49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Dérivées usuelles, sommes et multiples

À retenir : Réécris $\frac{k}{x^n} = kx^{-n}$, puis $(x^n)' = nx^{n-1}$. Le facteur constant reste, une constante seule (π^2, $\sqrt{2}$) se dérive en 0. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$. Ex. : $(\frac{2}{x^4})' = -\frac{8}{x^5}$.

Ex. 1 ★☆☆ **Dériver des polynômes terme à terme** — Chaque fonction est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, calcule sa dérivée.

(a) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 11$ (b) $g(x) = \frac{x}{4} - \pi^2$

(c) $h(x) = \sqrt{2}\,x^3 + 5x$ (d) $k(x) = -\frac{x^4}{8} + 3x^2 - x$

(e) $m(x) = 7 - 2x + \frac{x^6}{3}$ (f) $p(x) = \frac{3}{5}x^5 - \sqrt{7}$

Ex. 2 ★☆☆ **Puissances négatives, inverse et racine carrée** — Chaque fonction est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, calcule sa dérivée. Réécris d'abord les quotients sous la forme kx^n.

(a) $f(x) = \frac{5}{x^2}$ (b) $g(x) = x^{-5} + \frac{2}{x}$

(c) $h(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ (d) $k(x) = \frac{1}{2x^3}$

(e) $m(x) = 8\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - 9$ (f) $n(x) = -\frac{7}{x^4} + \sqrt{3}$

Ex. 3 ★★☆ **Nombre dérivé et tangentes** — On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{8}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

(a) Justifie que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, puis calcule $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

(b) Calcule $f'(1)$ et $f(1)$, puis donne l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(c) Calcule $f'(4)$ et $f(4)$. Que peux-tu dire de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 ? Donne son équation.

(d) Marius affirme : « Le nombre $f'(4)$ et la fonction f', c'est la même chose. » A-t-il raison ? Justifie à l'aide des questions précédentes.

Ex. 4 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Chaque élève a fait une erreur. Repère-la, explique-la, puis écris la bonne réponse.

(a) Inès : « $(x^{-4})' = -4x^{-3}$ ».

(b) Noé : « Pour $x \neq 0$, $\left(\frac{9}{x}\right)' = \frac{9}{x^2}$ ».

(c) Sacha : « Pour $x \neq 0$, $\left(\frac{2}{x^3}\right)' = \frac{2}{3x^2}$ ».

(d) Jade : « La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut 1. »

Ex. 4 (suite)

(e) Rayan : « $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout réel $x \geqslant 0$. »

Ex. 5 ★★★ **Retrouver une fonction à partir de sa courbe** — Soient a et b deux réels. On définit f sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On sait que $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(4\,;4)$ et que sa tangente en A a pour coefficient directeur 2.

(a) Justifie que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, puis exprime $f'(x)$ en fonction de a et b pour tout réel $x > 0$.

(b) Traduis les deux informations sur A par deux équations d'inconnues a et b, écrites sans fraction.

(c) Résous le système obtenu, puis donne l'expression de $f(x)$.

(d) Avec ces valeurs, calcule $f(16)$ et $f'(16)$, puis détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 16.

Ex. 6 ★★★ **Valeur absolue, racine carrée et dérivabilité** — On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x| + 2x$ et la fonction k définie sur $[0\,;+\infty[$ par $k(x) = \sqrt{x} - 3|x| + 2\pi$.

(a) Écris $g(x)$ sans valeur absolue, d'abord pour $x > 0$, puis pour $x < 0$.

(b) Calcule $g'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, puis pour tout réel x de $]-\infty\,;0[$.

(c) Pour $h \neq 0$, calcule $\frac{g(h)-g(0)}{h}$ selon le signe de h. Explique pourquoi g n'est pas dérivable en 0.

(d) Simplifie $k(x)$ sur $[0\,;+\infty[$. Sur quel intervalle k est-elle dérivable ? Justifie, puis calcule $k'(x)$.

(e) Détermine le réel $a > 0$ tel que la tangente à la courbe de k au point d'abscisse a soit horizontale, puis calcule $k(a)$.

Ex. 7 ★★★ **Minimiser un coût moyen** — Un atelier fabrique entre 100 et 2 000 lampes par jour. Pour x centaines de lampes, avec $x \in [1\,;20]$, le coût moyen de fabrication d'une lampe, en euros, est $CM(x) = \frac{x}{2} + 3 + \frac{32}{x}$.

(a) Justifie que CM est dérivable sur $[1\,;20]$. Calcule $CM'(x)$ et écris-le sous la forme d'un seul quotient.

(b) Étudie le signe de $CM'(x)$ sur $[1\,;20]$.

