Terminale maths complémentaires / Dérivation

benprof particulier.fr

40 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 1re : dérivées usuelles, produit, quotient, tangente*

À retenir : $(uv)' = u'v + uv'$ (pas $u'v'$) ; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, dans cet ordre ; $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Exemple : $(xe^x)' = (x+1)e^x$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : dérivées usuelles** — Chaque fonction est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Calcule $f'(x)$.

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 7$

(b) $f(x) = 6x + e^2$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

(d) $f(x) = 4\sqrt{x} - \ln 3$

(e) $f(x) = \dfrac{x^7}{7} - 2e^x$

(f) $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$ (pense à développer d'abord)

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : produits et quotients** — Chaque fonction est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Nomme sa forme ($u \times v$, $\frac{u}{v}$ ou $\frac{1}{v}$), puis calcule $f'(x)$ et factorise-la.

(a) $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

(b) $f(x) = x\sqrt{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

(d) $f(x) = \dfrac{x + 5}{3x + 1}$

(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 2}$

(f) $f(x) = x^3 e^x$

Ex. 3 ★☆☆ **Vrai ou faux ?** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie.

(a) Si $f(x) = x^2(x + 5)$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x) = 2x \times 1 = 2x$.

(b) Si $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $f'(x) = \frac{x(x+8)}{(x+4)^2}$.

(c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

(d) Si $g(x) = e^3 x$ sur $\mathbb{R}$, alors $g'(x) = e^3$.

(e) Si $h(x) = \frac{1}{x^4}$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $h'(x) = \frac{1}{4x^3}$.

(f) Pour $f(x) = x^2$, la tangente au point d'abscisse 3 a pour coefficient directeur 9.

Ex. 4 ★★☆ **Deux copies à corriger** — Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$ et $g(x) = (x - 4)e^x$.
Léna écrit : $f'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$.
Tom écrit : $g'(x) = 1 \times e^x = e^x$.

(a) Repère précisément l'erreur de Léna.

(b) Calcule correctement $f'(x)$ et donne son numérateur sous forme réduite.

Ex. 4 (suite)

(c) Tom a-t-il raison ? Justifie, puis calcule $g'(x)$ sous forme factorisée.

(d) Étudie le signe de $g'(x)$ et dresse le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Ex. 5 ★★☆ **Tangentes à une courbe** — On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Calcule $f(2)$, $f'(x)$ puis $f'(2)$.

(b) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

(c) Sami propose $y = 3(x - 2) - 3$. Explique pourquoi cette droite ne peut pas être la tangente en 2.

(d) Détermine les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est horizontale.

Ex. 6 ★★☆ **Coût moyen minimal d'un atelier** — Un atelier de Nantes fabrique x centaines de lampes, avec $x \in [1\,;6]$. Le coût moyen d'une centaine, en milliers d'euros, est $C_M(x) = \frac{x^2+9}{x}$.

(a) Justifie que C_M est dérivable sur $[1\,;6]$ et montre que $C_M'(x) = \frac{x^2-9}{x^2}$.

(b) Factorise le numérateur et étudie le signe de $C_M'(x)$ sur $[1\,;6]$.

(c) Dresse le tableau de variations de C_M sur $[1\,;6]$, avec les valeurs exactes aux bornes et à l'extremum.

(d) Combien de lampes faut-il fabriquer pour que le coût moyen soit minimal ? Donne ce coût minimal.

Ex. 7 ★★★ **Une tangente de pente imposée** — On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Justifie que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$, nomme sa forme, puis calcule $f'(x)$ et simplifie.

(b) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente horizontale ? Justifie.

(c) Détermine le point de $\mathcal{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$.

(d) Détermine une équation réduite de la tangente T en ce point, puis l'abscisse du point où T coupe l'axe des abscisses.

Ex. 8 ★★★ **Retrouver une fonction grâce à sa tangente** — Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{x}$. Sa courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0\,;2)$ et admet en A une tangente horizontale.

(a) Nomme la forme de f, justifie qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calcule $f'(x)$ en fonction de a et b et factorise-la.

(b) Traduis les deux informations sur $\mathcal{C}$ par deux équations, puis déduis-en a et b.

