## 1. Dérivées usuelles, sommes et multiples

**Ex. 1** ★☆☆ **Dériver des polynômes terme à terme**

(a) $f'(x) = 6 \times 5x^4 - 4 \times 3x^2 + 0 = 30x^4 - 12x^2$ : la constante 11 a pour dérivée 0.

(b) $g(x) = \frac{1}{4}x - \pi^2$, donc $g'(x) = \frac{1}{4} \times 1 - 0 = \frac{1}{4}$ : $\pi^2$ est un nombre, sa dérivée est nulle.

(c) $\sqrt{2}$ est un facteur constant, il reste : $h'(x) = \sqrt{2} \times 3x^2 + 5 = 3\sqrt{2}\,x^2 + 5$.

(d) $k(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 3x^2 - x$, donc $k'(x) = -\frac{1}{8} \times 4x^3 + 3 \times 2x - 1 = -\frac{x^3}{2} + 6x - 1$.

(e) $m(x) = 7 - 2x + \frac{1}{3}x^6$, donc $m'(x) = 0 - 2 + \frac{1}{3} \times 6x^5 = 2x^5 - 2$.

(f) $p'(x) = \frac{3}{5} \times 5x^4 - 0 = 3x^4$ : $\sqrt{7}$ est une constante.

**Ex. 2** ★☆☆ **Puissances négatives, inverse et racine carrée**

(a) $f(x) = 5x^{-2}$, donc $f'(x) = 5 \times (-2)x^{-3} = -\frac{10}{x^3}$.

(b) $g'(x) = -5x^{-6} + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^6} - \frac{2}{x^2}$ : l'exposant passe de $-5$ à $-6$, pas à $-4$.

(c) $h'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.

(d) $k(x) = \frac{1}{2}x^{-3}$, donc $k'(x) = \frac{1}{2} \times (-3)x^{-4} = -\frac{3}{2x^4}$.

(e) $m'(x) = 8 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \times 2x - 0 = \frac{4}{\sqrt{x}} + x$.

(f) $n(x) = -7x^{-4} + \sqrt{3}$, donc $n'(x) = -7 \times (-4)x^{-5} + 0 = \frac{28}{x^5}$.

**Ex. 3** ★★☆ **Nombre dérivé et tangentes**

(a) $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$ : $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 8 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2}$.

(b) $f'(1) = 1 - 8 = -7$ et $f(1) = 2 + 8 = 10$. Tangente : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -7(x-1) + 10$, soit $y = -7x + 17$.

(c) $f'(4) = \frac{1}{2} - \frac{8}{16} = 0$ et $f(4) = 2 \times 2 + 2 = 6$. Le coefficient directeur est nul : la tangente est horizontale, d'équation $y = 6$.

(d) Non. $f'(4)$ est un nombre : $f'(4) = 0$. $f'$ est une fonction, qui à tout réel $x > 0$ associe $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2}$. Elle prend d'autres valeurs, par exemple $f'(1) = -7 \neq 0$. Donc $f'(4)$ est nul, mais $f'$ n'est pas la fonction nulle.

**Ex. 4** ★★★ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) L'exposant baisse de 1 : $-4 - 1 = -5$.
Donc $(x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$ pour $x \neq 0$.

(b) Le signe $-$ est oublié : $\left(\frac{9}{x}\right)' = 9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{9}{x^2}$.

(c) Sacha a dérivé le dénominateur. On réécrit $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$, donc la dérivée vaut $2 \times (-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$.

(d) $|x|$ n'est pas dérivable en 0 : le taux $\frac{|h|}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et $-1$ si $h < 0$. La dérivée vaut $-1$ sur $]-\infty\,;0[$ et 1 sur $]0\,;+\infty[$.

(e) En $x = 0$, $\frac{1}{2\sqrt{0}}$ n'existe pas (division par 0) : $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. La formule n'est valable que sur $]0\,;+\infty[$.

**Ex. 5** ★★★ **Retrouver une fonction à partir de sa courbe**

(a) On écrit $f(x) = a\sqrt{x} + b\,x^{-1}$. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de multiples de fonctions dérivables. Pour tout réel $x > 0$ : $f'(x) = a \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + b \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2}$. Attention au signe $-$ qui vient de $\left(\frac{1}{x}\right)'$.