(c) Dresse le tableau de variations de CM sur $[1\,;20]$, en indiquant les valeurs aux bornes et à l'extremum.

(d) Combien de lampes l'atelier doit-il fabriquer pour que le coût moyen soit minimal ? Quel est ce coût minimal ?

Ex. 7 **(suite)**

(e) Déduis-en que pour tout réel x de $[1\,;20]$, on a $\frac{x}{2}+\frac{32}{x}\geqslant 8$.

2. *Dérivée d'un produit*

À retenir : $(uv)'=u'v+uv'$, jamais $u'v'$: $(x\times x)'=2x$, pas 1. J'écris u, u', v, v' à part. Constante : $(5x^4)'=20x^3$, sans la formule. Avec $\sqrt{x}$: dérivable sur $]0\,;+\infty[$, je réduis sur $2\sqrt{x}$.

Ex. 8 ★☆☆ **Dériver des produits en ligne** — Les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$ en écrivant u, u', v, v' à part. N'utilise la formule du produit que si elle est utile.

(a) $f(x)=(3x-1)(x+4)$

(b) $f(x)=x^2(5-x)$

(c) $f(x)=-7x^3$

(d) $f(x)=(x^3+2)(4x-1)$

(e) $f(x)=(2x+3)(2x-3)$: développe d'abord, puis dérive.

(f) $f(x)=(1-x)(x^2+x+1)$: dérive avec la formule du produit, puis vérifie en développant $f(x)$.

(g) $f(x)=x(x+1)(x-2)$: regroupe $u(x)=x(x+1)$ et $v(x)=x-2$.

Ex. 9 ★☆☆ **Produits avec une racine carrée** — Chaque fonction est définie sur $[0\,;+\infty[$. Donne l'intervalle sur lequel f est dérivable, puis calcule $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient de dénominateur $2\sqrt{x}$.

(a) $f(x)=x\sqrt{x}$ (b) $f(x)=(x-4)\sqrt{x}$

(c) $f(x)=(x^2-3x)\sqrt{x}$ (d) $f(x)=x^2\sqrt{x}$

(e) $f(x)=5\sqrt{x}$

Ex. 10 ★★☆ **Démonstration et erreur de Léna** — Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, $a\in I$ et $h\neq 0$ tel que $a+h\in I$. Léna affirme : « $(uv)'=u'v'$. Par exemple, $(x^2\times x^2)'=2x\times 2x=4x^2$. »

(a) En ajoutant et en retranchant $u(a)v(a+h)$, complète : $\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+u(a)\times\ldots$

(b) Quand h tend vers 0, vers quoi tend chaque morceau ? Conclus sur $(uv)'$.

(c) Calcule $(x^2\times x^2)'$ avec la formule du produit, puis $(x^4)'$ avec la formule de $(x^n)'$.

(d) Léna a-t-elle raison ? Justifie en comparant les valeurs en $x=2$.

Ex. 11 ★★☆ **Du produit au tableau de variations** — f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-9)(x+3)$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calcule $f'(x)$ avec la formule du produit.

(b) Contrôle ton résultat : développe $f(x)$, puis dérive.

(c) Factorise $f'(x)$.

(d) Étudie le signe de $f'(x)$, puis dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

(e) Justifie que f admet un minimum local et donne sa valeur.

Ex. 12 ★★★ **La boîte de Noé** — Noé a une feuille de carton de 16 cm sur 10 cm. Il découpe un carré de côté x cm à chaque coin, puis il relève les bords pour obtenir une boîte sans couvercle. On note $V(x)$ le volume de la boîte, en cm³.

(a) Explique pourquoi $x\in[0\,;5]$, puis montre que $V(x)=4x(8-x)(5-x)$.

(b) On pose $u(x)=x$ et $v(x)=(8-x)(5-x)$. Écris u' et v' à part (calcule v' avec la formule du produit), puis calcule $V'(x)$ sans appliquer la formule au facteur 4.

(c) Développe $V(x)$, puis dérive la forme développée pour vérifier ton résultat.

(d) Factorise $V'(x)$ à l'aide du discriminant. Étudie son signe sur $[0\,;5]$, puis dresse le tableau de variations de V sur $[0\,;5]$.

(e) Quelle valeur de x Noé doit-il choisir pour que le volume soit maximal ? Donne les dimensions de la boîte et son volume maximal.

Ex. 13 ★★★ **Une courbe au-dessus de sa tangente** — f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

(a) Justifie que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, puis calcule $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient de dénominateur $2\sqrt{x}$.

(b) Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;9]$, puis donne le minimum de f sur cet intervalle.

(c) Détermine une équation de T.

