juste. Mais elle a oublié le carré : le dénominateur est $v^2 = (2+\sin x)^2$. Correction : $f'(x) = \frac{-2\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2+\sin x)^2} = -\frac{2\sin x + 1}{(2+\sin x)^2}$.

Ex. 7 **(suite)**

(c) $2\sin x + 1 > 0 \iff \sin x > -\frac{1}{2}$. Sur $[0\,;2\pi]$, $\sin x = -\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$. Les solutions sont donc $x \in \left[0\,;\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}\,;2\pi\right]$. Comme $(2+\sin x)^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-(2\sin x + 1)$: $f'(x) < 0$ sur ces deux intervalles, $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{7\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\right[$ et $f'(x) = 0$ en $\frac{7\pi}{6}$ et en $\frac{11\pi}{6}$.

(d) $f(0) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $f(2\pi) = \frac{1}{2}$.

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	$\frac{1}{2}$

Comme $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577 > \frac{1}{2}$, le maximum de f est $\frac{\sqrt{3}}{3}$, atteint en $\frac{11\pi}{6}$. Le minimum est $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, atteint en $\frac{7\pi}{6}$.

(e) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{3} = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2+1}{3^2} = -\frac{1}{3}$. On applique $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $y = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, soit $y = -\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}$.

2. *Composer et décomposer deux fonctions*

Ex. 8 ★☆☆ **Écrire une composée**

(a) On remplace X par $x-4$ tout entier : $(g \circ u)(x) = (x-4)^2$. Ce n'est pas $x^2 - 4$.

(b) On applique d'abord g, puis u : $(u \circ g)(x) = u(x^2) = x^2 - 4$. On a bien $g \circ u \neq u \circ g$.

(c) $(g \circ u)(x) = \frac{1}{2x+5}$. Elle existe lorsque $2x + 5 \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq -\frac{5}{2}$.

(d) $(g \circ u)(x) = g(x^3) = \mathrm{e}^{x^3}$.

(e) $(g \circ u)(x) = (\mathrm{e}^x)^3 = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{3x}$. Ce n'est pas e^{x^3} (compare avec la question précédente).

(f) $(g \circ u)(x) = (x+1)^3 - 2(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x - 2 = x^3 + 3x^2 + x - 1$.

Ex. 9 ★☆☆ **Décomposer une fonction**

(a) Le dernier calcul effectué est l'exponentielle : $u(x) = 2 - 5x^2$ et $g(X) = \mathrm{e}^X$.

(b) Le dernier calcul effectué est la puissance 5 : $u(x) = x^2 + 3x$ et $g(X) = X^5$.

(c) Le dernier calcul effectué est la racine : $u(x) = 4x + 7$ et $g(X) = \sqrt{X}$.

(d) Le dernier calcul effectué est l'inverse : $u(x) = x^3 - 8$ et $g(X) = \frac{1}{X}$.

Ex. 9 **(suite)**

(e) On calcule d'abord $\sqrt{x}$, puis son exponentielle : $u(x) = \sqrt{x}$ et $g(X) = \mathrm{e}^X$.

(f) On calcule d'abord $\mathrm{e}^x + 1$, puis on élève à la puissance 4 : $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et $g(X) = X^4$. La fonction extérieure n'est pas l'exponentielle.

(g) Le dernier calcul effectué est le cosinus : $u(x) = 5x - 1$ et $g(X) = \cos X$.

Ex. 10 ★★☆ **Définition et variations : vrai ou faux**

(a) Faux. $f(x)$ existe si et seulement si $5 - x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 5$. Par exemple, $f(6) = \sqrt{-1}$ n'existe pas. f est définie sur $]-\infty\,;5]$.

(b) Faux. Il faut $x^2 - 25 \neq 0$, donc $x \neq 5$ et $x \neq -5$. h est définie sur $\mathbb{R}$ privé de -5 et de 5.

(c) Vrai. $k = g \circ u$ avec $u(x) = 3 - x$, décroissante sur $]3\,;+\infty[$, à valeurs dans $]-\infty\,;0[$. La fonction $g(X) = \frac{1}{X}$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$. Deux fonctions décroissantes : k est croissante sur $]3\,;+\infty[$.

(d) Faux. $m = \exp \circ u$ avec $u(x) = x^2 - 4x$. u est un polynôme du second degré de sommet d'abscisse 2, décroissant sur $]-\infty\,;2]$. Comme exp est croissante, les sens sont contraires : m est décroissante sur $]-\infty\,;2]$.

Ex. 11 ★★☆ **Composer avec un tableau de valeurs**

(a) $(g \circ u)(2) = g\big(u(2)\big) = g(0) = 2$ et $(u \circ g)(2) = u\big(g(2)\big) = u(3) = 1$. Les deux résultats sont différents : $g \circ u \neq u \circ g$.

(b) $(g \circ u)(0) = g\big(u(0)\big) = g(3) = 4$; $(g \circ u)(1) = g(4) = 1$; $(g \circ u)(4) = g(2) = 3$.

(c) Non. Dans $u \circ g$, on applique d'abord g, puis u : $(u \circ g)(3) = u\big(g(3)\big) = u(4) = 2$. Léo a calculé $(g \circ u)(3)$.

(d) D'après les questions précédentes, $(g \circ u)(3) = g(1) = 0$ étant le calcul de Léo, qui est juste pour $g \circ u$, les valeurs de $(g \circ u)(x)$ pour $x = 0, 1, 2, 3, 4$ sont 4, 1, 2, 0, 3. L'équation a donc une seule solution : $x = 4$.

Ex. 12 ★★★ **Une racine carrée et un trou dans le domaine**

(a) Pour calculer $f(x)$, on calcule d'abord $x^2 - 6x + 8$, puis on prend sa racine carrée.
Donc $f = g \circ u$ avec $u(x) = x^2 - 6x + 8$ (fonction intérieure) et $g(X) = \sqrt{X}$ (fonction extérieure).

Ex. 12 **(suite)**

(b) $u(x) = (x-2)(x-4)$, de racines 2 et 4. Un trinôme est du signe de $a = 1$ à l'extérieur de ses racines :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
u(x)		+	0	−	0	+	

$f(x)$ existe si et seulement si $u(x) \geqslant 0$, donc $D =]-\infty\,;2] \cup [4\,;+\infty[$.

(c) $(x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 - 1 = x^2 - 6x + 8 = u(x)$. La fonction $x \mapsto (x-3)^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.
Donc u est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$, avec un minimum $u(3) = -1$.

(d) Non. $u(2{,}5) = (2{,}5-3)^2 - 1 = -0{,}75 < 0$, donc $f(2{,}5)$ n'existe pas : f n'est pas définie sur $]2\,;3]$. La règle ne s'applique que sur un intervalle où u prend ses valeurs dans $[0\,;+\infty[$, où g est définie et croissante. Dans $]-\infty\,;3]$, seul $]-\infty\,;2]$ convient.

(e) Sur $]-\infty\,;2]$, u est décroissante et $u(x) \geqslant 0$. Or $g = \sqrt{\ }$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Les sens sont contraires, donc f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$. Sur $[4\,;+\infty[$, u est croissante et $u(x) \geqslant 0$. Même sens, donc f est croissante sur $[4\,;+\infty[$. Comme $f(2) = f(4) = \sqrt{0} = 0$ et $f(x) \geqslant 0$, le minimum de f sur D vaut 0, atteint en 2 et en 4.

Ex. 13 ★★★ **Deux fonctions décroissantes, deux ordres**

(a) On remplace la variable de g par $u(x)$ tout entier : $(g \circ u)(x) = g(\mathrm{e}^{-x}) = \frac{4}{\mathrm{e}^{-x}+1}$. On remplace la variable de u par $g(x)$ tout entier : $(u \circ g)(x) = \mathrm{e}^{-\frac{4}{x+1}}$.