(b) $A \in \mathcal{C}_f$ donne $f(4) = 4$, soit $2a + \frac{b}{4} = 4$, c'est-à-dire $8a + b = 16$. Le coefficient directeur de la tangente en $A$ est $f'(4) = \frac{a}{4} - \frac{b}{16}$. On a donc $\frac{a}{4} - \frac{b}{16} = 2$ : on multiplie par 16 et on obtient $4a - b = 32$.

(c) On additionne les deux équations : $12a = 48$, donc $a = 4$. Puis $b = 16 - 8a = -16$.
Donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{16}{x}$.
Vérification : $f(4) = 8 - 4 = 4$ et $f'(4) = \frac{4}{4} + \frac{16}{16} = 2$.

(d) $f(16) = 4\sqrt{16} - \frac{16}{16} = 16 - 1 = 15$ : c'est l'ordonnée du point. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} + \frac{16}{x^2} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{16}{x^2}$, donc $f'(16) = \frac{2}{4} + \frac{16}{256} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$ : c'est la pente. Il ne faut pas confondre ces deux nombres. La tangente a pour équation $y = f'(16)(x-16) + f(16) = \frac{9}{16}(x - 16) + 15$, soit $y = \frac{9}{16}x + 6$.

**Ex. 6** ★★★ **Valeur absolue, racine carrée et dérivabilité**

(a) Si $x > 0$, $|x| = x$, donc $g(x) = x + 2x = 3x$. Si $x < 0$, $|x| = -x$, donc $g(x) = -x + 2x = x$.

(b) Sur $]0\,;+\infty[$, $g(x) = 3x$, donc $g'(x) = 3$. Sur $]-\infty\,;0[$, $g(x) = x$, donc $g'(x) = 1$.

**Ex. 6** **(suite)**

(c) $g(0)=0$, donc $\frac{g(h)-g(0)}{h}=\frac{|h|+2h}{h}$. Si $h>0$, ce taux vaut $\frac{3h}{h}=3$. Si $h<0$, il vaut $\frac{h}{h}=1$. Quand $h$ se rapproche de 0, le taux ne se rapproche pas d'un seul nombre : il vaut 3 à droite de 0 et 1 à gauche. Il n'y a donc pas de nombre dérivé en 0 : $g$ n'est pas dérivable en 0.

(d) Sur $[0\,;+\infty[$, $|x|=x$, donc $k(x)=\sqrt{x}-3x+2\pi$. La fonction $x\mapsto -3x+2\pi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $k$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. En revanche, $k$ n'est pas dérivable en 0 : sinon, $\sqrt{x}=k(x)+3x-2\pi$ serait dérivable en 0, ce qui est faux. $2\pi$ est une constante, donc sa dérivée est nulle. Pour tout réel $x>0$, $k'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-3$.

(e) La tangente est horizontale quand $k'(a)=0$, soit $\frac{1}{2\sqrt{a}}=3$, c'est-à-dire $\sqrt{a}=\frac{1}{6}$, donc $a=\frac{1}{36}$. Alors $k\left(\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{6}-\frac{3}{36}+2\pi=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+2\pi=\frac{1}{12}+2\pi$.

**Ex. 7** ★★★ **Minimiser un coût moyen**

(a) On écrit $CM(x)=\frac{1}{2}x+3+32x^{-1}$. $CM$ est dérivable sur $[1\,;20]$, qui ne contient pas 0, comme somme de fonctions dérivables. Pour tout réel $x$ de $[1\,;20]$ : $CM'(x)=\frac{1}{2}+0+32\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{32}{x^2}$. La constante 3 disparaît, et $\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}$. On met au même dénominateur : $CM'(x)=\frac{x^2-64}{2x^2}$.

(b) Pour tout $x$ de $[1\,;20]$, $2x^2>0$, donc $CM'(x)$ a le signe de $x^2-64=(x-8)(x+8)$. Or $x+8>0$ sur $[1\,;20]$. Donc $CM'(x)$ a le signe de $x-8$ : $CM'(x)<0$ sur $[1\,;8[$, $CM'(8)=0$ et $CM'(x)>0$ sur $]8\,;20]$.