(d) Pour $x\geqslant 0$, on note $d(x)$ la différence entre $f(x)$ et l'ordonnée du point de T d'abscisse x. Montre que, pour $x>0$, $d'(x)=\frac{3(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{4\sqrt{x}}$.

(e) Déduis-en les variations de d sur $]0\,;+\infty[$ puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 14 ★★★ **Tangente horizontale sans extremum** — m est un nombre réel. f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=(x^2+m)(x-3)$. Pour dériver un produit, Jules multiplie les dérivées des deux facteurs.

(a) Jules obtient $f_m'(x)=2x\times 1=2x$. Calcule $f_m'(x)$ en écrivant u, u', v, v' à part. Jules a-t-il raison ? Justifie.

Ex. 14 (suite)

(b) Détermine la valeur de m pour laquelle $\mathcal{C}_{f_m}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

(c) Pour cette valeur de m, Ambre affirme : « f_m admet un extremum local en 1 ». Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Détermine les valeurs de m pour lesquelles f_m admet deux extremums locaux. Justifie.

3. *Dérivée de l'inverse et d'un quotient*

À retenir : Je justifie $v(x) \neq 0$, puis $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (dans cet ordre, u entre parenthèses, v^2 non développé) et $\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{kv'}{v^2}$. Ex. : $\left(\frac{3}{x+1}\right)' = -\frac{3}{(x+1)^2}$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : inverse, constante sur v, ou pas de quotient du tout** — Chaque fonction est dérivable sur l'intervalle indiqué. Calcule $f'(x)$ en choisissant la méthode la plus courte. Attention : il n'y a pas toujours de quotient à dériver.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{3x-4}$ sur $]\frac{4}{3}\,;+\infty[$.

(b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+7}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \dfrac{-2}{x^3+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ sur $]-\infty\,;2[$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : dériver un quotient** — Chaque fonction est dérivable sur l'intervalle indiqué. Calcule $f'(x)$: écris le numérateur réduit et laisse le dénominateur sous la forme v^2.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ sur $]3\,;+\infty[$.

(b) $f(x) = \dfrac{4-x}{2x+5}$ sur $]-\frac{5}{2}\,;+\infty[$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x+4}$ sur $]-4\,;+\infty[$.

(d) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 17 ★★☆ **Quatre copies à corriger** — Des élèves dérivent des fonctions sur un intervalle où le dénominateur ne s'annule pas. Pour chaque copie, réponds : l'élève a-t-il raison ? Justifie, puis donne la bonne dérivée.

(a) Inès : pour $f(x) = \frac{x^2+4}{3x-1}$ sur $]\frac{1}{3}\,;+\infty[$, elle écrit $f'(x) = \frac{2x}{3}$.

(b) Malo : pour $g(x) = \frac{5x-1}{x+6}$ sur $]-6\,;+\infty[$, il écrit $g'(x) = \frac{(5x-1)\times 1 - 5(x+6)}{(x+6)^2} = \frac{-31}{(x+6)^2}$.

Ex. 17 (suite)

(c) Léna : pour $h(x) = \frac{2x+1}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$, elle écrit $h'(x) = \frac{2x^2+6-4x^2+2x}{x^2+3}$.

(d) Yanis : pour $p(x) = \frac{4}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$, il écrit $p'(x) = -\frac{4}{(x^2+1)^2}$.

Ex. 18 ★★☆ **Trinôme au dénominateur : où dériver ?** — On pose $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f.

(a) À l'aide du discriminant, détermine les valeurs interdites de f. Donne les intervalles sur lesquels f est dérivable.

(b) Justifie que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calcule $g'(x)$ avec un numérateur réduit.

(c) Sans développer le dénominateur, étudie le signe de $g'(x)$ à l'aide du discriminant. Déduis-en les variations de g sur $\mathbb{R}$ et ses extremums locaux.

(d) Calcule $f'(x)$ sur chacun des intervalles trouvés à la première question.

(e) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Ex. 19 ★★★ **Coût moyen d'un atelier de céramique** — Un atelier fabrique x centaines de bols par jour, avec $x \in [1\,;20]$. Le coût total, en centaines d'euros, est $C(x) = \frac{x^2+6x+64}{x}$. Le coût moyen d'un bol, en euros, est $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}^2$.

(a) Tom affirme : « C est un quotient, il faut la formule de $\left(\frac{u}{v}\right)'$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $C'(x)$.

(b) Léa écrit : « $C_M'(x) = \frac{C'(x)}{1}$ car la dérivée de x est 1 ». A-t-elle raison ? Justifie, puis calcule $C_M'(x)$ avec la formule du quotient.

(c) Écris $C_M(x)$ comme une somme de trois termes, puis retrouve $C_M'(x)$ sans la formule du quotient.

