Terminale maths complémentaires / Dérivation — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 1re : dérivées usuelles, produit, quotient, tangente*

Ex. 1 ★☆☆ Automatismes : dérivées usuelles

(a) $(x^n)' = nx^{n-1}$ et la constante 7 a pour dérivée 0 : $f'(x) = 5x^4 - 12x^2$.

(b) $(6x)' = 6$ et e^2 est une constante, sa dérivée vaut 0 : $f'(x) = 6$.

(c) $f(x) = 3 \times \frac{1}{x}$, donc $f'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$.

(d) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $\ln 3$ est une constante : $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

(e) $\left(\frac{x^7}{7}\right)' = \frac{7x^6}{7} = x^6$ et $(e^x)' = e^x$: $f'(x) = x^6 - 2e^x$.

(f) En développant : $f(x) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$, donc $f'(x) = 4x + 5$.

Ex. 2 ★☆☆ Automatismes : produits et quotients

(a) Forme $u \times v$ avec $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $v = v' = e^x$: $f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x = (x+1)^2 e^x$.

(b) Forme $u \times v$ avec $u = x$, $u' = 1$, $v = \sqrt{x}$, $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

(c) Forme $\frac{1}{v}$ avec $v = x^2 + 3$, $v' = 2x$: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$.

(d) Forme $\frac{u}{v}$ avec $u = x + 5$, $u' = 1$, $v = 3x + 1$, $v' = 3$: $f'(x) = \frac{1\times(3x+1) - (x+5)\times 3}{(3x+1)^2} = \frac{3x+1-3x-15}{(3x+1)^2} = -\frac{14}{(3x+1)^2}$.

(e) Forme $\frac{u}{v}$ avec $u = u' = e^x$, $v = x + 2$, $v' = 1$: $f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x \times 1}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$.

(f) Forme $u \times v$ avec $u = x^3$, $u' = 3x^2$, $v = v' = e^x$: $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2(x+3)e^x$.

Ex. 3 ★☆☆ Vrai ou faux ?

(a) Faux : $(uv)' \neq u'v'$. En développant, $f(x) = x^3 + 5x^2$, donc $f'(x) = 3x^2 + 10x$.

(b) Vrai : forme $\frac{u}{v}$ avec $u = x^2$, $u' = 2x$, $v = x + 4$, $v' = 1$. $f'(x) = \frac{2x(x+4) - x^2 \times 1}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x}{(x+4)^2} = \frac{x(x+8)}{(x+4)^2}$.

(c) Faux : elle est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ seulement, pas en 0
(la formule $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ n'a pas de sens en 0).

(d) Vrai : e^3 est une constante k et $(kx)' = k$, donc $g'(x) = e^3$.

Ex. 3 (suite)

(e) Faux : avec $v = x^4$ et $v' = 4x^3$, $h'(x) = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$.

(f) Faux : le coefficient directeur est $f'(3)$, pas $f(3)$. Ici $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 6$ ($9 = f(3)$ est l'ordonnée du point).

Ex. 4 ★★☆ Deux copies à corriger

(a) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = 3x + 1$, $u' = 3$, $v = x^2 + 1$, $v' = 2x$. Le numérateur doit être $u'v - uv'$; Léna a écrit $uv' - u'v$: elle a inversé l'ordre, ce qui change le signe du résultat.

(b) $v = x^2 + 1 > 0$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2-2x+3}{(x^2+1)^2}$.

(c) Non : Tom a fait $u'v'$, or $(uv)' = u'v + uv'$. $g = u \times v$ avec $u = x - 4$, $u' = 1$, $v = v' = e^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = e^x + (x-4)e^x = (x-3)e^x$.

(d) $e^x > 0$, donc $g'(x)$ a le signe de $x - 3$: négatif avant 3, positif après.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
g'(x)	−	0	+
g(x)	↘	$-e^3$	↗

g est décroissante sur $]-\infty ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$, et admet un minimum $g(3) = -e^3$.

Ex. 5 ★★☆ Tangentes à une courbe

(a) $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, donc $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$.

(b) $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) + 3$, soit $T : y = -3x + 9$.

(c) Sami a inversé les rôles : il a écrit $f(2)(x-2) + f'(2)$. Pour $x = 2$, sa droite donne $y = -3 \neq 3 = f(2)$: elle ne passe même pas par le point de contact.

(d) Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0$. Or $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, qui s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$. La tangente est horizontale aux points d'abscisses 1 et 3.

Ex. 6 ★★☆ **Coût moyen minimal d'un atelier**

(a) C_M est un quotient $\frac{u}{v}$ avec $v = x$ qui ne s'annule pas sur $[1\,;6]$: elle y est dérivable. $u = x^2+9$, $u' = 2x$, $v' = 1$: $C'_M(x) = \frac{2x\times x-(x^2+9)\times 1}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2}$.

(b) $C'_M(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$. Sur $[1\,;6]$, $x^2 > 0$ et $x+3 > 0$: le signe est celui de $x-3$.
Donc $C'_M(x) < 0$ sur $[1\,;3[$, $C'_M(3) = 0$ et $C'_M(x) > 0$ sur $]3\,;6]$.

(c) $C_M(1) = 10$, $C_M(3) = \frac{18}{3} = 6$, $C_M(6) = \frac{45}{6} = 7{,}5$.

x	1	3	6
C_M'(x)	−	0	+
C_M(x)	10 ↘	6	↗ 7,5

(d) C_M est décroissante puis croissante : son minimum sur $[1\,;6]$ est atteint en $x = 3$. Il faut fabriquer 300 lampes ; le coût moyen minimal vaut 6 milliers d'euros par centaine, soit 60 € par lampe.

Ex. 7 ★★★ **Une tangente de pente imposée**

(a) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x+1$, $v'(x) = 1$. Sur $]-1\,;+\infty[$, $v(x) = x+1 > 0$ ne s'annule pas : f est dérivable. $f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$.

(b) Une tangente est horizontale au point d'abscisse a si $f'(a) = 0$. Or $3 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$, donc $f'(x) > 0$: f' ne s'annule jamais. La courbe $\mathcal{C}$ n'a donc aucune tangente horizontale.