(c) On calcule $CM(1)=\frac{1}{2}+3+32=35{,}5$, $CM(8)=4+3+4=11$ et $CM(20)=10+3+1{,}6=14{,}6$.

| x | 1 | | 8 | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| CM'(x) | | − | 0 | + | |
| CM(x) | 35,5 | ↘ | 11 | ↗ | 14,6 |

Donc $CM$ est décroissante sur $[1\,;8]$ et croissante sur $[8\,;20]$.

(d) D'après le tableau, $CM$ admet sur $[1\,;20]$ un minimum égal à 11, atteint en $x=8$. L'atelier doit donc fabriquer 800 lampes par jour. Le coût moyen minimal est alors de 11 euros par lampe.

(e) D'après la question précédente, pour tout réel $x$ de $[1\,;20]$, $CM(x)\geqslant 11$, soit $\frac{x}{2}+3+\frac{32}{x}\geqslant 11$. En retranchant 3 : $\frac{x}{2}+\frac{32}{x}\geqslant 8$, avec égalité pour $x=8$.

## 2. *Dérivée d'un produit*

**Ex. 8** ★☆☆ **Dériver des produits en ligne**

(a) $u(x)=3x-1$, $u'(x)=3$ ; $v(x)=x+4$, $v'(x)=1$.
$f'(x)=3(x+4)+(3x-1)\times 1=6x+11$.

(b) $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$ ; $v(x)=5-x$, $v'(x)=-1$.
$f'(x)=2x(5-x)+x^2\times(-1)=10x-2x^2-x^2=10x-3x^2$.

(c) C'est un produit par la constante $-7$ : pas besoin de la formule du produit. $f'(x)=-7\times 3x^2=-21x^2$.

(d) $u(x)=x^3+2$, $u'(x)=3x^2$ ; $v(x)=4x-1$, $v'(x)=4$.
$f'(x)=3x^2(4x-1)+4(x^3+2)=12x^3-3x^2+4x^3+8=16x^3-3x^2+8$.

(e) $f(x)=4x^2-9$ (identité remarquable), donc $f'(x)=8x$. Contrôle avec la formule : $2(2x-3)+2(2x+3)=8x$.

(f) $u(x)=1-x$, $u'(x)=-1$ ; $v(x)=x^2+x+1$, $v'(x)=2x+1$. $f'(x)=-(x^2+x+1)+(1-x)(2x+1)=-x^2-x-1-2x^2+x+1=-3x^2$. Contrôle : $f(x)=1-x^3$, donc $f'(x)=-3x^2$.

(g) $u(x)=x(x+1)=x^2+x$, $u'(x)=2x+1$ ; $v(x)=x-2$, $v'(x)=1$. $f'(x)=(2x+1)(x-2)+x^2+x=2x^2-3x-2+x^2+x=3x^2-2x-2$.

**Ex. 9** ★☆☆ **Produits avec une racine carrée**

(a) $\sqrt{x}$ est dérivable seulement sur $]0\,;+\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. $u(x)=x$, $u'(x)=1$ ; $v(x)=\sqrt{x}$, $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}=\frac{3x}{2\sqrt{x}}$, soit $\frac{3\sqrt{x}}{2}$.

(b) $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit.
$u(x)=x-4$, $u'(x)=1$ ; $v(x)=\sqrt{x}$, $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-4}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x-4}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-4}{2\sqrt{x}}$.

(c) $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit.
$u(x)=x^2-3x$, $u'(x)=2x-3$ ; $v(x)=\sqrt{x}$, $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x)=(2x-3)\sqrt{x}+\frac{x^2-3x}{2\sqrt{x}}=\frac{2x(2x-3)+x^2-3x}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-9x}{2\sqrt{x}}$.

(d) $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit. $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$ ; $v(x)=\sqrt{x}$, $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x)=2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{4x^2+x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$
(car $2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}=4x^2$).

(e) C'est un produit par la constante 5 : pas de formule du produit. $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x)=5\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{x}}$.

## Ex. 10 ★★☆ Démonstration et erreur de Léna

(a) $u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a) = [u(a+h) - u(a)]\,v(a+h) + u(a)\,[v(a+h) - v(a)]$. On divise par $h$ : le pointillé vaut $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$.

(b) $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$, $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ (admis) et $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $v'(a)$. Le taux tend donc vers $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ : $(uv)' = u'v + uv'$.

(c) $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ ; $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$. $(x^2 \times x^2)' = 2x \times x^2 + x^2 \times 2x = 4x^3$. Et $(x^4)' = 4x^3$ : les deux calculs concordent.