(d) Étudie le signe de $C_M'(x)$, puis dresse le tableau de variations de C_M sur $[1\,;20]$.

(e) Quelle production minimise le coût moyen ? Montre que pour cette production, le coût moyen est égal au coût marginal $C'(x)$.

Ex. 20 ★★★ **Fonction homographique et tangente** — On pose $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ sur $I =]-2\,;+\infty[$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Plus généralement, pour des réels a, b, c, d avec $c \neq 0$, on pose $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sur un intervalle où $cx+d \neq 0$.

(a) Démontre que $g'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Où dois-tu placer des parenthèses en développant le numérateur ?

(b) Déduis-en $f'(x)$, puis le sens de variation de f sur I. Nina trouve $f'(x) = \frac{-9}{(x+2)^2}$: explique son erreur.

(c) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Ex. 20 (suite)

(d) Pour x dans I, on note $d(x)$ la différence entre $f(x)$ et l'ordonnée du point de T d'abscisse x. Écris $d(x)$ comme un seul quotient au numérateur factorisé. Déduis-en la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

(e) Détermine les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 0{,}25x + 7$.

Ex. 21 ★★★ **Concentration d'un médicament : deux modèles** — Après la prise d'un médicament, sa concentration dans le sang, en mg/L, est modélisée par $C(t) = \frac{30t}{t^2+9}$, où $t \in [0\,;10]$ est le temps en heures. Le médicament est efficace quand sa concentration est d'au moins 3 mg/L.

(a) Justifie que C est dérivable sur $[0\,;10]$, puis calcule $C'(t)$ avec un numérateur factorisé.

(b) Rayan développe le dénominateur de $C'(t)$. Explique pourquoi c'est inutile, puis dresse le tableau de variations de C sur $[0\,;10]$.

(c) Pendant combien de temps le médicament est-il efficace ? Justifie par un calcul.

(d) Un second modèle donne $D(t) = \frac{40}{t^2-2t+10}$. Justifie avec le discriminant que D est dérivable sur $[0\,;10]$, puis calcule $D'(t)$ sans utiliser la formule du quotient.

(e) Lequel des deux modèles donne le pic de concentration le plus élevé ? Justifie par l'étude des variations de D sur $[0\,;10]$.

4. *Signe de la dérivée et sens de variation*

À retenir : Sur un intervalle I : si $f' \geqslant 0$, alors f est croissante ; si $f' \leqslant 0$, alors f est décroissante ; f est constante si et seulement si $f' = 0$. On étudie le signe de $f'(x)$ factorisée, pas celui de f. Un zéro isolé ne change rien : $(x^3)' = 3x^2$ et x^3 croît sur $\mathbb{R}$.

Ex. 22 ★☆☆ **Du signe de f' au sens de variation** — Dans chaque cas, f est dérivable sur l'intervalle indiqué et on donne $f'(x)$ ou son signe. Étudie le signe de $f'(x)$, puis donne le sens de variation de f.

(a) $f'(x) = 7 - 2x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f'(x) = \frac{-5}{(x+1)^2}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

(c) $f'(x) = -2(x+4)(x-6)$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f'(x) = \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) Le signe de $f'(x)$ sur $[-4\,;5]$ est donné par le tableau :

x	−4		1		5
f'(x)		+	0	+	

(f) $f'(x) = 0$ pour tout réel x de $[-2\,;5]$.

Ex. 23 ★☆☆ **Dériver, factoriser, trouver où f' s'annule** — Chaque fonction est dérivable sur l'intervalle indiqué. Calcule $f'(x)$, factorise-le, puis donne les réels de l'intervalle où $f'(x)$ s'annule.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x^4 - 8x^2$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = x + \frac{9}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

(f) $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux sur le théorème des variations** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse par une preuve ou par un contre-exemple.

(a) Pour $g(x) = x - \frac{4}{x}$, on a $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, donc g est croissante sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

(b) La fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.

(c) La fonction $h(x) = x^2 - 4$ est négative sur $[0\,;2]$, donc h est décroissante sur $[0\,;2]$.

(d) La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (x+2)(x-5) - x^2 + 3x$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 25 ★★☆ **Étude complète sur un segment** — On considère la fonction f définie sur $[-5\,;0]$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $[-5\,;0]$ et calcule $f'(x)$.

(b) À l'aide du discriminant, étudie le signe de $f'(x)$ sur $[-5\,;0]$.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[-5\,;0]$, avec les images.

(d) Donne le maximum et le minimum de f sur $[-5\,;0]$, et précise où ils sont atteints.

Ex. 26 ★★★ **Un quotient sur une réunion d'intervalles** — Soit f la fonction définie sur $D =]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+5}{x-2}$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$, puis calcule $f'(x)$ avec un numérateur factorisé.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ sur D en justifiant le rôle du dénominateur.