(c) Le coefficient directeur de la tangente en a est $f'(a)$. $f'(a) = \frac{3}{4} \iff \frac{3}{(a+1)^2} = \frac{3}{4} \iff (a+1)^2 = 4 \iff a+1 = 2$ ou $a+1 = -2$, c'est-à-dire $a = 1$ ou $a = -3$. Comme $-3 \notin]-1\,;+\infty[$, on a $a = 1$. Avec $f(1) = \frac{1}{2}$, c'est le point $\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.

(d) $y = f'(1)(x-1)+f(1) = \frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{2}$, soit $T : y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. T coupe l'axe des abscisses quand $y = 0$: $\frac{3}{4}x = \frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{3}$. Le point cherché a pour abscisse $\frac{1}{3}$.

Ex. 8 ★★★ **Retrouver une fonction grâce à sa tangente**

(a) $f = u\times v$ avec $u(x) = ax+b$, $u'(x) = a$, $v(x) = v'(x) = e^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $(uv)' = u'v+uv'$: $f'(x) = ae^x+(ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$.

(b) $A \in \mathcal{C}$ donne $f(0) = 2$, soit $b\times e^0 = 2$, donc $b = 2$. La tangente en A est horizontale si $f'(0) = 0$, soit $(a+b)e^0 = 0$, donc $a+b = 0$ et $a = -2$. Ainsi $f(x) = (2-2x)e^x$.

Ex. 8 (suite)

(c) $f'(x) = (-2x-2+2)e^x = -2xe^x$. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-2x$:

x	−∞	0	+∞
f'(x)	+	0	−

.
Donc f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$, avec un maximum $f(0) = 2$.

(d) La tangente est horizontale au point d'abscisse x si $f'(x) = 0$. Comme $e^x > 0$, $-2xe^x = 0 \iff x = 0$. Le seul point où la tangente est horizontale est donc A.

(e) $f(1) = (2-2)e^1 = 0$ et $f'(1) = -2e$. On a $y = f'(1)(x-1)+f(1) = -2e(x-1)+0$, soit $y = -2ex+2e$.

2. *Dériver f(ax + b)*

Ex. 9 ★★☆ **Automatismes — dériver sans oublier a**

(a) C'est la forme e^{ax+b} avec $a = -3$: $f'_1(x) = -3e^{-3x+2}$. Garde bien le signe moins.

(b) Ici $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$, donc $a = \frac{1}{2}$: $f'_2(x) = 4\times\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$.

(c) C'est la forme $(ax+b)^5$ avec $a = -6$: $f'_3(x) = 5\times(-6)\times(1-6x)^4 = -30(1-6x)^4$.

(d) C'est la forme $(ax+b)^3$ avec $a = 2$: $f'_4(x) = 3\times 2\times(2x+7)^2 = 6(2x+7)^2$. Inutile de développer.

(e) C'est la forme $(ax+b)^2$ avec $a = -1$: $f'_5(x) = 3\times 2\times(-1)\times(5-x) = -6(5-x)$.

(f) On a $a = -0{,}4$: $(e^{-0{,}4x})' = -0{,}4e^{-0{,}4x}$, donc $f'_6(x) = 2-(-0{,}4e^{-0{,}4x}) = 2+0{,}4e^{-0{,}4x}$.

Ex. 10 ★★☆ **Automatismes — d'abord l'ensemble, puis la dérivée**

(a) g_1 est dérivable là où $2x+5 > 0$, c'est-à-dire sur $\left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$. Avec $a = 2$: $g'_1(x) = 2\times\frac{1}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.

(b) g_2 est dérivable là où $3x-1 \neq 0$, c'est-à-dire sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$. Avec $a = 3$: $g'_2(x) = -\frac{3}{(3x-1)^2}$.

(c) g_3 est dérivable là où $3x-12 > 0$, c'est-à-dire sur $]4\,;+\infty[$. Avec $a = 3$: $g'_3(x) = \frac{3}{3x-12} = \frac{3}{3(x-4)} = \frac{1}{x-4}$.

(d) g_4 est définie en 2, mais elle n'est dérivable que là où $8-4x > 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;2[$. Avec $a = -4$: $g'_4(x) = -4\times\frac{1}{2\sqrt{8-4x}} = -\frac{2}{\sqrt{8-4x}}$.

(e) g_5 est dérivable là où $5-x > 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;5[$. Avec $a = -1$: $g'_5(x) = \frac{-1}{5-x} = -\frac{1}{5-x}$.

Ex. 10 (suite)

(f) g_6 est dérivable là où $5-2x\neq 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;\frac{5}{2}[$ et sur $]\frac{5}{2}\,;+\infty[$. Ici $g_6(x)=6\times\frac{1}{5-2x}$ avec $a=-2$: $g_6'(x)=6\times\left(-\frac{-2}{(5-2x)^2}\right)=\frac{12}{(5-2x)^2}$.

Ex. 11 ★★☆ **La copie de Yanis**

(a) Il a tort : il a oublié le facteur $a=-2$. La forme est e^{ax+b}, donc $\left(e^{-2x+1}\right)'=-2e^{-2x+1}$.

(b) Il a tort : il a oublié le facteur $a=6$. Comme $6x+1>0$ pour $x>-\frac{1}{6}$, on a $\left(\sqrt{6x+1}\right)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{6x+1}}=\frac{3}{\sqrt{6x+1}}$.

(c) Il a raison. La forme est $(ax+b)^4$ avec $a=-2$: $4\times(-2)\times(3-2x)^3=-8(3-2x)^3$.

(d) Il a raison. Pour $x>-\frac{1}{2}$, on a $4x+2>0$ et $(\ln(4x+2))'=\frac{4}{4x+2}=\frac{4}{2(2x+1)}=\frac{2}{2x+1}$.

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux. $\sqrt{3x+9}$ n'est dérivable que là où $3x+9>0$, c'est-à-dire pour $x>-3$. Or en $x=-3$ on a $3x+9=0$: la fonction est définie en -3, mais elle n'y est pas dérivable.

(b) Faux. On a $h'(x)=3\times(-3)\times(2-3x)^2=-9(2-3x)^2$. Un carré est positif ou nul, donc $h'(x)\leqslant 0$, et $h'(x)$ ne s'annule qu'en $\frac{2}{3}$.
Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Vrai. On a $k\left(\frac{1}{2}\right)=e^0=1$ et $k'(x)=-2e^{1-2x}$, donc $k'\left(\frac{1}{2}\right)=-2$. La tangente a pour équation $y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$, soit $y=-2x+2$.