(c) Avec ces valeurs, calcule $f'(x)$, étudie son signe sur $\mathbb{R}$ et déduis-en le sens de variation de f.

(d) $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente horizontale en un autre point que A ? Justifie.

(e) Détermine une équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

2. *Dériver f(ax + b)*

À retenir : $(f(ax+b))' = a\,f'(ax+b)$: dérive l'extérieur, recopie $ax+b$, multiplie par a avec son signe. Ex. : $(e^{-5x})' = -5e^{-5x}$. Avant de dériver, vérifie que $ax+b>0$ pour $\sqrt{ax+b}$ et $\ln(ax+b)$, et que $ax+b\neq 0$ pour $\frac{1}{ax+b}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes — dériver sans oublier a** — Chaque fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donne sa dérivée, sans développer.

(a) $f_1(x) = e^{-3x+2}$

(b) $f_2(x) = 4e^{\frac{x}{2}}$

(c) $f_3(x) = (1-6x)^5$

(d) $f_4(x) = (2x+7)^3$

(e) $f_5(x) = 3(5-x)^2$

(f) $f_6(x) = 2x - e^{-0{,}4x}$

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes — d'abord l'ensemble, puis la dérivée** — Pour chaque fonction, donne l'ensemble sur lequel elle est dérivable, puis calcule sa dérivée sous forme simplifiée.

(a) $g_1(x) = \sqrt{2x+5}$ (b) $g_2(x) = \dfrac{1}{3x-1}$

(c) $g_3(x) = \ln(3x-12)$ (d) $g_4(x) = \sqrt{8-4x}$

(e) $g_5(x) = \ln(5-x)$ (f) $g_6(x) = \dfrac{6}{5-2x}$

Ex. 11 ★★☆ **La copie de Yanis** — Yanis a dérivé quatre fonctions, chacune là où elle est dérivable. Pour chaque égalité, dis s'il a raison, justifie, et corrige si besoin.

(a) $\left(e^{-2x+1}\right)' = e^{-2x+1}$

(b) $\left(\sqrt{6x+1}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{6x+1}}$ pour $x > -\dfrac{1}{6}$

(c) $\left((3-2x)^4\right)' = -8(3-2x)^3$

(d) $(\ln(4x+2))' = \dfrac{2}{2x+1}$ pour $x > -\dfrac{1}{2}$

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux ?** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie.

(a) La fonction $x \mapsto \sqrt{3x+9}$ est dérivable en $x=-3$.

(b) La fonction $h : x \mapsto (2-3x)^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) La tangente à la courbe de $k : x \mapsto e^{1-2x}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour équation $y = -2x+2$.

(d) Sur $]0\,;+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \ln(3x)$ et $x \mapsto \ln x$ ont la même dérivée.

Ex. 13 ★★☆ **Un produit avec $e^{-\frac{x}{2}}$** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\,e^{-\frac{x}{2}}$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis montre que $f'(x) = \frac{5-2x}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}$.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;10]$, avec les valeurs exactes.

(d) Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Ex. 14 ★★☆ **Le bénéfice d'une apicultrice** — Clémence, apicultrice près de Rodez, produit et vend x centaines de pots de miel, avec $x \in [0\,;10]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, vaut $B(x) = 20\ln(2x+1) - 4x$.

(a) Justifie que B est dérivable sur $[0\,;10]$, puis montre que $B'(x) = \frac{4(9-2x)}{2x+1}$.

(b) Étudie le signe de $B'(x)$, puis dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;10]$.

(c) Combien de pots Clémence doit-elle vendre pour que son bénéfice soit maximal ? Donne ce bénéfice, arrondi à l'euro.

Ex. 15 ★★★ **Extrait de bac — une fonction avec $\ln(2x-6)$** — On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x - 4\ln(2x-6)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

(a) Justifie que f est définie et dérivable sur $]3\,;+\infty[$.

(b) Montre que pour tout $x>3$, $f'(x) = \frac{2(x-5)}{x-3}$.

(c) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[4\,;9]$, puis dresse le tableau de variations de f sur $[4\,;9]$, avec les valeurs exactes.

(d) Donne le minimum de f sur $[4\,;9]$ (valeur exacte, puis arrondi au millième). Déduis-en que $f(x) > 4$ pour tout $x \in [4\,;9]$.