(d) Non. La vraie dérivée vaut $4 \times 2^3 = 32$ en 2, alors que la formule de Léna donne $4 \times 2^2 = 16$. La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

## Ex. 11 ★★☆ Du produit au tableau de variations

(a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions polynômes. $u(x) = x^2 - 9$, $u'(x) = 2x$ ; $v(x) = x + 3$, $v'(x) = 1$. $f'(x) = 2x(x+3) + x^2 - 9 = 2x^2 + 6x + x^2 - 9 = 3x^2 + 6x - 9$.

(b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$, donc $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ : on retrouve le même résultat.

(c) $f'(x) = 3(x^2 + 2x - 3)$. $\Delta = 4 + 12 = 16$, racines $\frac{-2-4}{2} = -3$ et $\frac{-2+4}{2} = 1$.
Donc $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$.

(d) $f'(x)$ est un trinôme avec $a = 3 > 0$ : il est positif à l'extérieur des racines. $f(-3) = 0$ et $f(1) = (1-9) \times 4 = -32$.

| x | -∞ | | −3 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | | ↗ | 0 | ↘ | −32 | ↗ | |

$f$ est croissante sur $]-\infty\,;-3]$, décroissante sur $[-3\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

(e) $f'$ s'annule en 1 en changeant de signe (négative puis positive) : $f$ admet un minimum local en 1, égal à $f(1) = -32$.

## Ex. 12 ★★★ La boîte de Noé

(a) Une longueur est positive, donc $x \geqslant 0$. La largeur du fond vaut $10 - 2x$ et doit être positive ou nulle, donc $x \leqslant 5$ : ainsi $x \in [0\,;5]$. Le fond mesure $(16 - 2x)$ sur $(10 - 2x)$ et la hauteur vaut $x$.
Donc $V(x) = x(16-2x)(10-2x) = x \times 2(8-x) \times 2(5-x) = 4x(8-x)(5-x)$.

## Ex. 12 (suite)

(b) $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$. Pour $v$, on a deux facteurs $8 - x$ et $5 - x$, de dérivée $-1$ chacun : $v'(x) = -1 \times (5-x) + (8-x) \times (-1) = 2x - 13$. De plus $v(x) = x^2 - 13x + 40$. $V$ est dérivable sur $[0\,;5]$ comme produit de fonctions dérivables, et $V = 4uv$ donne $V' = 4(u'v + uv')$. Pour tout réel $x$ de $[0\,;5]$ : $V'(x) = 4\left[x^2 - 13x + 40 + x(2x-13)\right] = 4(3x^2 - 26x + 40) = 12x^2 - 104x + 160$.

(c) $V(x) = 4x(x^2 - 13x + 40) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$. On dérive : $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$. On retrouve bien le même résultat.

(d) Pour $3x^2 - 26x + 40$ : $\Delta = 676 - 480 = 196 = 14^2$, donc les racines sont $x_1 = \frac{26-14}{6} = 2$ et $x_2 = \frac{26+14}{6} = \frac{20}{3}$. Ainsi $V'(x) = 4(x-2)(3x-20)$. Sur $[0\,;5]$, on a $3x - 20 < 0$, donc $V'(x)$ est du signe contraire de $x - 2$ : $V'(x) > 0$ sur $[0\,;2[$, $V'(2) = 0$ et $V'(x) < 0$ sur $]2\,;5]$. On a $V(0) = 0$, $V(2) = 4 \times 2 \times 6 \times 3 = 144$ et $V(5) = 0$.

| x | 0 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| V'(x) | | + | 0 | − | |
| V(x) | 0 | ↗ | 144 | ↘ | 0 |

(e) $V$ est croissante sur $[0\,;2]$ puis décroissante sur $[2\,;5]$. Elle atteint donc son maximum en $x = 2$. Noé doit découper des carrés de 2 cm de côté. La boîte mesure alors 12 cm sur 6 cm, avec une hauteur de 2 cm, et son volume maximal vaut 144 cm³.