(c) Dresse le tableau de variations de f, avec les images aux points où f' s'annule (sans limites).

(d) Léo affirme : « f est décroissante sur $[-1\,;2[\cup]2\,;5]$. » Cette affirmation est-elle exacte ? Justifie par un calcul.

(e) Maëlle compare les extremums locaux de f et pense s'être trompée. Que constate-t-on ? Explique pourquoi ce n'est pas une erreur.

Ex. 27 ★★★ **Un paramètre pour une fonction croissante** — Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^3 + mx^2 + 3x - 1$.

(a) Justifie que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $f_m'(x)$, puis le discriminant Δ de ce trinôme en fonction de m, sous forme factorisée.

(b) On prend $m = -5$. Étudie le signe de $f_{-5}'(x)$, puis dresse le tableau de variations de f_{-5} avec les valeurs exactes des extremums locaux.

(c) On prend $m = 3$. Noé affirme : « $f_3'(-1) = 0$, donc f_3 n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$. » Cette affirmation est-elle exacte ? Justifie.

(d) Détermine tous les réels m pour lesquels f_m est croissante sur $\mathbb{R}$. Justifie les deux sens de l'équivalence.

Ex. 28 ★★★ **Une dérivée qui s'annule sans changer de signe** — Soit f la fonction définie sur $[-3\,;4]$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$.

(a) Justifie que f est dérivable sur $[-3\,;4]$, calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = 4(x+1)(x-2)^2$.

(b) Sans développer, étudie le signe de $f'(x)$ sur $[-3\,;4]$.

(c) Sami affirme : « $f'(2) = 0$, donc f admet un extremum local en 2. » Cette affirmation est-elle exacte ? Justifie.

(d) Dresse le tableau de variations de f, puis donne le minimum et le maximum de f sur $[-3\,;4]$.

(e) Clara affirme : « $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-3\,;-1]$, donc $f(x) \leqslant 0$ sur $[-3\,;-1]$. » Cette affirmation est-elle exacte ? Justifie.

5. *Tableau de variations et extremums*

À retenir : Extremum local en a : $f'(a) = 0$ ET f' change de signe en a (+ puis − : maximum ; − puis + : minimum). Contre-exemple : x^3 en 0. Le maximum est la valeur $f(a)$, atteint en $x = a$. Sur un segment, compare aussi avec les bornes.

Ex. 29 ★☆☆ **Lire le signe de f′ autour de a** — Dans chaque cas, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne la dérivée. Dis si f admet un extremum local au point indiqué, puis précise s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Justifie par le signe de f'.

(a) $f'(x) = 4x - 12$: f admet-elle un extremum local en 3 ?

(b) $f'(x) = -2x + 5$: f admet-elle un extremum local en $\frac{5}{2}$?

(c) $f'(x) = 3(x+1)^2$: f admet-elle un extremum local en -1 ?

(d) $f'(x) = x(x-4)$: f admet-elle un extremum local en 4 ?

(e) $f'(x) = -x^2 + 9$: f admet-elle un extremum local en -3 ?

Ex. 29 (suite)

(f) $f'(x) = x^2 + 1$: f admet-elle un extremum local en 0 ?

Ex. 30 ★★☆ **Valeur de l'extremum et abscisse** — Pour chaque fonction, sur l'intervalle donné : résous $f'(x) = 0$, dis si l'extremum local est un maximum ou un minimum, puis donne sa valeur et l'abscisse où il est atteint.

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 11$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x$ sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $f(x) = 12x - x^3$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 31 ★★☆ **Maximum local ou maximum sur le segment ?** — f est définie sur $[-2\,;6]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

(a) Calcule $f'(x)$, puis étudie son signe sur $[-2\,;6]$.

(b) Dresse le tableau de variations de f sur $[-2\,;6]$, avec les valeurs exactes.

(c) Inès affirme : « Le maximum de f sur $[-2\,;6]$ est atteint là où f' s'annule en passant de + à −. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Donne le minimum de f sur $[-2\,;6]$ et l'abscisse où il est atteint, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point.

Ex. 32 ★★☆ **Placer le minimum avec un paramètre** — k est un réel strictement positif. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+k}{x}$.

(a) Calcule $f'(x)$ et écris-la sous la forme d'un seul quotient.

(b) Détermine k pour que f admette un extremum en $x = 3$. Précise sa nature et sa valeur.

(c) Dans cette question, $k = 7$. Yanis affirme : « Le minimum de f est $\sqrt{7}$. » A-t-il raison ? Justifie, puis donne le minimum exact et son arrondi à 0,01.