(e) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 7.

Ex. 16 ★★★ **La dose d'engrais d'Adèle** — Adèle, maraîchère près d'Angers, épand x tonnes d'engrais par hectare, avec $x \in [0\,;0{,}25]$. Le gain de récolte obtenu, en tonnes par hectare, est modélisé par $R(x) = 100x(1-4x)^5$.

(a) Justifie que R est dérivable sur $[0\,;0{,}25]$, puis montre, sans développer $(1-4x)^5$, que $R'(x) = 100(1-4x)^4(1-24x)$.

Ex. 16 **(suite)**

(b) Étudie le signe de $R'(x)$ sur $[0\,;0{,}25]$, puis dresse le tableau de variations de R, avec les valeurs exactes.

(c) Quelle dose d'engrais donne le gain maximal ? Donne cette dose au kilogramme près, puis le gain maximal en valeur exacte et arrondi au millième.

(d) Adèle hésite entre les doses 0,05 et 0,1 tonne par hectare. Sans calculer $R(0{,}05)$ ni $R(0{,}1)$, dis laquelle donne le gain le plus élevé. Justifie.

3. *Dériver u^2 et e^u*

À retenir : $(u^2)' = 2u'u$ et $(e^u)' = u'e^u$: j'écris u et u' à part. Ex. : $(e^{x^2})' = 2x\,e^{x^2}$. Comme $e^u > 0$, $(e^u)'$ a le signe de u'. Pièges : $(u^2)' \neq (u')^2$ et $(e^x)^2 = e^{2x}$.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : dériver des carrés** — Chaque fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Écris $u(x)$ et $u'(x)$, puis calcule $f'(x)$ avec $(u^2)' = 2u'u$.

(a) $f(x) = (5x-3)^2$ (b) $f(x) = (2-7x)^2$

(c) $f(x) = (x^2-4x)^2$ (d) $f(x) = (x^3+2)^2$

(e) $f(x) = (e^x+1)^2$ (f) $f(x) = (3+e^{-x})^2$

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : dériver des exponentielles** — Chaque fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf indication contraire. Écris $u(x)$ et $u'(x)$, puis calcule $f'(x)$ avec $(e^u)' = u'e^u$.

(a) $f(x) = e^{3x^2}$

(b) $f(x) = 3e^{-\frac{x^2}{6}}$

(c) $f(x) = e^{x^3-3x}$

(d) $f(x) = 4e^{2-5x}$

(e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

(f) $f(x) = (e^{3x})^2$: écris d'abord $f(x)$ sous la forme $e^{u(x)}$, puis dérive.

Ex. 19 ★☆☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Chaque fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour chaque élève, explique l'erreur, puis donne la bonne dérivée.

(a) Lina écrit : si $f(x) = e^{x^2+1}$, alors $f'(x) = e^{2x}$.

(b) Hugo écrit : si $g(x) = e^{4x-x^2}$, alors $g'(x) = (4x - x^2)e^{4x-x^2-1}$.

(c) Inès écrit : si $h(x) = (x^2+5)^2$, alors $h'(x) = 2(x^2+5)$.

(d) Tom écrit : si $k(x) = (3x-1)^2$, alors $k'(x) = 3^2 = 9$.

Ex. 20 ★★☆ **Vrai ou faux ?** — Les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie.

(a) La fonction f définie par $f(x) = e^{x^2-6x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;3]$.

(b) La fonction g définie par $g(x) = (x^2-1)^2$ est croissante sur $[0\,;1]$.

Ex. 20 **(suite)**

(c) La tangente à la courbe de $k(x) = e^{x^2-2x}$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 2x - 3$.

(d) La dérivée de $m(x) = (e^{-x})^2$ est $m'(x) = e^{-2x}$.

Ex. 21 ★★☆ **Un produit avec une exponentielle** — Soit f la fonction définie sur $[-1\,;2]$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $[-1\,;2]$ et montre que $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[-1\,;2]$.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[-1\,;2]$, avec les valeurs exactes, puis donne le minimum de f.

(d) Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Ex. 22 ★★☆ **Croissance d'une culture de bactéries** — Au laboratoire de Rennes, Maëlle suit une culture de bactéries. Le nombre de bactéries après t heures est modélisé par $N(t) = 2000e^{0{,}15t}$ pour $t \in [0\,;24]$.