(d) Vrai. Sur $]0\,;+\infty[$, on a $3x>0$ et $(\ln(3x))'=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}$, qui est aussi la dérivée de $\ln x$.

Ex. 13 ★★☆ **Un produit avec $e^{-\frac{x}{2}}$**

(a) $f=u\times v$ avec $u(x)=2x-1$ et $v(x)=e^{-\frac{x}{2}}$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $u'(x)=2$ et, avec $a=-\frac{1}{2}$, $v'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.
Donc $f'(x)=2e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}\left(2-x+\frac{1}{2}\right)=\frac{5-2x}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}$.

(b) Comme $e^{-\frac{x}{2}}>0$ et $2>0$, $f'(x)$ a le signe de $5-2x$.
Donc $f'(x)>0$ pour $x<\frac{5}{2}$, $f'\left(\frac{5}{2}\right)=0$ et $f'(x)<0$ pour $x>\frac{5}{2}$.

(c) On calcule $f(0)=-1$, $f\left(\frac{5}{2}\right)=4e^{-\frac{5}{4}}$ et $f(10)=19e^{-5}$.

x	0		$\frac{5}{2}$		10
f'(x)		+	0	−	
f(x)	-1	↗	$4e^{-5/4}$	↘	$19e^{-5}$

Sur $[0\,;10]$, f est croissante sur $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{5}{2}\,;10\right]$. Son maximum vaut $4e^{-\frac{5}{4}}\approx 1{,}15$.

Ex. 13 (suite)

(d) On a $f(0)=-1$ et $f'(0)=\frac{5}{2}e^0=\frac{5}{2}$. La tangente a pour équation $y=\frac{5}{2}(x-0)-1$, soit $y=\frac{5}{2}x-1$.

Ex. 14 ★★☆ **Le bénéfice d'une apicultrice**

(a) Sur $[0\,;10]$, on a $2x+1>0$, donc $x\mapsto\ln(2x+1)$ est dérivable (forme $\ln(ax+b)$ avec $a=2$). On obtient $B'(x)=20\times\frac{2}{2x+1}-4=\frac{40-4(2x+1)}{2x+1}=\frac{36-8x}{2x+1}=\frac{4(9-2x)}{2x+1}$.

(b) Sur $[0\,;10]$, on a $2x+1>0$ et $4>0$, donc $B'(x)$ a le signe de $9-2x$: il est positif pour $x<\frac{9}{2}$, nul en $\frac{9}{2}$ et négatif ensuite. On a $B(0)=0$, $B\left(\frac{9}{2}\right)=20\ln 10-18$ et $B(10)=20\ln 21-40$.

x	0		$\frac{9}{2}$		10
B'(x)		+	0	−	
B(x)	0	↗	$20\ln 10-18$	↘	$20\ln 21-40$

Donc B est croissante sur $\left[0\,;\frac{9}{2}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{9}{2}\,;10\right]$.

(c) Le maximum est atteint en $x=\frac{9}{2}=4{,}5$ centaines, soit pour 450 pots. Il vaut $B(4{,}5)=20\ln 10-18\approx 28{,}0517$ milliers d'euros. Le bénéfice maximal est donc d'environ 28 052 €.

Ex. 15 ★★★ **Extrait de bac — une fonction avec $\ln(2x-6)$**

(a) $\ln(2x-6)$ existe si et seulement si $2x-6>0$, soit $x>3$. La fonction $x\mapsto\ln(2x-6)$ est de la forme $\ln(ax+b)$ avec $a=2$ et $b=-6$. Elle est dérivable là où $2x-6>0$. Comme $x\mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est définie et dérivable sur $]3\,;+\infty[$.

(b) $(\ln(2x-6))'=2\times\frac{1}{2x-6}=\frac{2}{2(x-3)}=\frac{1}{x-3}$: attention à ne pas oublier le facteur $a=2$.
Donc $f'(x)=2-4\times\frac{1}{x-3}=\frac{2(x-3)-4}{x-3}=\frac{2x-10}{x-3}=\frac{2(x-5)}{x-3}$.

(c) Sur $[4\,;9]$, on a $x-3>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x-5$: $f'(x)<0$ sur $[4\,;5[$, $f'(5)=0$, et $f'(x)>0$ sur $]5\,;9]$.
On calcule $f(4)=8-4\ln 2$, $f(5)=10-4\ln 4=10-8\ln 2$ et $f(9)=18-4\ln 12$.

x	4	5	9
f'(x)	−	0	+
f(x)	$8-4\ln 2$ ↘	$10-8\ln 2$	↗ $18-4\ln 12$

Donc f est décroissante sur $[4\,;5]$ et croissante sur $[5\,;9]$.

Ex. 15 **(suite)**

(d) D'après le tableau, le minimum de f sur $[4\,;9]$ vaut $f(5) = 10 - 8\ln 2 \approx 4{,}455$ et il est atteint en $x = 5$. Pour tout $x \in [4\,;9]$, on a donc $f(x) \geqslant 10 - 8\ln 2$. Or $10 - 8\ln 2 \approx 4{,}455 > 4$, donc $f(x) > 4$ sur $[4\,;9]$.

(e) $T : y = f'(7)(x-7) + f(7)$. On a $f'(7) = \frac{2\times 2}{4} = 1$ et $f(7) = 14 - 4\ln 8 = 14 - 12\ln 2$.
Donc $T : y = x - 7 + 14 - 12\ln 2$, soit $y = x + 7 - 12\ln 2$.

Ex. 16 ★★★ **La dose d'engrais d'Adèle**

(a) $R = u \times v$ avec $u(x) = 100x$ et $v(x) = (1-4x)^5$, de la forme $(ax+b)^n$ avec $a = -4$ et $n = 5$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc R est dérivable sur $[0\,;0{,}25]$. On a $u'(x) = 100$ et $v'(x) = 5 \times (-4)(1-4x)^4 = -20(1-4x)^4$: attention au signe de a.
Donc $R'(x) = 100(1-4x)^5 + 100x \times (-20)(1-4x)^4$
$= 100(1-4x)^4\,[(1-4x) - 20x] = 100(1-4x)^4(1-24x)$.