(b) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $\mathrm{e}^{-x} + 1 > 1$ ne s'annule jamais : $g \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$. Comme u est définie sur $\mathbb{R}$, $u \circ g$ est définie là où g l'est, donc sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.

(c) $(g \circ u)(x) = 2 \iff \frac{4}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 2 \iff \mathrm{e}^{-x} + 1 = 2 \iff \mathrm{e}^{-x} = 1 \iff x = 0$. L'équation a une seule solution : 0.

(d) $X \mapsto X + 1$ est croissante sur $]-1\,;+\infty[$ et prend ses valeurs dans $]0\,;+\infty[$, où $X \mapsto \frac{4}{X}$ est décroissante. Les sens sont contraires, donc g est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$. Ensuite, u est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $u(x) > 0$, donc $u(x) \in]-1\,;+\infty[$, où g est décroissante. Deux fonctions décroissantes ont le même sens, donc $g \circ u$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13 **(suite)**

(e) Faux. g est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$, et u est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc $u\circ g$ est croissante sur chacun de ces intervalles, mais pas sur leur réunion : $(u\circ g)(-3)=\mathrm{e}^{-\frac{4}{-2}}=\mathrm{e}^{2}$ et $(u\circ g)(0)=\mathrm{e}^{-4}$. On a $-3<0$, mais $\mathrm{e}^{2}>\mathrm{e}^{-4}$.

Ex. 14 ★★★ **Le carré de l'exponentielle ou l'exponentielle du carré ?**

(a) $f(-1)=\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{2}=\mathrm{e}^{-2}$ et $h(-1)=\mathrm{e}^{(-1)^{2}}=\mathrm{e}^{1}=\mathrm{e}$. Comme $\mathrm{e}^{-2}\neq\mathrm{e}$, les fonctions f et h ne sont pas égales : Sami a tort.

(b) Pour $f(x)$, on calcule d'abord e^{x}, puis on élève au carré : $f=v\circ w$, de fonction extérieure v. Pour $h(x)$, on calcule d'abord x^{2}, puis on prend l'exponentielle : $h=w\circ v$, de fonction extérieure w. Les deux ordres donnent deux fonctions différentes.

(c) w est croissante sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $w(x)=\mathrm{e}^{x}>0$, donc $w(x)\in]0\,;+\infty[$. Or v est croissante sur $[0\,;+\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}$). Même sens de variation, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

(d) w est croissante sur $\mathbb{R}$. Sur $]-\infty\,;0]$, v est décroissante : les sens sont contraires, donc h est décroissante. Sur $[0\,;+\infty[$, v est croissante : même sens, donc h est croissante. Le minimum de h vaut $h(0)=\mathrm{e}^{0}=1$, atteint en 0.

(e) Pour tout réel x, $(\mathrm{e}^{x})^{2}=\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi $f(x)=h(x)\iff\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{x^{2}}\iff 2x=x^{2}\iff x(x-2)=0$. Les solutions sont 0 et 2.

3. *Dériver une composée : règle générale et g(ax + b)*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : dériver $g(ax+b)$**

(a) $a=4$: $f'(x)=5\times 4\,(4x+3)^{4}=20(4x+3)^{4}$.

(b) $a=-3$: $f'(x)=4\times(-3)\,(7-3x)^{3}=-12(7-3x)^{3}$. Attention au signe : le facteur est -3.

(c) $a=-5$: $f'(x)=-5\,\mathrm{e}^{2-5x}$.

(d) $a=3$: $f'(x)=3\times\big(-\sin(3x+2)\big)=-3\sin(3x+2)$.

(e) $a=-2$: $f'(x)=-2\cos(1-2x)$.

(f) $a=\frac{1}{2}$: $f'(x)=3\times\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+4}=\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+4}$.

Ex. 16 ★★☆ **Automatismes : la règle générale $u'\times(g'\circ u)$**

(a) $u(x)=x^{2}+3$, $u'(x)=2x$: $f'(x)=4\times 2x\,(x^{2}+3)^{3}=8x(x^{2}+3)^{3}$.

(b) $u(x)=x^{3}-x$, $u'(x)=3x^{2}-1$: $f'(x)=(3x^{2}-1)\,\mathrm{e}^{x^{3}-x}$.

(c) $u(x)=x^{2}+5>0$, $u'(x)=2x$: $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+5}}$.

(d) $u(x)=x^{3}+1$, $u'(x)=3x^{2}$: $f'(x)=3x^{2}\,g'(x^{3}+1)$. g' est évaluée en $u(x)$, pas en x.

(e) $u(x)=9-4x$, $u'(x)=-4$: $f'(x)=-4\,g'(9-4x)$. Le facteur est négatif.

(f) $u(x)=\mathrm{e}^{x}+1$, $u'(x)=\mathrm{e}^{x}$: $f'(x)=3\,\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}+1)^{2}$.

Ex. 17 ★★☆ **Composée à partir d'un tableau de valeurs**

(a) $f(1)=g\big(u(1)\big)=g(2)=-2$.

(b) $f'(1)=u'(1)\times g'\big(u(1)\big)=4\times g'(2)=4\times 6=24$.

(c) Non : g' doit être évaluée en $u(0)=3$, pas en 0. Donc $f'(0)=u'(0)\times g'(3)=-1\times 1=-1$.

(d) $f(2)=g(u(2))=g(0)=1$ et $f'(2)=u'(2)\times g'(0)=2\times 2=4$. La tangente a pour équation $y=4(x-2)+1$, soit $y=4x-7$.

(e) Ici, l'intérieur est g : $h'(3)=g'(3)\times u'\big(g(3)\big)=1\times u'(0)=-1$.

Ex. 18 ★★☆ **Refroidissement d'un thé**

(a) Non : Hugo a oublié le facteur $a=-0{,}1$ (la constante 20 a bien pour dérivée 0). Pour tout $t\geqslant 0$, $T'(t)=60\times(-0{,}1)\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}=-6\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

(b) Pour tout $t\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}1t}>0$, donc $T'(t)<0$. T est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$: le thé refroidit.

(c) $T'(0)=-6\,\mathrm{e}^{0}=-6$. Au départ, la température baisse d'environ 6 °C par minute.

(d) $T'(20)=-6\,\mathrm{e}^{-2}\approx-0{,}81$. Comme $|T'(20)|<|T'(0)|$, le thé refroidit beaucoup plus lentement au bout de 20 minutes : environ 0,81 °C par minute.

Ex. 19 ★★★ **Étude d'une fonction $\cos(ax+b)$**

(a) $f=\cos\circ u$ avec $u(x)=2x-\frac{\pi}{3}$ et $u'(x)=2$. Comme $\cos'=-\sin$, on a $f'(x)=u'(x)\times\big(-\sin(u(x))\big)$. Léa a oublié le facteur $a=2$. Tom a bien mis le facteur 2, mais il a pris sin en x au lieu de sin en $u(x)$. Pour tout x de $[0\,;\pi]$, $f'(x)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Ex. 19 (suite)

(b) Si $0 \leqslant x \leqslant \pi$, alors $-\frac{\pi}{3} \leqslant 2x - \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{5\pi}{3}$. Posons $X = 2x - \frac{\pi}{3}$. On a $\sin X \geqslant 0$ pour $X \in [0\,;\pi]$, c'est-à-dire pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$, et $\sin X \leqslant 0$ pour $X \in \left[-\frac{\pi}{3}\,;0\right] \cup \left[\pi\,;\frac{5\pi}{3}\right]$. Comme $f'(x) = -2\sin X$, on a $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$, et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$. f' s'annule en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{2\pi}{3}$.