(a) Calcule $N'(t)$, puis montre que $N'(t) = 0{,}15\,N(t)$.

(b) Justifie que N est croissante sur $[0\,;24]$.

(c) $N'(t)$ est la vitesse d'évolution, en bactéries par heure. Calcule $N'(10)$, arrondi à l'unité.

(d) Détermine l'instant t où la vitesse d'évolution vaut 600 bactéries par heure. Donne la valeur exacte, puis un arrondi au centième.

Ex. 23 ★★★ **Concentration d'un médicament** — À Grenoble, Adèle est infirmière. Elle suit la concentration d'un médicament dans le sang d'un patient. Cette concentration, en mg/L, est modélisée par $C(t) = 4t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$, où t est le temps en heures écoulé depuis l'injection, pour $t \in [0\,;4]$.

(a) On pose $v(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Écris v sous la forme e^u et calcule $v'(t)$.

(b) Justifie que C est dérivable sur $[0\,;4]$ et nomme sa forme. Montre ensuite que $C'(t) = 4(1-t^2)\,e^{-\frac{t^2}{2}}$.

(c) Étudie le signe de $C'(t)$ sur $[0\,;4]$, puis dresse le tableau de variations de C avec les valeurs exactes.

(d) À quel instant la concentration est-elle maximale ? Donne ce maximum, en valeur exacte puis arrondi à 0,01 mg/L.

(e) Calcule $C'(2)$, arrondi à 0,01. Donne une interprétation de ce nombre dans le contexte.

Ex. 24 ★★★ **Un carré d'exponentielle, deux méthodes** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = (e^x - 4)^2$.

(a) Noé écrit : « $f'(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ ». Explique son erreur, puis calcule $f'(x)$ avec la forme u^2.

(b) Développe $f(x)$ en utilisant $(e^x)^2 = e^{2x}$. Dérive la forme obtenue, puis vérifie que tu retrouves le résultat précédent.

Ex. 24 (suite)

(c) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;2]$, puis dresse le tableau de variations de f avec les valeurs exactes.

(d) Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

(e) Détermine le maximum et le minimum de f sur $[0\,;2]$. Pour chacun, précise en quelle valeur de x il est atteint.

4. *Dériver ln u*

À retenir : Si $u > 0$ sur I : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, du signe de u'. On vérifie d'abord $u(x) > 0$ (inégalité stricte). Ce n'est pas $\frac{1}{u}$: $(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$, et $(\ln(3x))' = \frac{1}{x}$.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : dériver ln u** — Chaque fonction est dérivable sur l'intervalle indiqué. Nomme la forme, puis donne $f'(x)$.

(a) $f(x) = \ln(5x-2)$ sur $]0{,}4\,;+\infty[$

(b) $f(x) = \ln(1-2x)$ sur $]-\infty\,;0{,}5[$

(c) $f(x) = \ln(x^2+4x+5)$ sur $\mathbb{R}$

(d) $f(x) = \ln(x^3+x)$ sur $]0\,;+\infty[$

(e) $f(x) = \ln(e^{2x}+3)$ sur $\mathbb{R}$

Ex. 26 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les logarithmes** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse par un calcul ou un contre-exemple.

(a) Sur $]0\,;+\infty[$, la dérivée de $x \mapsto \ln(4x)$ est $x \mapsto \frac{4}{x}$.

(b) La fonction $x \mapsto \ln(x-2)$ est définie sur $[2\,;+\infty[$.

(c) Sur $]0\,;+\infty[$, la dérivée de $x \mapsto x^2 \ln x$ est $x \mapsto x(2\ln x + 1)$.

(d) Sur $]0\,;+\infty[$, la dérivée de $x \mapsto (1+\ln x)^2$ est $x \mapsto 2(1+\ln x)$.

(e) Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto \ln(x^4+2)$ est $x \mapsto \frac{1}{x^4+2}$.

Ex. 27 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2+9)$.

(a) Justifie que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Inès écrit $f'(x) = \frac{1}{x^2+9} > 0$ et conclut que f est croissante sur $\mathbb{R}$. A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et donne son minimum.