(b) $(1-4x)^4 \geqslant 0$ (puissance paire) et ce facteur ne s'annule qu'en $x = \frac{1}{4}$. Comme $100 > 0$, $R'(x)$ a le signe de $1 - 24x$: il est positif pour $x < \frac{1}{24}$ et négatif pour $\frac{1}{24} < x < \frac{1}{4}$. On calcule $R(0) = 0$, $R\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ et $R\left(\frac{1}{24}\right) = \frac{100}{24} \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{78125}{46656}$.

x	0		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{4}$
R'(x)		+	0	−	
R(x)	0	↗	$\frac{78125}{46656}$	↘	0

Donc R est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{24}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{24}\,;\frac{1}{4}\right]$.

(c) D'après le tableau, R atteint son maximum en $x = \frac{1}{24} \approx 0{,}042$: la dose optimale vaut environ 42 kg d'engrais par hectare. Le gain maximal vaut $\frac{78125}{46656} \approx 1{,}674$ tonne par hectare.

(d) On a $\frac{1}{24} \approx 0{,}042$, donc $\frac{1}{24} < 0{,}05 < 0{,}1 \leqslant 0{,}25$. Or R est décroissante sur $\left[\frac{1}{24}\,;\frac{1}{4}\right]$, donc $R(0{,}05) \geqslant R(0{,}1)$ (et même $R(0{,}05) > R(0{,}1)$, car $R'(x) < 0$ sur $\left]\frac{1}{24}\,;\frac{1}{4}\right[$). La dose 0,05 t/ha donne le gain le plus élevé.

3. *Dériver u^2 et e^u*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : dériver des carrés**

(a) $u(x) = 5x - 3$, $u'(x) = 5$.
Donc $f'(x) = 2 \times 5 \times (5x-3) = 10(5x-3)$.

(b) $u(x) = 2 - 7x$, $u'(x) = -7$.
Donc $f'(x) = 2 \times (-7) \times (2-7x) = -14(2-7x)$.

Ex. 17 **(suite)**

(c) $u(x) = x^2 - 4x$, $u'(x) = 2x - 4$.
Donc $f'(x) = 2(2x-4)(x^2-4x) = 4(x-2)(x^2-4x)$.

(d) $u(x) = x^3 + 2$, $u'(x) = 3x^2$.
Donc $f'(x) = 2 \times 3x^2 \times (x^3+2) = 6x^2(x^3+2)$.

(e) $u(x) = e^x + 1$, $u'(x) = e^x$.
Donc $f'(x) = 2e^x(e^x+1)$.

(f) $u(x) = 3 + e^{-x}$, $u'(x) = -e^{-x}$ (forme e^{ax+b} avec $a = -1$).
Donc $f'(x) = -2e^{-x}(3+e^{-x})$.

Ex. 18 ★★☆ **Automatismes : dériver des exponentielles**

(a) $u(x) = 3x^2$, $u'(x) = 6x$.
Donc $f'(x) = 6x\,e^{3x^2}$
(et pas e^{6x}).

(b) $u(x) = -\frac{x^2}{6}$, $u'(x) = -\frac{2x}{6} = -\frac{x}{3}$.
Donc $f'(x) = 3 \times \left(-\frac{x}{3}\right) e^{-\frac{x^2}{6}} = -x\,e^{-\frac{x^2}{6}}$.

(c) $u(x) = x^3 - 3x$, $u'(x) = 3x^2 - 3$.
Donc $f'(x) = (3x^2-3)e^{x^3-3x}$.

(d) $u(x) = 2 - 5x$, $u'(x) = -5$.
Donc $f'(x) = 4 \times (-5)e^{2-5x} = -20e^{2-5x}$.

(e) $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

(f) $(e^{3x})^2 = e^{3x} \times e^{3x} = e^{6x}$, donc $u(x) = 6x$, $u'(x) = 6$ et $f'(x) = 6e^{6x}$.

Ex. 19 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) Lina a dérivé « dans » l'exposant. Avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$: $f'(x) = 2x\,e^{x^2+1}$.

(b) Hugo a utilisé la règle de x^n ($u\,e^{u-1}$), qui ne vaut pas pour e^u. Avec $u'(x) = 4 - 2x$: $g'(x) = (4-2x)e^{4x-x^2}$.

(c) Inès a oublié le facteur u'. Avec $u(x) = x^2 + 5$ et $u'(x) = 2x$: $h'(x) = 2 \times 2x \times (x^2+5) = 4x(x^2+5)$.

(d) Tom confond $(u^2)'$ et $(u')^2$. Avec $u'(x) = 3$: $k'(x) = 2 \times 3 \times (3x-1) = 6(3x-1)$.

Ex. 20 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Vrai. Forme e^u avec $u(x) = x^2 - 6x$: $f'(x) = (2x-6)e^{x^2-6x}$. Comme $e^{x^2-6x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x - 6$, qui est $\leqslant 0$ pour $x \leqslant 3$.
Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;3]$.

(b) Faux. Forme u^2 : $g'(x) = 2 \times 2x \times (x^2-1) = 4x(x-1)(x+1)$. Sur $[0\,;1]$: $4x \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $x + 1 > 0$, donc $g'(x) \leqslant 0$. La fonction g est décroissante sur $[0\,;1]$.

Ex. 20 **(suite)**

(c) Vrai. $k(2) = e^0 = 1$ et $k'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}$, donc $k'(2) = 2$. La tangente a pour équation $y = 2(x-2)+1$, soit $y = 2x-3$.

(d) Faux. $m(x) = e^{-2x}$, donc $m'(x) = -2e^{-2x}$. On a calculé $(u')^2 = (-e^{-x})^2$ au lieu de $(u^2)' = 2u'u = 2 \times (-e^{-x}) \times e^{-x} = -2e^{-2x}$.

Ex. 21 ★★☆ **Un produit avec une exponentielle**

(a) $f = u \times v$ avec $u(x) = x-1$, $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^{2x}$, $v'(x) = 2e^{2x}$ (forme e^{ax+b}). Ces fonctions sont dérivables sur $[-1\,;2]$, donc f aussi. $f'(x) = e^{2x} + (x-1) \times 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x - 2) = (2x-1)e^{2x}$.

(b) Comme $e^{2x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x-1$: $f'(x) < 0$ sur $[-1\,;\frac{1}{2}[$, $f'(\frac{1}{2}) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]\frac{1}{2}\,;2]$.

(c) $f(-1) = -2e^{-2}$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^1 = -\frac{e}{2}$, $f(2) = e^4$.