(d) Avec $k = 7$, détermine le maximum de f sur $[1\,;7]$ et la ou les abscisses où il est atteint.

Ex. 33 ★★★ **Une tangente horizontale sans extremum** — f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

(a) Calcule $f'(x)$, puis factorise-la.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresse le tableau de variations de f avec les valeurs exactes.

(c) Lina affirme : « $f'(0) = 0$, donc f admet un extremum en 0. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Donne le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et l'abscisse où il est atteint.

(e) Déduis-en que, pour tout réel x, $x^4 + 27 \geqslant 4x^3$. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?

Ex. 34 ★★★ **Retrouver une fonction grâce à sa tangente horizontale** — a et b sont deux réels. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(2\,;-3)$ et admet en A une tangente horizontale.

(a) Calcule $f'(x)$ en fonction de a et b.

(b) Traduis les deux informations sur A par deux équations, puis résous le système pour trouver a et b.

(c) Avec ces valeurs, étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

(d) Justifie que f admet un maximum local, puis donne sa valeur et l'abscisse où il est atteint.

(e) Hugo affirme : « La tangente en A est horizontale, donc -3 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **Concentration d'un médicament** — Maëlle prend un médicament. La concentration dans son sang, en mg/L, t heures après la prise, est $C(t) = \frac{12t}{t^2+3}$ pour $t \in [0\,;5]$.

(a) Justifie que C est dérivable sur $[0\,;5]$, calcule $C'(t)$, puis factorise son numérateur.

(b) Étudie le signe de $C'(t)$ sur $[0\,;5]$, puis dresse le tableau de variations de C avec les valeurs exactes.

(c) Donne la concentration maximale, exacte puis au centième, et l'instant où elle est atteinte, en h et min.

(d) Le médicament est efficace quand $C(t) \geqslant 3$. Pendant combien de temps est-il efficace ?

6. *Problèmes d'optimisation*

À retenir : Choisis x et son intervalle concret, puis exprime la grandeur avec x seul. Étudie le signe de la dérivée sur cet intervalle : si elle ne s'y annule pas, l'optimum est à une borne. Réponds à la question posée, avec l'unité.

Ex. 36 ★☆☆ **Mettre un problème en équation** — Pour chaque situation, donne l'intervalle de x imposé par la situation (s'il n'est pas donné). Exprime ensuite la grandeur demandée en fonction de x seul.

(a) Un rectangle a pour périmètre 20 cm et un côté de x cm. Exprime son aire $A(x)$.

(b) Un rectangle a pour aire 50 m² et un côté de x m. Exprime son périmètre $P(x)$.

(c) Dans une plaque de 40 cm sur 24 cm, on découpe aux coins quatre carrés de côté x cm. On obtient une boîte sans couvercle. Exprime son volume $V(x)$.

(d) Une boîte fermée, à base carrée de côté x dm, a un volume de 27 dm³. Exprime l'aire totale $S(x)$ de ses six faces.

(e) Produire x objets ($1 \leqslant x \leqslant 30$) coûte $C(x) = x^2 + 6x + 49$ euros. Exprime le coût moyen $C_M(x)$ d'un objet.

Ex. 36 (suite)

(f) Un objet se vend 40 euros. Produire x objets ($0 \leqslant x \leqslant 15$) coûte $C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 20$ euros. Exprime le bénéfice $B(x)$.

Ex. 37 ★☆☆ **La racine est-elle dans l'intervalle ?** — Dans chaque cas, on donne la dérivée d'une grandeur sur l'intervalle imposé par la situation. Étudie son signe, puis réponds à la question.

(a) $A'(x) = 12 - 2x$ sur $[0\,;10]$. Pour quelle valeur de x l'aire A est-elle maximale ?

(b) $A'(x) = 12 - 2x$ sur $[0\,;4]$. Pour quelle valeur de x l'aire A est-elle maximale ?

(c) $P'(x) = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$. Pour quelle valeur de x le périmètre P est-il minimal ?

(d) $C'_M(x) = 1 - \frac{64}{x^2}$ sur $[10\,;40]$. Pour combien d'objets le coût moyen est-il minimal ?

(e) $V'(x) = 12(x-2)(x-6)$ sur $]0\,;6[$. Pour quelle valeur de x le volume V est-il maximal ?

(f) $B'(x) = -3x^2 + 30x - 48$ sur $[5\,;10]$. Pour quelle valeur de x le bénéfice B est-il maximal ?

Ex. 38 ★★☆ **La boîte de Lina** — Lina a une plaque carrée de carton de 30 cm de côté. Elle découpe aux quatre coins un carré de côté x cm. Elle relève ensuite les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.

(a) Donne l'intervalle des valeurs possibles de x, puis exprime le volume $V(x)$ de la boîte (en cm³) sous forme développée.