(d) Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

Ex. 28 ★★☆ **Simplifier avant de dériver** — Soit $I = \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $g(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$ pour $x \in I$.

(a) Justifie que, pour tout x de I, $\frac{2x+1}{x+3} > 0$.

(b) Écris $g(x)$ comme une différence de deux logarithmes, puis montre que $g'(x) = \frac{5}{(2x+1)(x+3)}$.

Ex. 28 (suite)

(c) Déduis-en le sens de variation de g sur I.

(d) Résous l'équation $g(x) = 0$ sur I.

Ex. 29 ★★☆ **Un tableau de variations à compléter** — Soit $f(x) = \ln(x^2-4x+8)$ sur $[0\,;5]$. On donne le tableau à compléter :

x	0	…	5
f'(x)	…	0	…
f(x)	…	…	…

(a) Vérifie que $x^2-4x+8 = (x-2)^2+4$, puis justifie que f est dérivable sur $[0\,;5]$.

(b) Montre que $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x^2-4x+8}$.

(c) Complète le tableau de variations avec des valeurs exactes.

(d) Donne le minimum et le maximum de f sur $[0\,;5]$.

Ex. 30 ★★☆ **Le bénéfice d'un atelier de céramique** — À Vannes, Malo fabrique x centaines de bols par mois, avec $x \in [0\,;10]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, vaut $B(x) = 12\ln(x+1) - 2x$.

(a) Montre que, pour tout x de $[0\,;10]$, $B'(x) = \frac{2(5-x)}{x+1}$.

(b) Étudie le signe de $B'(x)$ et dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;10]$.

(c) Combien de bols Malo doit-il fabriquer pour avoir un bénéfice maximal ? Donne ce bénéfice, arrondi à l'euro.

Ex. 31 ★★★ **La puissance d'une éolienne** — À Brest, Léna règle une petite éolienne. Quand le rotor tourne à x centaines de tours par minute, avec $x \in [1\,;6]$, la puissance utile, en kilowatts, vaut $P(x) = 2x - x\ln x$.

(a) Hugo affirme que la dérivée de $x \mapsto x\ln x$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$. A-t-il raison ? Justifie en nommant la forme.

(b) Justifie que P est dérivable sur $[1\,;6]$, calcule $P'(x)$, puis étudie son signe sur $[1\,;6]$.

(c) Dresse le tableau de variations de P sur $[1\,;6]$, avec les valeurs exactes aux bornes et à l'extremum.

(d) Quelle vitesse de rotation donne la puissance maximale ? Donne-la en tours par minute, à l'unité près, puis la puissance maximale à 0,01 kW près.

Ex. 32 ★★★ **Du carré de ln au logarithme d'une fonction** — Soit $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$ pour $x \in [1\,;e^2]$.

(a) Nomme la forme de $(\ln x)^2$, puis montre que $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$ sur $[1\,;e^2]$.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$, puis dresse le tableau de variations de f sur $[1\,;e^2]$ avec les valeurs exactes.

(c) Lucas veut étudier $k(x) = \ln(f(x)+1)$ sur tout l'intervalle $[1\,;e^2]$. Est-ce possible ? Justifie.

Ex. 32 **(suite)**

(d) On pose $g(x) = \ln(f(x) + 2)$. Justifie que g est dérivable sur $[1\,;e^2]$, calcule $g'(x)$, puis donne les variations de g.

5. *Étudier une fonction : signe de f′, variations, extremums*

À retenir : On factorise $f'(x)$, on écarte les facteurs de signe connu ($e^u > 0$, un carré, $x > 0$) et on étudie les autres. Un extremum exige un changement de signe : $3(x-1)^2$ s'annule en 1 sans changer de signe. Sur $[a\,;b]$, on compare aussi avec $f(a)$ et $f(b)$.

Ex. 33 ★☆☆ **Du signe de f′ aux variations** — Dans chaque cas, f est dérivable sur l'intervalle I indiqué et on donne $f'(x)$. Donne le signe de $f'(x)$ sur I en le justifiant, puis le sens de variation de f.

(a) $f'(x) = (x+5)e^{4x}$, $I = \mathbb{R}$.

(b) $f'(x) = -4(x+1)^2$, $I = \mathbb{R}$.

(c) $f'(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$, $I =]0\,;+\infty[$.