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
f'(x)	$-$	0	$+$
f(x)	$-2e^{-2}$ ↘	$-\frac{e}{2}$	↗ e^4

Le minimum de f sur $[-1\,;2]$ vaut $-\frac{e}{2}$, atteint en $x = \frac{1}{2}$.

(d) $f(0) = -1$ et $f'(0) = (0-1)e^0 = -1$. La tangente a pour équation $y = -1 \times (x-0) + (-1)$, soit $y = -x - 1$.

Ex. 22 ★★☆ **Croissance d'une culture de bactéries**

(a) Forme e^{at} avec $a = 0{,}15$: $N'(t) = 2000 \times 0{,}15\, e^{0{,}15t} = 300e^{0{,}15t}$. Et $0{,}15\, N(t) = 0{,}15 \times 2000e^{0{,}15t} = 300e^{0{,}15t} = N'(t)$.

(b) $300 > 0$ et $e^{0{,}15t} > 0$, donc $N'(t) > 0$ sur $[0\,;24]$. La fonction N est donc croissante sur $[0\,;24]$.

(c) $N'(10) = 300e^{1{,}5} \approx 1345$. Au bout de 10 heures, la population augmente d'environ 1345 bactéries par heure.

(d) $300e^{0{,}15t} = 600 \iff e^{0{,}15t} = 2 \iff 0{,}15t = \ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0{,}15} \approx 4{,}62$. La vitesse vaut 600 bactéries par heure au bout d'environ 4,62 heures.

Ex. 23 ★★★ **Concentration d'un médicament**

(a) v est de la forme e^u avec $u(t) = -\frac{t^2}{2}$ et $u'(t) = -\frac{2t}{2} = -t$. Comme $(e^u)' = u'e^u$, on obtient $v'(t) = -t\, e^{-\frac{t^2}{2}}$. Attention : ce n'est pas e^{-t}, car on ne dérive pas « dans » l'exposant.

Ex. 23 **(suite)**

(b) $t \mapsto 4t$ est dérivable sur $[0\,;4]$, et v aussi (forme e^u, avec u polynôme). C est un produit $w \times v$ avec $w(t) = 4t$ et $w'(t) = 4$.
Donc C est dérivable sur $[0\,;4]$ et $C'(t) = w'(t)v(t) + w(t)v'(t) = 4e^{-\frac{t^2}{2}} + 4t \times (-t)e^{-\frac{t^2}{2}}$. On factorise par $4e^{-\frac{t^2}{2}}$: $C'(t) = 4(1-t^2)\, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

(c) Le facteur $4e^{-\frac{t^2}{2}}$ est strictement positif. On a $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$, et $1 + t > 0$ sur $[0\,;4]$.
Donc $C'(t)$ a le signe de $1 - t$: $C'(t) > 0$ sur $[0\,;1[$, $C'(1) = 0$, $C'(t) < 0$ sur $]1\,;4]$. On a $C(0) = 0$, $C(1) = 4e^{-\frac{1}{2}}$ et $C(4) = 16e^{-8}$.

t	0	1	4
C'(t)	$+$	0	$-$
C(t)	0 ↗	$4e^{-\frac{1}{2}}$	↘ $16e^{-8}$

(d) D'après le tableau, C croît sur $[0\,;1]$ puis décroît sur $[1\,;4]$. La concentration est donc maximale à $t = 1$, c'est-à-dire 1 heure après l'injection. Ce maximum vaut $C(1) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43$ mg/L.

(e) $C'(2) = 4(1-4)e^{-2} = -12e^{-2} \approx -1{,}62$. Deux heures après l'injection, la concentration baisse à une vitesse d'environ 1,62 mg/L par heure.

Ex. 24 ★★★ **Un carré d'exponentielle, deux méthodes**

(a) Noé a calculé $(u')^2$ au lieu de $(u^2)'$. La forme est u^2, avec $u(x) = e^x - 4$ et $u'(x) = e^x$, dérivable sur $[0\,;2]$. Comme $(u^2)' = 2u'u$, on obtient $f'(x) = 2e^x(e^x - 4)$.

(b) On développe : $f(x) = (e^x)^2 - 8e^x + 16 = e^{2x} - 8e^x + 16$. La dérivée de e^{2x} (forme e^{ax+b} avec $a = 2$) est $2e^{2x}$. Donc $f'(x) = 2e^{2x} - 8e^x$. On factorise par $2e^x$: $f'(x) = 2e^x(e^x - 4)$. On retrouve bien le même résultat.

(c) On a $2e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $e^x - 4$. Or $e^x - 4 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 4 \iff x \geqslant \ln 4$, car ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Comme $\ln 4 \approx 1{,}39$ est dans $[0\,;2]$: $f'(x) < 0$ sur $[0\,;\ln 4[$, $f'(\ln 4) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]\ln 4\,;2]$. Valeurs : $f(0) = (1-4)^2 = 9$, $f(\ln 4) = (4-4)^2 = 0$, $f(2) = (e^2-4)^2$.

x	0	$\ln 4$	2
f'(x)	$-$	0	$+$
f(x)	9 ↘	0	↗ $(e^2-4)^2$

(d) $f(0) = 9$ et $f'(0) = 2 \times 1 \times (1-4) = -6$. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = -6x + 9$.

Ex. 24 **(suite)**

(e) D'après le tableau, le minimum de f sur $[0\,;2]$ vaut 0 et il est atteint en $x = \ln 4$. Le maximum est atteint à l'une des bornes. On compare $f(0) = 9$ et $f(2) = (e^2-4)^2 \approx 11{,}49$. Le maximum vaut donc $(e^2-4)^2$ et il est atteint en $x = 2$.

4. *Dériver ln u*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : dériver ln u**

(a) Forme $\ln(ax+b)$ avec $5x-2>0$ sur l'intervalle : $f'(x) = \frac{5}{5x-2}$.

(b) Forme $\ln(ax+b)$ avec $a=-2$: $f'(x) = \frac{-2}{1-2x}$. N'oublie pas le signe moins.

(c) Forme $\ln u$ avec $u(x) = (x+2)^2+1 > 0$ et $u'(x) = 2x+4$: $f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+5}$.

(d) Forme $\ln u$ avec $u(x) = x^3+x > 0$ pour $x>0$ et $u'(x) = 3x^2+1$: $f'(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$.