(c) On calcule $f(0) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos 0 = 1$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\pi = -1$ et $f(\pi) = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	$\frac{1}{2}$

f est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$, puis croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$.

(d) $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$. On a $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$, donc $T : y = \sqrt{3}\,x + \frac{1}{2}$.

(e) Vrai. $f'(\pi) = -2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} = f'(0)$. Les deux tangentes ont le même coefficient directeur $\sqrt{3}$, donc elles sont parallèles.

Ex. 20 ★★★ Concentration d'un médicament

(a) $C(t) = 10\big(v(t) - w(t)\big)$ avec $v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ $(a = -0{,}2)$ et $w(t) = \mathrm{e}^{-t}$ $(a = -1)$. On a $v'(t) = -0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ et $w'(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Attention au facteur -1, qui donne un signe $+$ devant e^{-t}. Donc, pour tout $t \geqslant 0$: $C'(t) = 10\left(-0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} + \mathrm{e}^{-t}\right) = 10\,\mathrm{e}^{-t} - 2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

(b) $C'(0) = 10 - 2 = 8$. Au moment de la prise, la concentration augmente à la vitesse de 8 mg/L par heure.

(c) $C'(t) > 0 \iff 10\,\mathrm{e}^{-t} > 2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} \iff 5 > \mathrm{e}^{0{,}8t}$ (on multiplie par $\frac{\mathrm{e}^t}{2} > 0$)
$\iff 0{,}8t < \ln 5 \iff t < 1{,}25\ln 5$. L'ensemble des solutions est $[0\,;1{,}25\ln 5[$. On a aussi $C'(t) = 0$ pour $t_0 = 1{,}25\ln 5 \approx 2{,}01$ et $C'(t) < 0$ pour $t > t_0$.

(d) $C(0) = 10(1-1) = 0$. Avec $t_0 = 1{,}25\ln 5$:

t	0	t_0	$+\infty$
C'(t)	+	0	−
C(t)	0 ↗	$C(t_0)$	↘ 0

C est croissante sur $[0\,;t_0]$ et décroissante sur $[t_0\,;+\infty[$.

Ex. 20 (suite)

(e) Le maximum est $C(t_0)$. On a $\mathrm{e}^{-0{,}2t_0} = \mathrm{e}^{-0{,}25\ln 5}$ et $\mathrm{e}^{-t_0} = \mathrm{e}^{-1{,}25\ln 5} = \mathrm{e}^{-0{,}25\ln 5} \times \mathrm{e}^{-\ln 5} = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-0{,}25\ln 5}$.
Donc $C(t_0) = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}25\ln 5}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8\,\mathrm{e}^{-0{,}25\ln 5} \approx 5{,}35$ mg/L. Elle est atteinte à $t_0 \approx 2{,}012$ h, c'est-à-dire environ 2 h 01 min après la prise.

Ex. 21 ★★★ Ne pas développer : dériver, factoriser, étudier

(a) $(x-1)^3$ est de la forme $(ax+b)^3$ avec $a = 1$, donc sa dérivée est $3(x-1)^2$. $(5-2x)^2$ est de la forme $(ax+b)^2$ avec $a = -2$, donc sa dérivée est $2 \times (-2) \times (5-2x) = -4(5-2x)$. Il ne faut pas oublier le facteur -2.

(b) On applique $(uv)' = u'v + uv'$: $f'(x) = 3(x-1)^2(5-2x)^2 + (x-1)^3 \times (-4)(5-2x)$. On factorise par $(x-1)^2(5-2x)$: $f'(x) = (x-1)^2(5-2x)\big[3(5-2x) - 4(x-1)\big] = (x-1)^2(5-2x)(15-6x-4x+4)$. Donc, pour tout réel x, $f'(x) = (x-1)^2(5-2x)(19-10x)$.

(c) $(x-1)^2 \geqslant 0$ et s'annule en 1. $5 - 2x > 0 \iff x < \frac{5}{2}$. $19 - 10x > 0 \iff x < \frac{19}{10}$.

x	$-\infty$		1		$\frac{19}{10}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	−	0	+	

f est croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{19}{10}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{19}{10}\,;\frac{5}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

(d) Faux. f' s'annule en 1 sans changer de signe : $f'(x) \geqslant 0$ de part et d'autre de 1. f est donc croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{19}{10}\right]$ et n'a pas d'extremum en 1. Par exemple, $f(0) = -25 < f(1) = 0 < f(1{,}5) = 0{,}5$.

(e) Le maximum local est atteint en $\frac{19}{10}$: $f\left(\frac{19}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^3 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{729}{1000} \times \frac{36}{25} = \frac{26244}{25000} = \frac{6561}{6250}$, soit 1,04976. Avec $f(1) = 0$ et $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$:

x	$-\infty$		1		$\frac{19}{10}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	−	0	+	
f(x)		↗	0	↗	$\frac{6561}{6250}$	↘	0	↗	

4. *Dériver $\sqrt{u}$, u^n, $1/u$, e^u (et $\ln u$)*

Ex. 22 ★☆☆ Automatismes : racines, puissances et inverses

(a) $u(x) = 5x - 2$, $u'(x) = 5$. $f_1'(x) = 6 \times 5\,(5x-2)^5 = 30(5x-2)^5$.

(b) $f_2 = u^{-3}$ avec $u(x) = 2x + 1 \neq 0$ et $u'(x) = 2$. $f_2'(x) = -3 \times 2\,(2x+1)^{-4} = \frac{-6}{(2x+1)^4}$.

Ex. 22 **(suite)**

(c) $f_3 = 4 \times \frac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 5 > 0$, $u'(x) = 2x$.
$f_3'(x) = 4 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+5)^2}\right) = \frac{-8x}{(x^2+5)^2}$.

(d) $u(x) = 6 - 2x > 0$ sur $]-\infty\,;3[$, $u'(x) = -2$.
$f_4'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{6-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}$.

(e) $u(x) = x^2 - 3x$, $u'(x) = 2x - 3$. $f_5'(x) = 4(2x - 3)(x^2 - 3x)^3$.

(f) h est définie là où $16 - x^2 \geqslant 0$, soit sur $[-4\,;4]$. Elle est dérivable seulement là où $u(x) = 16 - x^2 > 0$, soit sur $]-4\,;4[$ (ni en -4 ni en 4). Avec $u'(x) = -2x$, on obtient $h'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : exponentielles et logarithmes**

(a) $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$, donc $(\mathrm{e}^{2x})' = 2\mathrm{e}^{2x}$ (et non e^{2x}).
$g_1'(x) = 3 \times 2\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}$.

(b) $u(x) = 1 - x^2$, $u'(x) = -2x$. $g_2'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

(c) $u(x) = \frac{4}{x}$, $u'(x) = -\frac{4}{x^2}$. $g_3'(x) = -\frac{4}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}$.

(d) $u(x) = \mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$. $g_4'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2}$.

(e) $u(x) = x^2 + 4 > 0$, $u'(x) = 2x$. $g_5'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$.

(f) $u(x) = 3x - 1 > 0$ sur $]\frac{1}{3}\,;+\infty[$, $u'(x) = 3$.
$g_6'(x) = \frac{3}{3x-1}$.

Ex. 24 ★★☆ **Erreurs de copies à corriger**

(a) Lina a traité e^u comme une puissance ($u\,\mathrm{e}^{u-1}$). Avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $f'(x) = u'\mathrm{e}^u = 2x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$.

(b) Tom a oublié le signe $-$ et le carré. $u(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x - 4$: $g'(x) = -\frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{4-2x}{(x^2-4x+5)^2}$.