(d) $f'(x) = \ln x$, $I =]0\,;+\infty[$.

(e) $f'(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$.

(f) $f'(x) = \dfrac{3}{2x+1}$, $I =]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

Ex. 34 ★☆☆ **Dériver, factoriser, trouver où f′ s'annule** — Dans chaque cas, f est dérivable sur l'intervalle indiqué. Calcule $f'(x)$, écris-la sous forme factorisée, puis donne la ou les valeurs de x où $f'(x) = 0$.

(a) $f(x) = (x+2)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $f(x) = e^{3x} - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $f(x) = x\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

(f) $f(x) = \ln(x^2+4)$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 35 ★★☆ **L'erreur de Lucas** — Soit f définie sur $[-4\,;0]$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 2$. Lucas affirme : « $f'(-2) = 0$, donc f admet un extremum en -2. »

(a) Calcule $f'(x)$ et écris-la sous forme factorisée.

(b) Lucas a-t-il raison ? Justifie.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[-4\,;0]$, avec les valeurs exactes.

(d) Quel est le maximum de f sur $[-4\,;0]$? Précise en quelle valeur de x il est atteint.

Ex. 36 ★★☆ **Étude complète de (3 − x)eˆ(2x)** — Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)e^{2x}$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en nommant la forme utilisée.

(b) Calcule $f'(x)$ et écris-la sous forme factorisée.

(c) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ en justifiant.

(d) Dresse le tableau de variations de f. Donne la valeur exacte de son extremum, puis un arrondi à 0,1.

Ex. 37 ★★☆ **Concentration d'un médicament** — Inès prend un comprimé. La concentration du médicament dans son sang, en mg/L, t heures après la prise, est $C(t) = 8t\,e^{-0{,}5t}$ pour $t \in [0\,;10]$.

(a) Montre que pour tout t de $[0\,;10]$, $C'(t) = 4(2-t)e^{-0{,}5t}$.

(b) Étudie le signe de $C'(t)$ et dresse le tableau de variations de C sur $[0\,;10]$, avec les valeurs exactes.

(c) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?

(d) Quelle est la concentration maximale ? Donne la valeur exacte, puis un arrondi à 0,01 mg/L.

Ex. 38 ★★☆ **Vrai ou faux : x² − 2 ln x** — Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\ln x$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, et justifie.

(a) « Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$. »

(b) « f est décroissante sur $]0\,;1]$. »

(c) « f admet un maximum local en 1. »

(d) « Sur $[\frac{1}{2}\,;2]$, le maximum de f est atteint en $\frac{1}{2}$. »

Ex. 39 ★★★ **Extremums de x² − 6x + 4 ln x** — Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4\ln x$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, puis montre que $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x-2)}{x}$.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ en justifiant. Déduis-en les extremums locaux de f et donne leurs valeurs exactes.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[1\,;4]$, avec les valeurs exactes.

(d) Lina affirme : « f admet un maximum local égal à -5, donc $f(x) \leqslant -5$ pour tout x de $[1\,;4]$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Sur $[\frac{1}{2}\,;3]$, détermine le minimum et le maximum de f : valeurs exactes, puis arrondies à 0,01.

Ex. 40 ★★★ **Le coût moyen minimal de l'atelier de Clémence** — À Annecy, l'atelier de Clémence fabrique entre 100 et 2 000 bougies par semaine. Pour x centaines de bougies, $x \in [1\,;20]$, le coût moyen de fabrication d'une bougie, en euros, vaut $C(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 3$.

(a) Justifie que C est dérivable sur $[1\,;20]$ en nommant la forme utilisée, puis montre que $C'(x) = \dfrac{2(\ln x - 1)}{x}$.

Ex. 40 **(suite)**

(b) Résous $\ln x - 1 > 0$ sur $[1\,;20]$. Déduis-en le signe de $C'(x)$, puis le tableau de variations de C avec les valeurs exactes.

(c) Combien de bougies Clémence doit-elle fabriquer pour que le coût moyen soit minimal ? Donne aussi ce coût moyen minimal, avec son unité.

(d) Son associé affirme : « Sur toute la plage de production, le coût moyen d'une bougie ne dépasse jamais 3 €. » Vrai ou faux ? Justifie.