(e) Forme $\ln u$ avec $u(x) = e^{2x}+3 > 0$ et $u'(x) = 2e^{2x}$ (forme e^{ax+b}) : $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}$.

Ex. 26 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les logarithmes**

(a) Faux. Forme $\ln(ax+b)$ avec $a=4$ et $b=0$: $(\ln(4x))' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$.

(b) Faux. Il faut $x-2>0$ (inégalité stricte) : en $x=2$, $\ln 0$ n'existe pas. L'ensemble de définition est $]2\,;+\infty[$.

(c) Vrai. Forme $u\times v$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\ln x$: $(uv)' = u'v+uv' = 2x\ln x + x^2\times\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x+1)$.

(d) Faux. Forme u^2 avec $u(x) = 1+\ln x$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$: $(u^2)' = 2u'u = \frac{2(1+\ln x)}{x}$. Le facteur u' a été oublié.

(e) Faux. Forme $\ln u$ avec $u(x) = x^4+2>0$: $(\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{4x^3}{x^4+2}$, et pas $\frac{1}{u}$.

Ex. 27 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2+9 \geqslant 9 > 0$.
Donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, sous la forme $\ln u$ avec $u(x) = x^2+9$.

(b) Non. Elle a dérivé en $\frac{1}{u}$ au lieu de $\frac{u'}{u}$. Avec $u'(x) = 2x$: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+9}$. Comme $x^2+9>0$, $f'(x)$ a le signe de $2x$: il est strictement négatif pour $x<0$.
Donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 27 **(suite)**

(c) $f'(x)<0$ sur $]-\infty\,;0[$, $f'(0)=0$ et $f'(x)>0$ sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	ln 9	↗

f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Son minimum sur $\mathbb{R}$ est $f(0) = \ln 9$, atteint en $x=0$.

(d) $f(3) = \ln 18$ et $f'(3) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. La tangente a pour équation $y = f'(3)(x-3)+f(3)$, soit $y = \frac{1}{3}x - 1 + \ln 18$.

Ex. 28 ★★☆ **Simplifier avant de dériver**

(a) Si $x > -\frac{1}{2}$, alors $2x+1>0$ et $x+3 > \frac{5}{2} > 0$. Le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positif.

(b) Sur I, $2x+1>0$ et $x+3>0$, donc $g(x) = \ln(2x+1)-\ln(x+3)$. Chaque terme est de la forme $\ln(ax+b)$: $g'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)-(2x+1)}{(2x+1)(x+3)} = \frac{5}{(2x+1)(x+3)}$.

(c) Sur I, $2x+1>0$ et $x+3>0$, donc le dénominateur est positif et $g'(x)>0$.
Donc g est strictement croissante sur I.

(d) $g(x)=0 \iff \frac{2x+1}{x+3} = 1 \iff 2x+1 = x+3 \iff x=2$, et $2\in I$. La solution est $x=2$.

Ex. 29 ★★☆ **Un tableau de variations à compléter**

(a) $(x-2)^2+4 = x^2-4x+4+4 = x^2-4x+8$. Un carré est positif, donc $x^2-4x+8 \geqslant 4 > 0$. Ainsi f est de la forme $\ln u$ avec $u>0$: elle est dérivable sur $[0\,;5]$.

(b) $u'(x) = 2x-4 = 2(x-2)$, donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2(x-2)}{x^2-4x+8}$.

(c) Le dénominateur est positif, donc $f'(x)$ a le signe de $x-2$. On a $f(0) = \ln 8$, $f(2) = \ln 4$ et $f(5) = \ln 13$.

x	0	2	5
f'(x)	−	0	+
f(x)	ln 8 ↘	ln 4	↗ ln 13

(d) Le minimum est $\ln 4$, atteint en $x=2$. Comme $13>8$ et que ln est croissante, $\ln 13 > \ln 8$: le maximum est $\ln 13$, atteint en $x=5$.

Ex. 30 ★★☆ **Le bénéfice d'un atelier de céramique**

(a) $x+1>0$ sur $[0\,;10]$. Forme $\ln(ax+b)$: $(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$.
Donc $B'(x) = \frac{12}{x+1} - 2 = \frac{12-2(x+1)}{x+1} = \frac{10-2x}{x+1} = \frac{2(5-x)}{x+1}$.

(b) Comme $x+1>0$, $B'(x)$ a le signe de $5-x$: positif sur $[0\,;5]$, négatif sur $[5\,;10]$. $B(0)=0$, $B(5)=12\ln 6-10$, $B(10)=12\ln 11-20$.

x	0	5	10
B'(x)	+	0	−
B(x)	0 ↗	12 ln 6 − 10	↘ 12 ln 11 − 20

(c) Le maximum est atteint en $x=5$, donc pour 500 bols. $B(5)=12\ln 6-10\approx 11{,}501$ milliers d'euros. Le bénéfice maximal est donc d'environ 11 501 €.

Ex. 31 ★★★ **La puissance d'une éolienne**

(a) Non. $x\ln x$ est un produit $u\times v$ avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$, $v(x)=\ln x$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Alors $(uv)'=u'v+uv'$, donc $(x\ln x)' = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x+1$. Hugo a dérivé chaque facteur séparément au lieu d'appliquer la formule du produit.

(b) Sur $[1\,;6]$, on a $x>0$: P est une différence de fonctions dérivables, donc elle est dérivable. D'après la question précédente, $P'(x)=2-(\ln x+1)=1-\ln x$. Comme ln est strictement croissante, $1-\ln x>0 \iff \ln x<1 \iff x<e$.
Donc $P'(x)>0$ sur $[1\,;e[$, $P'(e)=0$ et $P'(x)<0$ sur $]e\,;6]$
(on a bien $e\approx 2{,}72\in[1\,;6]$).

(c) $P(1)=2-1\times 0=2$; $P(e)=2e-e\times 1=e$; $P(6)=12-6\ln 6\approx 1{,}25$.

x	1	e	6
P'(x)	+	0	−
P(x)	2 ↗	e	↘ 12 − 6ln6

P est croissante sur $[1\,;e]$ et décroissante sur $[e\,;6]$.

(d) D'après le tableau, P atteint son maximum sur $[1\,;6]$ en $x=e\approx 2{,}718$, soit environ 272 tours par minute. La puissance maximale vaut $P(e)=e\approx 2{,}72$ kW.