(c) Inès a confondu $\ln'(X) = \frac{1}{X}$ avec $\frac{1}{\ln X}$. $u(x) = 5x > 0$, $u'(x) = 5$: $k'(x) = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$.

(d) Hugo a oublié le facteur $u'(x) = -3$. $m'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$. Comme $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, $m'(x) < 0$ pour tout réel x : m est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 25 ★★☆ **Concentration d'un médicament**

(a) C est un produit : $(8t)' = 8$ et, avec $u(t) = -\frac{t}{2}$, $(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})' = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.
Donc $C'(t) = 8\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 8t \times \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right) = 4(2-t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.

(b) Pour tout t, $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} > 0$, donc $C'(t)$ a le signe de $2 - t$: $C'(t) > 0$ sur $[0\,;2[$, $C'(2) = 0$, $C'(t) < 0$ sur $]2\,;10]$.

Ex. 25 **(suite)**

(c)

t	0		2		10
C'(t)		+	0	−	
C(t)	0	↗	$\frac{16}{\mathrm{e}}$	↘	$80\mathrm{e}^{-5}$

La concentration est maximale 2 heures après la prise : $C(2) = 16\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{16}{\mathrm{e}} \approx 5{,}89$ mg/L.

(d) $C'(4) = 4 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2} = -8\mathrm{e}^{-2} \approx -1{,}08$. Au bout de 4 heures, la concentration diminue à une vitesse d'environ 1,08 mg/L par heure.

Ex. 26 ★★★ **Une racine dérivable… presque partout**

(a) $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 9 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$.
Donc $D_f =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$. Sur $]3\,;+\infty[$, on pose $u(x) = x^2 - 9$. La fonction u est dérivable et $u(x) > 0$. Donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]3\,;+\infty[$ comme composée de u suivie de la racine. Comme $u'(x) = 2x$, on obtient $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

(b) On a $f(3) = 0$ et $f(3+h) = \sqrt{9 + 6h + h^2 - 9} = \sqrt{h(6+h)}$. Pour $h > 0$, $h = \sqrt{h^2}$, donc $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \sqrt{\frac{h(6+h)}{h^2}} = \sqrt{\frac{6+h}{h}} = \sqrt{\frac{6}{h} + 1}$. Ce taux d'accroissement n'a pas de limite finie quand h tend vers 0.
Donc f n'est pas dérivable en 3 : $\mathcal{C}$ y a une tangente verticale. On ne peut pas appliquer la formule de $(\sqrt{u})'$ en 3, car $u(3) = 0$.

(c) Pour tout $x > 3$, on a $x > 0$ et $\sqrt{x^2 - 9} > 0$, donc $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $]3\,;+\infty[$. Ensuite, $f(5) = \sqrt{16} = 4$ et $f'(5) = \frac{5}{4}$. On en déduit T : $y = \frac{5}{4}(x-5) + 4$, soit $y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}$.

(d) Non, Sam a tort : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$, avec u^2 au dénominateur et non u. Ici, $f(x) > 0$ sur $]3\,;+\infty[$, donc g est dérivable. On obtient $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} \times \frac{1}{x^2-9} = -\frac{x}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}}$.

(e) Pour tout $x > 3$, on a $x > 0$, $x^2 - 9 > 0$ et $\sqrt{x^2 - 9} > 0$, donc $g'(x) < 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur $]3\,;+\infty[$.

x	3		$+\infty$
g'(x)		−	
g(x)	$+\infty$	↘	0

Ex. 27 ★★★ **La dérivée seconde au secours du signe de f′**

(a) Nora a oublié le facteur u' : $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x$ et $u'(x) = 2$, donc $(\mathrm{e}^{2x})' = 2\mathrm{e}^{2x}$ et non e^{2x}. Pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 2$.

(b) Pour tout réel x, $f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} = 4\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 1)$, car $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x}$. Comme $4\mathrm{e}^{x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $\mathrm{e}^{x} - 1$. Ce facteur est négatif pour $x < 0$, nul en 0 et positif pour $x > 0$, car la fonction exponentielle est strictement croissante et $\mathrm{e}^{0} = 1$.

(c) f' est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Elle atteint son minimum en 0, qui vaut $f'(0) = 2 - 4 + 2 = 0$.

x	-∞	0	+∞
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	0	↗

(d) Le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ vaut 0.
Donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, et l'égalité n'a lieu qu'en $x = 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Remarque : on vérifie que $f'(x) = 2(\mathrm{e}^{x} - 1)^2$.

(e) On a $f(0) = 1 - 4 + 0 = -3$ et $f'(0) = 0$. La tangente a pour équation $y = 0 \times (x - 0) - 3$, soit $y = -3$. Elle est horizontale, et pourtant f n'a pas d'extremum en 0, car f' ne change pas de signe en 0.

Ex. 28 ★★★ **Croissance d'une culture de bactéries**

(a) On pose $u(t) = 1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Alors $u'(t) = 9 \times (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = -4{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. La fonction u est dérivable et $u(t) > 1 > 0$, donc $u(t) \neq 0$. Ainsi $N = 10\,000\,u^{-1}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Avec $(u^{-1})' = -u'u^{-2}$, on obtient $N'(t) = 10\,000 \times \frac{4{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{(1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t})^2} = \frac{45\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{(1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t})^2}$.

(b) On a $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$ et un carré strictement positif au dénominateur, donc $N'(t) > 0$. Ainsi N est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: le nombre de bactéries augmente sans cesse.

(c) On a $N(0) = \frac{10\,000}{10} = 1\,000$ et $N'(0) = \frac{45\,000}{10^2} = 450$. La tangente a pour équation $y = 450t + 1\,000$. Au début de l'observation, la population croît à la vitesse de 450 bactéries par heure.

(d) Maël a dérivé ln comme si $N(t)$ était la variable : il a oublié le facteur $N'(t)$. Comme $N(t) > 0$, on a $(\ln N)' = \frac{N'}{N}$.
Donc $L'(t) = \frac{45\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{(1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t})^2} \times \frac{1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{10\,000} = \frac{4{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\mathrm{e}^{0{,}5t}$, on obtient $L'(t) = \frac{4{,}5}{\mathrm{e}^{0{,}5t}+9}$.

Ex. 28 (suite)

(e) On a $L'(0) = \frac{4{,}5}{10} = 0{,}45$. Avec $v(t) = \mathrm{e}^{0{,}5t} + 9$ et $v'(t) = 0{,}5\mathrm{e}^{0{,}5t}$, on a $(L')'(t) = -\frac{4{,}5 \times 0{,}5\mathrm{e}^{0{,}5t}}{(\mathrm{e}^{0{,}5t}+9)^2} = -\frac{2{,}25\mathrm{e}^{0{,}5t}}{(\mathrm{e}^{0{,}5t}+9)^2} < 0$.
Donc L' est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Au départ, la population augmente de 45 % par heure environ. Ce taux relatif diminue ensuite au fil du temps.

5. *Dérivée seconde*

Ex. 29 ★☆☆ **Calculer des dérivées secondes**

(a) $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 5$, puis $f''(x) = 12x^2 - 18x$.

(b) $u(x) = 3x + 2$, $u'(x) = 3$: $f'(x) = 5 \times 3\,(3x + 2)^4 = 15(3x + 2)^4$, puis $f''(x) = 15 \times 4 \times 3\,(3x + 2)^3 = 180(3x + 2)^3$.

(c) $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$: $f'(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{x^2+x}$.
On dérive ce produit : $f''(x) = 2\mathrm{e}^{x^2+x} + (2x + 1)(2x + 1)\mathrm{e}^{x^2+x} = (4x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^{x^2+x}$.