(b) Calcule $V'(x)$, puis factorise-le.

(c) Dresse le tableau de variations de V sur l'intervalle de la question 1.

(d) Quelles dimensions Lina doit-elle donner à sa boîte pour que son volume soit maximal ? Donne ce volume en litres.

Ex. 39 ★★☆ **L'enclos de Noé** — Noé veut construire, le long d'un mur, un enclos rectangulaire de 150 m² pour ses chèvres. Il ne pose de clôture que sur les trois autres côtés. On note x (en m) la longueur de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

(a) Exprime la longueur de clôture $L(x)$ en fonction de x seul, pour $x \in]0\,;+\infty[$.

(b) Calcule $L'(x)$, puis étudie son signe sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Quelle longueur minimale de clôture faut-il à Noé ? Donne la valeur exacte, puis un arrondi au cm.

(d) Le mur ne mesure en fait que 15 m. Justifie que $x \geqslant 10$, puis trouve la nouvelle longueur minimale de clôture.

Ex. 40 ★★★ **L'atelier de Salomé** — L'atelier de Salomé fabrique entre 100 et 1 000 casques de ski par mois. On note x le nombre de centaines de casques fabriqués, avec $x \in [1\,;10]$. Le coût de production, en milliers d'euros, est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$. Le coût moyen d'une centaine est $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, en milliers d'euros.

(a) Écris $C_M(x)$ comme une somme de termes simples. Montre ensuite que, pour tout réel x de $[1\,;10]$, $C_M'(x) = \dfrac{2(x^3-3x^2-16)}{x^2}$.

(b) Vérifie que $x^3 - 3x^2 - 16 = (x-4)(x^2+x+4)$. Déduis-en le signe de $C_M'(x)$, puis dresse le tableau de variations de C_M sur $[1\,;10]$.

(c) Combien de casques Salomé doit-elle fabriquer pour que le coût moyen soit minimal ? Donne ce coût moyen minimal en euros par casque.

(d) Chaque centaine de casques est vendue 27 milliers d'euros. Exprime le bénéfice $B(x)$ (recette moins coût), puis étudie le signe de $B'(x)$ sur $[1\,;10]$.

(e) Combien de casques Salomé doit-elle fabriquer pour que son bénéfice soit maximal ? Donne la valeur exacte de x, puis le nombre de casques et le bénéfice maximal arrondis.

Ex. 41 ★★★ **La porte sous l'arche** — Dans un repère en mètres, le bord d'une arche est la courbe de $f(x) = 4 - x^2$, pour $x \in [-2\,;2]$, posée sur l'axe des abscisses. Lucas veut y placer une porte rectangulaire de sommets $(-x\,;0)$, $(x\,;0)$, $(x\,;f(x))$ et $(-x\,;f(x))$, avec $x > 0$.

(a) Justifie que $x \in]0\,;2[$, puis exprime l'aire $A(x)$ de la porte en fonction de x seul.

(b) On prolonge A à $[0\,;2]$. Étudie le signe de $A'(x)$, puis dresse le tableau de variations de A sur $[0\,;2]$.

(c) Donne la largeur et la hauteur de la porte d'aire maximale (valeurs exactes, puis arrondies au cm), ainsi que cette aire maximale.

(d) Le règlement impose une largeur d'au moins 2,6 m. Lucas affirme qu'il peut encore poser une porte d'au moins 6 m². A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Le bac à semis de Yanis** — Yanis fabrique en carton un bac sans couvercle, à base carrée, d'un volume de 4 L, soit 4 000 cm³. On note x le côté de la base et h la hauteur, en cm. Il cherche à utiliser le moins de carton possible : on note S l'aire du fond et des quatre faces latérales.

(a) Exprime h en fonction de x. Montre ensuite que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $S(x) = x^2 + \dfrac{16\,000}{x}$.

(b) Calcule $S'(x)$ et écris-le comme un seul quotient. Vérifie ensuite que $x^3 - 8\,000 = (x-20)(x^2+20x+400)$.

(c) Étudie le signe de $S'(x)$, puis dresse le tableau de variations de S sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 42 (suite)

(d) Donne les dimensions du bac (côté et hauteur) qui demande le moins de carton, ainsi que l'aire de carton utilisée.

(e) Le bac doit glisser sous une étagère : sa hauteur ne doit pas dépasser 8 cm. Quelles dimensions Yanis doit-il choisir ? Donne l'aire de carton, exacte puis arrondie.

7. *Position de deux courbes, inégalités*

À retenir : Pour comparer f et g sur I, on étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x)$ (pas celui de d') : par factorisation ou par le minimum de d. Si $d \geqslant 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$; les points communs vérifient $d(x) = 0$.