Ex. 32 ★★★ **Du carré de ln au logarithme d'une fonction**

(a) $(\ln x)^2$ est de la forme u^2 avec $u(x)=\ln x$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$, et $(u^2)'=2uu'$.
Donc $\left((\ln x)^2\right)' = \frac{2\ln x}{x}$. Comme $(2\ln x)'=\frac{2}{x}$, on obtient $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}=\frac{2(\ln x-1)}{x}$.

Ex. 32 **(suite)**

(b) Sur $[1\,;e^2]$, on a $2>0$ et $x>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $\ln x-1$. Comme ln est strictement croissante, $\ln x-1<0$ sur $[1\,;e[$, $=0$ en e et >0 sur $]e\,;e^2]$. $f(1)=0$; $f(e)=1-2=-1$; $f(e^2)=4-4=0$.

x	1	e	e²
f'(x)	−	0	+
f(x)	0 ↘	−1	↗ 0

f est décroissante sur $[1\,;e]$ et croissante sur $[e\,;e^2]$.

(c) Non. Pour que $\ln(f(x)+1)$ existe, il faut $f(x)+1>0$, pas seulement $\geqslant 0$. Or $f(e)+1=-1+1=0$ et $\ln 0$ n'existe pas.
Donc k n'est pas définie en e : Lucas ne peut pas l'étudier sur tout $[1\,;e^2]$.

(d) D'après le tableau, $f(x)\geqslant -1$, donc $f(x)+2\geqslant 1>0$ sur $[1\,;e^2]$. Comme $u=f+2$ est dérivable et strictement positive, $g=\ln u$ est dérivable et $g'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2(\ln x-1)}{x((\ln x)^2-2\ln x+2)}$. Sur $[1\,;e^2]$, $x>0$ et $(\ln x)^2-2\ln x+2=f(x)+2\geqslant 1>0$: le dénominateur est strictement positif, donc $g'(x)$ a le signe de $\ln x-1$, c'est-à-dire celui de $f'(x)$. Ainsi g est décroissante sur $[1\,;e]$ et croissante sur $[e\,;e^2]$, avec $g(1)=\ln 2$, $g(e)=\ln 1=0$ et $g(e^2)=\ln 2$.

5. *Étudier une fonction : signe de f', variations, extremums*

Ex. 33 ★☆☆ **Du signe de f′ aux variations**

(a) $e^{4x}>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x+5$: $f'(x)<0$ sur $]-\infty\,;-5[$ et $f'(x)>0$ sur $]-5\,;+\infty[$. f est décroissante sur $]-\infty\,;-5]$ et croissante sur $[-5\,;+\infty[$.

(b) Un carré est positif, donc $f'(x)=-4(x+1)^2\leqslant 0$, et f' ne s'annule qu'en -1. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: pas d'extremum en -1, car f' ne change pas de signe.

(c) $x^2>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $2-x$: $f'(x)>0$ sur $]0\,;2[$ et $f'(x)<0$ sur $]2\,;+\infty[$. f est croissante sur $]0\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

(d) $\ln x<0 \iff 0<x<1$ et $\ln x>0 \iff x>1$. f est décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

(e) $e^{-x}>0$, donc $f'(x)$ a le signe du trinôme x^2-4x+3, de racines 1 et 3 ($\Delta=4$), avec $a=1>0$: il est positif à l'extérieur des racines. f est croissante sur $]-\infty\,;1]$, décroissante sur $[1\,;3]$, croissante sur $[3\,;+\infty[$.

Ex. 33 **(suite)**

(f) Sur I, $2x+1>0$ et $3>0$, donc $f'(x)>0$: f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Ex. 34 ★☆☆ **Dériver, factoriser, trouver où f′ s'annule**

(a) Forme $u\times v$: $f'(x)=1\times e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$. Comme $e^x>0$, $f'(x)=0 \iff x=-3$.

(b) Forme $u\times v$ avec $(e^{-x})'=-e^{-x}$: $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$. $f'(x)=0 \iff x=0$ ou $x=2$.

(c) $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. $f'(x)=0 \iff x=1$.

(d) Forme e^{ax+b} : $f'(x)=3e^{3x}-3=3(e^{3x}-1)$. $f'(x)=0 \iff e^{3x}=1 \iff x=0$.

(e) Forme $u\times v$: $f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$. $f'(x)=0 \iff \ln x=-1 \iff x=e^{-1}$.

(f) Forme $\ln u$ avec $u(x)=x^2+4>0$: $f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$. $f'(x)=0 \iff x=0$.

Ex. 35 ★★☆ **L'erreur de Lucas**

(a) f est un polynôme, dérivable sur $[-4;0]$: $f'(x)=3x^2+12x+12=3(x^2+4x+4)=3(x+2)^2$.

(b) Non. Un carré est positif, donc $f'(x)\geqslant 0$, et f' ne s'annule qu'en -2, sans changer de signe. f est strictement croissante sur $[-4;0]$: il n'y a pas d'extremum en -2.

(c) $f(-4)=-64+96-48-2=-18$, $f(-2)=-8+24-24-2=-10$, $f(0)=-2$.

x	-4	-2	0
f'(x)	$+$	0	$+$
f(x)	-18 ↗	-10	↗ -2

(d) f est croissante sur $[-4;0]$, donc son maximum est atteint à la borne $x=0$: il vaut $f(0)=-2$.

Ex. 36 ★★☆ **Étude complète de (3 − x)e^(2x)**

(a) $f=u\times v$ avec $u(x)=3-x$ et $v(x)=e^{2x}$ (forme e^{ax+b}), toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) $u'(x)=-1$ et $v'(x)=2e^{2x}$. $f'(x)=-e^{2x}+(3-x)\times 2e^{2x}=(-1+6-2x)e^{2x}=(5-2x)e^{2x}$.

(c) $e^{2x}>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $5-2x$: $f'(x)>0$ pour $x<\frac{5}{2}$, $f'(\frac{5}{2})=0$ et $f'(x)<0$ pour $x>\frac{5}{2}$.

Ex. 36 **(suite)**

(d) $f(\frac{5}{2})=\frac{1}{2}e^5$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	
f(x)		↗	$\frac{1}{2}e^5$	↘	

f' passe de $+$ à $-$: f admet un maximum en $\frac{5}{2}$, égal à $\frac{1}{2}e^5\approx 74{,}2$.