(d) $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} = -(x + 3)^{-2}$, puis $f''(x) = -(-2)(x + 3)^{-3} = \frac{2}{(x+3)^3}$.

(e) Quotient : $f'(x) = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2(x - 1)^{-2}$, puis $f''(x) = 4(x - 1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3}$.

(f) Produit uv avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$: $f''(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2(x + 1)\mathrm{e}^{2x} = (2x + 3)\mathrm{e}^{2x}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Ce que dit (ou ne dit pas) f″**

(a) Faux. Contre-exemple : $f(x) = x^2$, $f''(x) = 2 > 0$, mais $f'(x) = 2x < 0$ sur $]-\infty\,;0[$, donc f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$. $f'' > 0$ dit seulement que f' est croissante.

(b) Faux. $f'' = (f')'$, pas $(f')^2$: $f'(x) = 3x^2$, donc $f''(x) = 6x$.

(c) Faux. $f'(x) = 3x^2 - 12x$ et $f''(x) = 6x - 12$, donc on a bien $f''(2) = 0$. Mais $f'(2) = 12 - 24 = -12 \neq 0$, donc f n'a pas d'extremum en 2. $f''(2) = 0$ n'apprend rien sur f à lui seul.

(d) Vrai. $f'' < 0$, donc f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(0) = 0$, on a $f'(x) > 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 0$: f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ puis décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 0.

(e) Vrai. $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$, puis $f''(x) = 3 \times 3\,\mathrm{e}^{3x} = 9\mathrm{e}^{3x}$.

Ex. 31 ★★☆ **Le signe de f' grâce à f''**

(a) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 4x$. C'est la différence de deux termes, dont l'un change de signe : le signe ne se lit pas directement.

(b) $f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - 4 = 4(\mathrm{e}^{2x} - 1)$. La fonction exponentielle est strictement croissante, donc $\mathrm{e}^{2x} \geqslant 1 = \mathrm{e}^0 \iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$.
Donc $f''(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;0]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c)

x	-∞	0	+∞
f''(x)	−	0	+
f'(x)	↘	2	↗

f' est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Son minimum vaut $f'(0) = 2\mathrm{e}^0 - 0 = 2$.

(d) Pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 2 > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 32 ★★☆ **Un ressort qui oscille**

(a) x est dérivable comme composée de $t \mapsto 2t$ par cos : $v(t) = 3 \times 2 \times (-\sin(2t)) = -6\sin(2t)$ (en cm/s).

(b) $a(t) = -6 \times 2\cos(2t) = -12\cos(2t)$ (en cm/s²).
Donc $a(t) = -4 \times 3\cos(2t) = -4x(t)$.

(c) $x(0) = 3\cos 0 = 3$ cm, $v(0) = -6\sin 0 = 0$ cm/s et $a(0) = -12\cos 0 = -12$ cm/s². À $t = 0$, la vitesse est nulle mais l'accélération ne l'est pas : la vitesse varie (elle devient négative), donc le ressort ne reste pas immobile, il repart vers $x = 0$.

(d) Non. On a bien $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ cm/s². Mais $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -6\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -6$ cm/s $\neq 0$: à cet instant, le ressort passe en $x = 0$ à 6 cm/s. Une accélération nulle veut dire que la vitesse ne varie pas à cet instant, pas qu'elle est nulle.

(e) Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $2t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(2t) \geqslant 0$ et $a(t) \leqslant 0$: v est décroissante. Pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $2t \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, donc $\cos(2t) \leqslant 0$ et $a(t) \geqslant 0$: v est croissante. Le minimum de v est $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -6$ cm/s.

Ex. 33 ★★★ **Étudier une fonction avec un logarithme grâce à f''**

(a) $x\ln(x)$ est un produit $u \times v$ avec $u = x$, $u' = 1$, $v = \ln x$, $v' = \frac{1}{x}$. Pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - x = \ln x + 1 - x$. Puis $f''(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Ex. 33 **(suite)**

(b) Pour $x > 0$, $f''(x)$ a le signe de $1 - x$: $f''(x) > 0$ sur $]0\,;1[$, $f''(1) = 0$ et $f''(x) < 0$ sur $]1\,;+\infty[$.
Donc f' est croissante sur $]0\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$, avec $f'(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$.

x	0		1		+∞
f''(x)		+	0	−	
f'(x)		↗	0	↘	

(c) f' admet un maximum en 1, qui vaut $f'(1) = 0$.
Donc pour tout réel $x > 0$: $f'(x) \leqslant 0$, avec égalité seulement en $x = 1$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $f(1) = 1 \times \ln 1 - \frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$ et $f'(1) = 0$. La tangente a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = \frac{5}{2}$: elle est horizontale.

(e) Non. $f''(1) = 0$ ne dit rien de f à lui seul. Ici on a même $f'(1) = 0$, et pourtant f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ (question précédente) : f' ne change pas de signe en 1, donc f n'a pas d'extremum en 1.

Ex. 34 ★★★ **La pente la plus forte d'une courbe en cloche**

(a) $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -2x^2$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = -4x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de u suivie de l'exponentielle. Pour tout réel x : $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = -4x\,\mathrm{e}^{-2x^2}$.

(b) f' est un produit $u \times v$ avec $u = -4x$ et $v = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Noé a traité $-4x$ comme une constante et oublié le terme $u'v$. Avec $u' = -4$ et $v' = -4x\,\mathrm{e}^{-2x^2}$: $f''(x) = -4\mathrm{e}^{-2x^2} + (-4x)(-4x)\mathrm{e}^{-2x^2} = (16x^2 - 4)\mathrm{e}^{-2x^2} = 4(2x-1)(2x+1)\mathrm{e}^{-2x^2}$.

(c) Comme $\mathrm{e}^{-2x^2} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $4x^2 - 1$: il est positif en dehors de $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ et négatif à l'intérieur. On a $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

x	−∞		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		+∞
f''(x)		+	0	−	0	+	
f'(x)		↗	$\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	↘	$-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	↗	

(d) Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x est $f'(x)$. Sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, le tableau donne $f'(x) \leqslant f'\left(-\frac{1}{2}\right)$. Pour $x > 0$, $f'(x) = -4x\,\mathrm{e}^{-2x^2} < 0 < f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Donc le plus grand coefficient directeur est atteint en $x = -\frac{1}{2}$.

Ex. 34 (suite)

(e) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. Équation : $y = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, soit $y = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}(x+1)$.

Ex. 35 ★★★ **Élimination d'un médicament**

(a) $C = \frac{u}{v}$ avec $u = 4t$, $u' = 4$, $v = t^2+1$, $v' = 2t$. $C'(t) = \frac{4(t^2+1)-4t\times 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$. Pour $t \geqslant 0$, $C'(t)$ a le signe de $1-t$: C est croissante sur $[0\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$, avec $C(1) = 2$.

t	0		1		$+\infty$
C'(t)		+	0	−	
C(t)	0	↗	2	↘	

(b) $C'(t) = 4(1-t^2)\times(t^2+1)^{-2}$: on dérive un produit.
$C''(t) =$
$4\left[-2t(t^2+1)^{-2} + (1-t^2)\times(-2)\times 2t\,(t^2+1)^{-3}\right] =$
$\frac{4\left[-2t(t^2+1)-4t(1-t^2)\right]}{(t^2+1)^3} = \frac{8t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$.