Ex. 43 ★☆☆ **Position de deux courbes par factorisation** — Pour chaque cas, forme $d(x) = f(x) - g(x)$ et factorise-la. Donne ensuite la position de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle indiqué, ainsi que les abscisses de leurs points communs.

(a) $f(x) = x^2 + 25$ et $g(x) = 10x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x^2 + 3x$ et $g(x) = x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = x^3$ et $g(x) = 4x$ sur $[0\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 44 ★☆☆ **Courbe et tangente : qui est au-dessus ?** — Pour chaque cas, écris l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Forme ensuite $d(x) = f(x) - y_T$, factorise-la et conclus sur la position de $\mathcal{C}_f$ et de T.

(a) $f(x) = x^2 - x$ sur $\mathbb{R}$ et $a = -1$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et $a = 2$.

(c) $f(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$ et $a = 1$ (tu peux développer $(x-1)^2(x^2+2x+3)$).

(d) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et $a = 0$.

Ex. 45 ★★☆ **Une inégalité prouvée par les variations** — Soit $f(x) = x^3 + 5$ et $g(x) = 3x^2$, définies sur $\mathbb{R}$. On veut comparer $f(x)$ et $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Forme $d(x) = f(x) - g(x)$, puis calcule $d'(x)$ et factorise-la.

(b) Étudie le signe de $d'(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ et dresse le tableau de variations de d sur cet intervalle.

(c) Déduis-en que pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $x^3 + 5 > 3x^2$. Que dire de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

(d) Noé affirme : « $d'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;2]$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[0\,;2]$. » Cette affirmation est-elle juste ? Justifie.

(e) Calcule $d(-2)$. L'inégalité $x^3 + 5 \geqslant 3x^2$ est-elle vraie pour tout réel x ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Vrai ou faux sur les inégalités** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse par un calcul, une factorisation ou un contre-exemple.

(a) Pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $x \geqslant \sqrt{x}$.

(b) Pour tout réel x de $[1\,;+\infty[$, $\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{x}$.

(c) Les courbes de $f(x) = x^3 + x$ et $g(x) = 2x^2$ ont un seul point commun.

(d) La courbe de $f(x) = x^3$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 sur $\mathbb{R}$.

Ex. 47 ★★★ **La racine carrée sous sa tangente** — Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$, de courbe $\mathcal{C}_f$. On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et qu'une fonction croissante (ou décroissante) sur $]0\,;4[$ l'est encore sur $[0\,;4]$.

(a) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

(b) On pose $d(x) = f(x) - y_T$ sur $[0\,;+\infty[$. Calcule $d'(x)$ pour $x > 0$ et écris-la sous la forme d'un seul quotient.

(c) Étudie le signe de $d'(x)$, dresse le tableau de variations de d sur $[0\,;+\infty[$, puis donne la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

(d) Nora affirme : « d' est négative sur $[4\,;+\infty[$, donc $\mathcal{C}_f$ est sous T seulement sur $[4\,;+\infty[$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Déduis-en que, pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $x + 4 \geqslant 4\sqrt{x}$. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?

Ex. 48 ★★★ **Une inégalité vraie seulement sur un intervalle** — Soit $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$, définies sur $\mathbb{R}$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

(a) Exprime $d(x)$, calcule $d'(x)$, factorise-la, puis dresse le tableau de variations de d sur $\mathbb{R}$ (sans limites).

(b) Démontre que, pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $x^3 \geqslant 3x - 2$. Précise le cas d'égalité.

(c) Vérifie que $d(x) = (x+2)(x-1)^2$, puis donne la position de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Donne les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

(e) Lina affirme : « $x^3 \geqslant 3x - 2$ pour tout réel x. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 49 ★★★ **L'inverse face à une droite et une parabole** — Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, de courbe $\mathcal{C}_f$, la droite $D : y = x$ et $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_g$.

(a) Sur $]0\,;+\infty[$, écris $\frac{1}{x} - x$ sous la forme d'un seul quotient factorisé, puis donne la position de $\mathcal{C}_f$ et D et leur point commun.

(b) Sur $]-\infty\,;0[$, Tom écrit : « $\frac{1}{x} \geqslant x \iff 1 \geqslant x^2 \iff -1 \leqslant x < 0$. » Trouve son erreur et corrige-la.

(c) On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$. Calcule $h'(x)$ et écris-la sous la forme d'un seul quotient.

Ex. 49 **(suite)**

(d) Factorise le numérateur de $h'(x)$ par $x - 1$, puis utilise le discriminant pour étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) Dresse le tableau de variations de h sur $]0\,;+\infty[$ (sans limites) et conclus sur la position de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.