Ex. 37 ★★☆ **Concentration d'un médicament**

(a) Forme $u\times v$ avec $u(t)=8t$ et $v(t)=e^{-0{,}5t}$, $v'(t)=-0{,}5e^{-0{,}5t}$. $C'(t)=8e^{-0{,}5t}-4t\,e^{-0{,}5t}=4(2-t)e^{-0{,}5t}$.

(b) $4e^{-0{,}5t}>0$, donc $C'(t)$ a le signe de $2-t$: positif sur $[0;2[$, négatif sur $]2;10]$. $C(0)=0$, $C(2)=16e^{-1}$, $C(10)=80e^{-5}$.

t	0	2	10
C'(t)	$+$	0	$-$
C(t)	0 ↗	$16e^{-1}$	↘ $80e^{-5}$

(c) C est croissante sur $[0;2]$, puis décroissante sur $[2;10]$: la concentration est maximale au bout de 2 heures.

(d) Le maximum vaut $C(2)=16e^{-1}\approx 5{,}89$ mg/L.

Ex. 38 ★★☆ **Vrai ou faux : x² − 2 ln x**

(a) Vrai. $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

(b) Vrai. Pour $x>0$: $x>0$ et $x+1>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x-1$, négatif sur $]0;1[$. f est décroissante sur $]0;1]$.

(c) Faux. f' passe de $-$ à $+$ en 1 : c'est un minimum local, égal à $f(1)=1-2\ln 1=1$.

(d) Faux. f décroît sur $[\frac{1}{2};1]$ et croît sur $[1;2]$: le maximum est en une borne. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+2\ln 2\approx 1{,}64$ et $f(2)=4-2\ln 2\approx 2{,}61$: le maximum est atteint en 2.

Ex. 39 ★★★ **Extremums de x² − 6x + 4 ln x**

(a) $x\mapsto x^2-6x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $]0;+\infty[$. Par somme, f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$. On a $f'(x)=2x-6+\frac{4}{x}=\frac{2x^2-6x+4}{x}=\frac{2(x^2-3x+2)}{x}$. Le trinôme x^2-3x+2 a pour racines 1 et 2 (car $1-3+2=0$ et $1\times 2=2$).
Donc $f'(x)=\frac{2(x-1)(x-2)}{x}$.

Ex. 39 (suite)

(b) Sur $]0\,;+\infty[$, on a $x>0$ et $2>0$: $f'(x)$ a donc le signe de $(x-1)(x-2)$. C'est un trinôme de racines 1 et 2, avec $a=1>0$. Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Ainsi $f'(x)>0$ sur $]0\,;1[$, $f'(x)<0$ sur $]1\,;2[$ et $f'(x)>0$ sur $]2\,;+\infty[$. En 1, f' s'annule et passe de $+$ à $-$: maximum local $f(1)=1-6+4\ln 1=-5$. En 2, f' s'annule et passe de $-$ à $+$: minimum local $f(2)=4-12+4\ln 2=-8+4\ln 2$.

(c) $f(4)=16-24+4\ln 4=-8+8\ln 2$ (car $\ln 4=2\ln 2$).

x	1	2	4
f'(x)	$0\,-$	0	$+$
f(x)	$-5\,\searrow$	$-8+4\ln 2$	$\nearrow -8+8\ln 2$

f est décroissante sur $[1\,;2]$ et croissante sur $[2\,;4]$.

(d) Non. -5 est un maximum local : f ne dépasse pas -5 près de 1. Mais f croît sur $[2\,;4]$ et $f(4)=-8+8\ln 2\approx -2{,}45>-5$. On a donc $f(4)>-5$: l'affirmation est fausse sur $[1\,;4]$. Il faut toujours comparer avec les valeurs aux bornes.

(e) D'après la question 2, f croît sur $[\frac{1}{2}\,;1]$, décroît sur $[1\,;2]$ et croît sur $[2\,;3]$. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-3+4\ln\frac{1}{2}=-\frac{11}{4}-4\ln 2\approx -5{,}52$ et $f(3)=-9+4\ln 3\approx -4{,}61$. Maximum : on compare $f(1)=-5$ et $f(3)$; il vaut $-9+4\ln 3\approx -4{,}61$, atteint en 3. Minimum : on compare $f(\frac{1}{2})$ et $f(2)\approx -5{,}23$; il vaut $-\frac{11}{4}-4\ln 2\approx -5{,}52$, atteint en $\frac{1}{2}$.

Ex. 40 ★★★ Le coût moyen minimal de l'atelier de Clémence

(a) ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc sur $[1\,;20]$. $(\ln x)^2$ est de la forme u^2 avec $u(x)=\ln x$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$: sa dérivée est $2u'u=\frac{2\ln x}{x}$. Par somme, C est dérivable sur $[1\,;20]$ et $C'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}=\frac{2\ln x-2}{x}=\frac{2(\ln x-1)}{x}$.

(b) $\ln x-1>0 \iff \ln x>1 \iff x>e$, car ln est strictement croissante et $\ln e=1$; et $e\approx 2{,}72$ est bien dans $[1\,;20]$. Sur $[1\,;20]$, on a $x>0$ et $2>0$: $C'(x)$ a donc le signe de $\ln x-1$. Ainsi $C'(x)<0$ sur $[1\,;e[$, $C'(e)=0$ et $C'(x)>0$ sur $]e\,;20]$. Valeurs : $C(1)=0-0+3=3$; $C(e)=1-2+3=2$; $C(20)=(\ln 20)^2-2\ln 20+3$.

x	1	e	20
C'(x)	$-$	0	$+$
C(x)	$3\,\searrow$	2	$\nearrow (\ln 20)^2-2\ln 20+3$

Ex. 40 (suite)

(c) C' s'annule en e en passant de $-$ à $+$: C admet donc un minimum en $x=e$ sur $[1\,;20]$. Or x est en centaines : il faut fabriquer $100e\approx 272$ bougies par semaine. Le coût moyen minimal vaut alors $C(e)=2$ euros par bougie.

(d) Faux. C est croissante sur $[e\,;20]$ et $C(20)=(\ln 20)^2-2\ln 20+3\approx 5{,}98$. Pour 2 000 bougies, le coût moyen est donc d'environ 5,98 € par bougie, ce qui est plus que 3 €. L'associé a seulement regardé $C(1)=3$, sans comparer avec l'autre borne.