(c) Pour $t \geqslant 0$, $8t \geqslant 0$ et $(t^2+1)^3 > 0$: $C''(t)$ a le signe de t^2-3. Il est négatif sur $]0\,;\sqrt{3}[$ et positif sur $]\sqrt{3}\,;+\infty[$. Donc C' est décroissante sur $[0\,;\sqrt{3}]$ et croissante sur $[\sqrt{3}\,;+\infty[$. $C'(0) = 4$ et $C'(\sqrt{3}) = \frac{4\times(-2)}{16} = -\frac{1}{2}$.

t	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
C''(t)	0	−	0	+	
C'(t)	4	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	

(d) C' atteint son minimum $-\frac{1}{2}$ en $t = \sqrt{3}$. La concentration baisse donc le plus vite à $t = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ h, soit environ 1 h 44 min, à la vitesse de 0,5 mg/L par heure.

(e) Non. Pour $t > \sqrt{3}$, $C''(t) > 0$: c'est C' qui est croissante, pas C. Pour $t > \sqrt{3}$, on a $t > 1$, donc $C'(t) = \frac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2} < 0$: la concentration continue de baisser, mais de moins en moins vite.

6. *Étudier une fonction composée*

Ex. 36 ★☆☆ **Écarter le facteur de signe connu**

(a) $u(x) = x^2-6x$ et $u'(x) = 2x-6$, donc $f'(x) = (2x-6)\,\mathrm{e}^{x^2-6x}$. Comme $\mathrm{e}^{x^2-6x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x-6$. Il est positif pour $x \geqslant 3$: f est croissante sur $[3\,;+\infty[$.

(b) $u(x) = x^2+2x+5$ et $u'(x) = 2x+2$. Le discriminant vaut $4-20 = -16 < 0$, donc $u > 0$. On obtient $f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. Comme $\sqrt{x^2+2x+5} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x+1$: f est croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

Ex. 36 (suite)

(c) $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$. Le carré $(x^2+3)^2$ est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $-2x$. Il est positif pour $x \leqslant 0$: f est croissante sur $]-\infty\,;0]$.

(d) Avec la dérivée d'un produit : $f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{2x} + x\times 2\mathrm{e}^{2x} = (1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}$. Comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1+2x$: f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

(e) $u(x) = x^2+1 > 0$, donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1}$. Comme $x^2+1 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x$: f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 37 ★★☆ **Variations d'une composée sans dériver**

(a) $u(x) = -3x+1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $g = \exp$ est croissante. Une fonction croissante appliquée à une fonction décroissante donne une fonction décroissante : f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) $u(x) = 5-2x$ est décroissante sur I, à valeurs dans $[0\,;+\infty[$, et $g = \sqrt{\ }$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc f est décroissante sur I.

(c) $u(x) = \sqrt{x}+2$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$, à valeurs dans $]2\,;+\infty[$. $g(t) = \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Les sens sont contraires, donc f est décroissante sur I.

(d) $u(x) = \mathrm{e}^x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]1\,;+\infty[$. $g(t) = t^3$ est croissante. Les deux ont le même sens, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

(e) $u(x) = 4-x$ est décroissante sur I, à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, et $g = \ln$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Donc f est décroissante sur I.

(f) $u(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $g = \exp$ est croissante.
Donc f est décroissante sur I.

Ex. 38 ★★☆ **Le maximum d'une exponentielle**

(a) $f = \exp\circ u$ avec $u(x) = -x^2+2x+3$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Pour tout réel x, $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)} = (-2x+2)\,\mathrm{e}^{-x^2+2x+3}$.

(b) Comme $\mathrm{e}^{-x^2+2x+3} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-2x+2$. Ce facteur est positif pour $x < 1$, s'annule en 1 et est négatif pour $x > 1$. $f(1) = \mathrm{e}^{-1+2+3} = \mathrm{e}^4$.

x	-∞		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	e^4	↘	0

Ex. 38 **(suite)**

(c) Non. Le maximum est atteint en $x = 1$, là où u atteint son maximum $u(1) = 4$. Mais $f(1) = \mathrm{e}^{u(1)} = \mathrm{e}^4 \approx 54{,}6$. Lina a confondu le maximum de u avec celui de f : la valeur exacte est e^4.

(d) On a $0 < 1 < \mathrm{e}^4$. Sur $]-\infty\,;1]$, f croît de 0 (limite) à e^4 et passe une fois par la valeur 1. Sur $[1\,;+\infty[$, elle décroît de e^4 vers 0 et y passe encore une fois. Il y a donc 2 solutions. Vérification : $\mathrm{e}^{u(x)} = 1 \iff u(x) = 0 \iff -x^2 + 2x + 3 = 0$. Le discriminant vaut 16, d'où $x = -1$ ou $x = 3$: on retrouve deux solutions, une de chaque côté de 1.

Ex. 39 ★★☆ **Racine d'un trinôme : domaine, variations, tangente**

(a) $\Delta = 16 + 20 = 36$, d'où les racines $x = \frac{-4-6}{-2} = 5$ et $x = \frac{-4+6}{-2} = -1$. Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif entre ses racines. f est donc définie sur $[-1\,;5]$. Comme $\sqrt{\ }$ est dérivable seulement là où $u > 0$, f est dérivable sur $]-1\,;5[$.

(b) $u(x) = -x^2 + 4x + 5$ et $u'(x) = -2x + 4$. Pour tout x de $]-1\,;5[$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x+5}} = \frac{2-x}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$.

(c) Comme $\sqrt{-x^2+4x+5} > 0$ sur $]-1\,;5[$, $f'(x)$ a le signe de $2 - x$. Vérification des valeurs : $f(-1) = \sqrt{0} = 0$, $f(5) = \sqrt{0} = 0$ et $f(2) = \sqrt{-4+8+5} = \sqrt{9} = 3$.

x	-1		2		5
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	3	↘	0

Le maximum de f est 3, atteint en $x = 2$.

(d) $f(1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. La tangente a pour équation $y = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) + 2\sqrt{2}$, soit $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

Ex. 40 ★★★ **Logarithme d'un trinôme : domaine, maximum, solutions**

(a) $6x - x^2 = x(6-x)$ est un trinôme de racines 0 et 6, avec $a = -1 < 0$: il est strictement positif entre ses racines, c'est-à-dire sur $]0\,;6[$, et négatif ou nul ailleurs. Comme $\ln u$ n'existe que si $u > 0$, f est définie sur $]0\,;6[$. Sur cet intervalle, $u(x) = 6x - x^2$ est dérivable et strictement positive, donc $f = \ln u$ est dérivable sur $]0\,;6[$ comme composée.

Ex. 40 **(suite)**

(b) Avec $u(x) = 6x - x^2$ et $u'(x) = 6 - 2x$, on a $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{6-2x}{6x-x^2}$. Pour tout x de $]0\,;6[$, le dénominateur $6x - x^2$ est strictement positif, je l'écarte : $f'(x)$ a le signe de $6 - 2x$, positif sur $]0\,;3[$, nul en 3, négatif sur $]3\,;6[$. $f(3) = \ln(18-9) = \ln 9 = 2\ln 3$.

x	0		3		6
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$2\ln 3$	↘	$-\infty$

Donc f est croissante sur $]0\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;6[$.

(c) Si $x \in]0\,;6[$, alors $6 - x \in]0\,;6[$ et $6(6-x) - (6-x)^2 = 36 - 6x - 36 + 12x - x^2 = 6x - x^2$.
Donc $f(6-x) = f(x)$. Deux abscisses symétriques par rapport à 3 ont la même image : le tableau est symétrique autour de 3, où f atteint son maximum. On retrouve la même limite $-\infty$ en 0 et en 6, et par exemple $f(1) = f(5) = \ln 5$.

(d) On a $2 < \ln 9$ car $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39 < 9$. Sur $]0\,;3]$, f croît strictement de $-\infty$ à $\ln 9$: elle prend la valeur 2 une seule fois. Sur $[3\,;6[$, elle décroît strictement de $\ln 9$ à $-\infty$: encore une fois.
Donc $f(x) = 2$ a exactement deux solutions. Par contre $\ln 9 < 3$ car $9 < \mathrm{e}^3 \approx 20{,}09$: le maximum de f est inférieur à 3, donc $f(x) = 3$ n'a aucune solution.

(e) $f(1) = \ln(6-1) = \ln 5$ et $f'(1) = \frac{6-2}{6-1} = \frac{4}{5}$. La tangente a pour équation $y = \frac{4}{5}(x-1) + \ln 5$, soit $y = \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} + \ln 5$.

Ex. 41 ★★★ **Dérivée seconde : du signe de f″ au signe de f′**

(a) $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est de la forme $g(ax+b)$ avec $g = \exp$, $a = 2$, $b = 0$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $2\mathrm{e}^{2x}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} - 2x - 1 = \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1$. De même $f''(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1)$.

Ex. 41 **(suite)**

(b) $f''(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{2x} > 1 = \mathrm{e}^0 \iff 2x > 0 \iff x > 0$, car exp est strictement croissante.

Donc f'' est négative sur $]-\infty\,;0[$, nulle en 0, positive sur $]0\,;+\infty[$. $f'(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)	$-$	0	$+$
f'(x)	$\searrow$	0	$\nearrow$

f' est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(c) D'après le tableau, f' a pour minimum $f'(0) = 0$: pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$, avec égalité seulement en $x = 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f(0) = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$+$	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Non. Ici f'' s'annule en 0 en changeant de signe : c'est f' qui admet un minimum en 0, égal à 0. Mais f' ne change pas de signe, donc f est strictement croissante et n'a aucun extremum. En 0, $f'(0) = 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$: la tangente est horizontale, d'équation $y = \frac{1}{2}$.

(e) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ à $+\infty$: elle prend la valeur 0 une seule fois. $f(x) = 0$ a donc une unique solution, notée α. $f(-2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4} - 4 + 2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4} - 2 \approx -1{,}99 < 0$ et $f(-1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} > 0$. Comme f est strictement croissante et que $f(-2) < f(\alpha) = 0 < f(-1)$, on a $-2 < \alpha < -1$.

Ex. 42 ★★★ **Modèle : le débit d'une rivière en crue**

(a) $g = \exp$ et $u(t) = 0{,}5t - 0{,}05t^2$. u est un trinôme avec $a = -0{,}05 < 0$, de sommet en $t = -\frac{0{,}5}{2\times(-0{,}05)} = 5$: u est croissante sur $[0\,;5]$ et décroissante sur $[5\,;10]$. g est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $g \circ u$ a les mêmes variations que u. On multiplie par $20 > 0$, ce qui ne change pas le sens. Donc D est croissante sur $[0\,;5]$ et décroissante sur $[5\,;10]$.

(b) Non. Le maximum est bien atteint en $t = 5$, là où u est maximale, mais il vaut $D(5) = 20\,\mathrm{e}^{u(5)} = 20\,\mathrm{e}^{1{,}25}$, pas $20 \times 1{,}25$. Le débit maximal est $20\,\mathrm{e}^{1{,}25} \approx 70$ m³/s.

Ex. 42 **(suite)**

(c) $D(0) = 20\,\mathrm{e}^0 = 20$ et $u(10) = 5 - 5 = 0$, donc $D(10) = 20\,\mathrm{e}^0 = 20$.

t	0		5		10
D(t)	20	$\nearrow$	$20\mathrm{e}^{1{,}25}$	$\searrow$	20

Le débit revient à sa valeur de départ au bout de 10 jours.

(d) Comme ln est strictement croissante : $D(t) \geqslant 50 \iff \mathrm{e}^{u(t)} \geqslant 2{,}5 \iff u(t) \geqslant \ln 2{,}5 \iff t^2 - 10t + 20\ln 2{,}5 \leqslant 0$ (on multiplie par -20). $\Delta = 100 - 80\ln 2{,}5 \approx 26{,}70 > 0$. Les racines sont $t_1 = 5 - \sqrt{25 - 20\ln 2{,}5} \approx 2{,}42$ et $t_2 = 5 + \sqrt{25 - 20\ln 2{,}5} \approx 7{,}58$, toutes deux dans $[0\,;10]$. Avec $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines : l'alerte dure sur $[t_1\,;t_2]$, soit environ 5,2 jours.

(e) $D = 20\,\mathrm{e}^u$ avec $u'(t) = 0{,}5 - 0{,}1t$, donc $D'(t) = 20(0{,}5 - 0{,}1t)\,\mathrm{e}^{0{,}5t - 0{,}05t^2} = (10 - 2t)\,\mathrm{e}^{0{,}5t - 0{,}05t^2}$. C'est bien du signe de $10 - 2t$, comme prévu à la question 1. $D'(0) = 10$ et $D(0) = 20$, donc la tangente a pour équation $y = 10t + 20$. Au début de la crue, le débit augmente d'environ 10 m³/s par jour.

7. Problèmes type bac

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : extremum d'une composée**

(a) $u(x) = 4x - x^2$ et $u'(x) = 4 - 2x$: u admet un maximum en 2, qui vaut $u(2) = 4$. La fonction exponentielle est croissante, donc f a les mêmes variations que u. Maximum en 2 : $f(2) = \mathrm{e}^4$ (et non 4).

(b) $u(x) = x^2 - 6x + 10$ et $u'(x) = 2x - 6$: u admet un minimum en 3, qui vaut $u(3) = 1 > 0$. La fonction racine carrée est croissante, donc minimum en 3 : $f(3) = \sqrt{1} = 1$.

(c) $u(x) = x^2 + 2x + 5 > 0$ (car $\Delta = -16 < 0$) et $u'(x) = 2x + 2$: u admet un minimum en -1, qui vaut $u(-1) = 4$. $\frac{1}{u}$ a les variations contraires de u, donc maximum en -1 : $f(-1) = \frac{1}{4}$.

(d) $u(x) = x^2 - 2x + 3$ et $u'(x) = 2x - 2$: u admet un minimum en 1, qui vaut $u(1) = 2$. Même sens que u, donc minimum en 1 : $f(1) = \mathrm{e}^2$.

(e) $u(x) = x^2 - 4x + 7$ et $u'(x) = 2x - 4$: u admet un minimum en 2, qui vaut $u(2) = 3$. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, donc minimum en 2 : $f(2) = 3^3 = 27$.

Ex. 43 (suite)

(f) $u(x) = x^2 + 8x + 20 > 0$ (car $\Delta = -16 < 0$) et $u'(x) = 2x + 8$: u admet un minimum en -4, qui vaut $u(-4) = 4$. La fonction ln est croissante, donc minimum en -4 : $f(-4) = \ln 4$.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : tangentes**

(a) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-4}$, donc $f(2) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(2) = 2$. La tangente a pour équation $y = 2(x-2) + 1$, soit $y = 2x - 3$.

(b) $f'(x) = 3 \times 2x \times (x^2-3)^2 = 6x(x^2-3)^2$, donc $f(1) = (-2)^3 = -8$ et $f'(1) = 6 \times 4 = 24$. La tangente a pour équation $y = 24(x-1) - 8$, soit $y = 24x - 32$.

(c) $f'(x) = 2 \times \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$, donc $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{-4}{4} = -1$. La tangente a pour équation $y = -(x-1) + 1$, soit $y = -x + 2$.

(d) $f'(x) = \frac{3}{3x-2}$, donc $f(1) = \ln 1 = 0$ et $f'(1) = 3$. La tangente a pour équation $y = 3(x-1)$, soit $y = 3x - 3$.

(e) $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. La tangente est parallèle à la droite si $f'(x) = \frac{1}{3}$, donc $\sqrt{2x+1} = 3$, d'où $2x + 1 = 9$ et $x = 4$. Comme $f(4) = 3$, le point cherché est $(4\,;3)$.

(f) $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-1}$. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = 3\mathrm{e}^{3a-1}(x-a) + \mathrm{e}^{3a-1}$. Elle passe par O si $\mathrm{e}^{3a-1}(1-3a) = 0$. Comme $\mathrm{e}^{3a-1} > 0$, on obtient $a = \frac{1}{3}$. Le point est $\left(\frac{1}{3}\,;1\right)$ et la tangente a pour équation $y = 3x$.

Ex. 45 ★★☆ **Concentration d'un antibiotique**

(a) C est dérivable sur $[0\,;10]$ comme produit de fonctions dérivables. On pose $u(t) = 8t$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$, d'où $u'(t) = 8$ et $v'(t) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. On obtient $C'(t) = 8\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 4t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 4(2-t)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

(b) On a $4 > 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$, donc $C'(t)$ a le signe de $2 - t$: il est positif sur $[0\,;2]$ et négatif sur $[2\,;10]$. On a $C(0) = 0$, $C(2) = 16\mathrm{e}^{-1}$ et $C(10) = 80\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}54$.

t	0		2		10
C'(t)		+	0	−	
C(t)	0	↗	$16\mathrm{e}^{-1}$	↘	$80\mathrm{e}^{-5}$

C est croissante sur $[0\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;10]$.

(c) Le maximum est atteint pour $t = 2$, c'est-à-dire 2 heures après l'injection. Il vaut $C(2) = 16\mathrm{e}^{-1} \approx 5{,}89$ mg/L.

(d) $C'(0) = 4 \times 2 \times \mathrm{e}^0 = 8$. Juste après l'injection, la concentration augmente à la vitesse de 8 mg/L par heure.

Ex. 46 ★★☆ **Fonction auxiliaire et signe de f′**

(a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1)$. La fonction exponentielle est strictement croissante, donc $\mathrm{e}^{2x} > 1 = \mathrm{e}^0$ équivaut à $2x > 0$, c'est-à-dire à $x > 0$. Ainsi $g'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$, $g'(0) = 0$ et $g'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b)

x	-∞	0	+∞
g'(x)	−	0	+
g(x)	↘	0	↗

g admet un minimum en 0 : $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. On a donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, avec égalité seulement en $x = 0$.

(c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} - 2x - 1 = \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1$, donc $f'(x) = g(x)$.

(d) Pour tout réel x, $f'(x) = g(x) \geqslant 0$, et f' ne s'annule qu'en 0.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(e) On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = g(0) = 0$, donc la tangente a pour équation $y = \frac{1}{2}$: elle est horizontale. Léa a tort : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais $f'(0) = 0$. Une dérivée positive qui ne s'annule qu'en des points isolés suffit.

Ex. 47 ★★★ **Une famille de fonctions et un paramètre**

(a) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, car $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ est de la forme e^u avec $u(x) = -kx$ et $u'(x) = -k$. On pose $v(x) = 2x + 1$, donc $v'(x) = 2$, et $w(x) = \mathrm{e}^{-kx}$, donc $w'(x) = -k\,\mathrm{e}^{-kx}$. Alors $f_k'(x) = 2\mathrm{e}^{-kx} + (2x+1)(-k)\mathrm{e}^{-kx} = (2 - 2kx - k)\,\mathrm{e}^{-kx}$. On obtient bien $f_k'(x) = (2 - k - 2kx)\,\mathrm{e}^{-kx}$.

(b) Comme $\mathrm{e}^{-kx} > 0$, $f_k'(x)$ a le signe de $2 - k - 2kx$. C'est une fonction affine de coefficient $-2k < 0$, qui s'annule en $x_0 = \frac{2-k}{2k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}$. Elle est positive avant x_0 et négative après.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	0	−
$f_k(x)$	↗	max	↘

Calcul du maximum : $2x_0 + 1 = \frac{2-k}{k} + 1 = \frac{2}{k}$ et $-kx_0 = -\frac{2-k}{2} = \frac{k}{2} - 1$. Le maximum de f_k vaut donc $f_k(x_0) = \frac{2}{k}\,\mathrm{e}^{\frac{k}{2}-1}$.

Ex. 47 **(suite)**

(c) On a $f_k(0) = 1 \times \mathrm{e}^0 = 1$ et $f_k'(0) = 2 - k$. La tangente a donc pour équation $y = (2-k)(x-0) + 1$, soit $y = (2-k)x + 1$. Elle passe par $A(3\,;-2)$ si et seulement si $-2 = 3(2-k) + 1$, c'est-à-dire $3(2-k) = -3$, donc $2 - k = -1$. On trouve $k = 3$.

(d) Avec $k = 3$, on a $x_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$. Le maximum vaut $f_3\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}-1} = \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{e}}$. Arrondi à 10^{-2}, ce maximum vaut environ 1,10.

Ex. 48 ★★★ **Dérivée seconde et tangente parallèle**

(a) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour e^u avec $u(x) = 2x - 1$, on a $u'(x) = 2$, donc $(\mathrm{e}^{2x-1})' = 2\mathrm{e}^{2x-1}$. On obtient $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} - \frac{1}{x}$. De même, f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x-1} + \frac{1}{x^2}$.

(b) Pour tout $x > 0$, on a $4\mathrm{e}^{2x-1} > 0$ et $\frac{1}{x^2} > 0$, donc $f''(x) > 0$. Ainsi f' est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. De plus, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^0 - 2 = 0$. Comme f' est strictement croissante et s'annule en $\frac{1}{2}$: $f'(x) < 0$ sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

(c)

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$

f est décroissante sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Son minimum vaut $f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^0 - \ln\frac{1}{2} = 1 + \ln 2$, soit environ 1,69.

(d) Une tangente au point d'abscisse a est parallèle à D si et seulement si $f'(a) = 2\mathrm{e} - 1$. Or $f'(1) = 2\mathrm{e}^1 - 1 = 2\mathrm{e} - 1$. Comme f' est strictement croissante, elle ne prend cette valeur qu'une fois : $a = 1$ est la seule solution. On a $f(1) = \mathrm{e} - \ln 1 = \mathrm{e}$, donc $y = (2\mathrm{e}-1)(x-1) + \mathrm{e}$. L'équation réduite est $y = (2\mathrm{e}-1)x + 1 - \mathrm{e}$.

Ex. 49 ★★★ **Le point de la piste le plus proche du refuge**

(a) $RM = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x}$. On obtient bien $d(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

(b) On pose $u(x) = x^2 - 3x + 4$. Son discriminant vaut $9 - 16 = -7 < 0$, donc $u(x)$ a le signe de $a = 1$: $u(x) > 0$ pour tout réel x. Ainsi $d = \sqrt{u}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme composée, avec $u > 0$. On a $u'(x) = 2x - 3$, donc $d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$.

Ex. 49 **(suite)**

(c) Comme $2\sqrt{x^2 - 3x + 4} > 0$, $d'(x)$ a le signe de $2x - 3$, qui s'annule en $\frac{3}{2}$. On a $d(0) = 2$.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$	2	$\searrow$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\nearrow$	

d est minimale en $x = \frac{3}{2}$. Le point le plus proche est $M_0\left(\frac{3}{2}\,;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, soit $M_0\left(\frac{3}{2}\,;\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(d) Non. $\frac{7}{4}$ est le minimum de u : $u\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}$. Or $d = \sqrt{u}$ atteint son minimum à la même abscisse, mais ce minimum vaut $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Inès a confondu le minimum de u et celui de $\sqrt{u}$. La distance minimale est $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}323$ km, soit environ 1 323 m.