## Ex. 13 ★★★ Une courbe au-dessus de sa tangente

(a) $u(x) = x - 3$ et $u'(x) = 1$ ; $v(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v$ sur $]0\,;+\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel $x > 0$ : $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

(b) Pour $x > 0$, on a $2\sqrt{x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$. Ainsi $f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;9]$. On a $f(0) = 0$, $f(1) = -2 \times 1 = -2$ et $f(9) = 6 \times 3 = 18$.

| x | 0 | | 1 | | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | 0 | ↘ | −2 | ↗ | 18 |

Le minimum de $f$ sur $[0\,;9]$ vaut $-2$. Il est atteint en $x = 1$.

(c) $f(4) = 1 \times 2 = 2$ et $f'(4) = \frac{3\times3}{2\times2} = \frac{9}{4}$. On en déduit $T$ : $y = \frac{9}{4}(x-4) + 2$, soit $y = \frac{9}{4}x - 7$.

**Ex. 13** **(suite)**

(d) D'après la question 3, $d(x) = f(x) - \left(\frac{9}{4}x - 7\right)$. $d$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$ : $d'(x) = f'(x) - \frac{9}{4} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{4} = \frac{6(x-1)-9\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \frac{3(2x-3\sqrt{x}-2)}{4\sqrt{x}}$. Or $(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = 2x - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2 = 2x - 3\sqrt{x} - 2$. Donc $d'(x) = \frac{3(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{4\sqrt{x}}$.

(e) Pour $x > 0$, on a $3(2\sqrt{x}+1) > 0$ et $4\sqrt{x} > 0$, donc $d'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 2$. Ce facteur est négatif pour $x < 4$, nul en 4 et positif pour $x > 4$.
Donc $d$ est décroissante sur $]0\,;4]$ et croissante sur $[4\,;+\infty[$. Son minimum vaut $d(4) = 2 - 9 + 7 = 0$, donc $d(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$. De plus, $d(0) = 0 + 7 = 7 > 0$. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $T$ sur $[0\,;+\infty[$. Les deux se touchent seulement au point $A(4\,;2)$.

**Ex. 14** ★★★ **Tangente horizontale sans extremum**

(a) $u(x) = x^2 + m$ et $u'(x) = 2x$ ; $v(x) = x - 3$ et $v'(x) = 1$. $f_m$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel $x$ : $f_m'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x(x-3) + (x^2+m) \times 1 = 3x^2 - 6x + m$. Jules a tort : il calcule $u'v'$ au lieu de $u'v + uv'$. Son expression $2x$ n'a pas de terme en $x^2$, alors que $f_m'(x)$ contient $3x^2$ : elle est fausse quelle que soit la valeur de $m$.

(b) La tangente est horizontale si et seulement si $f_m'(1) = 0$. Or $f_m'(1) = 3 - 6 + m = m - 3$. On obtient donc $m = 3$.

(c) Faux. Pour $m = 3$ : $f_3'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$. Pour tout réel $x$, $f_3'(x) \geqslant 0$, et $f_3'(x)$ ne s'annule qu'en 1.
Donc $f_3'$ ne change pas de signe en 1, et $f_3$ est croissante sur $\mathbb{R}$. La tangente en $(1\,;-8)$ est horizontale, mais $f_3$ n'admet pas d'extremum local en 1.

(d) $f_m'(x) = 3x^2 - 6x + m$ est un trinôme de discriminant $\Delta = 36 - 12m$. Si $m < 3$, alors $\Delta > 0$ et $f_m'$ a deux racines distinctes. Elle est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles, donc elle change de signe en chacune : $f_m$ admet un maximum local puis un minimum local. Si $m \geqslant 3$, alors $\Delta \leqslant 0$ et $f_m'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ : il n'y a aucun extremum. Conclusion : $f_m$ admet deux extremums locaux si et seulement si $m < 3$.

## 3. *Dérivée de l'inverse et d'un quotient*

**Ex. 15** ★☆☆ **Automatismes : inverse, constante sur v, ou pas de quotient du tout**

(a) $v(x) = 3x - 4$, $v'(x) = 3$. $f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{3}{(3x-4)^2}$.

(b) $f = \frac{k}{v}$ avec $k = 5$, $v(x) = x^2 + 7$, $v'(x) = 2x$. $f'(x) = -\frac{5 \times 2x}{(x^2+7)^2} = -\frac{10x}{(x^2+7)^2}$.

(c) On divise par la constante 4 : ce n'est pas un quotient de fonctions. $f(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 3x)$, donc $f'(x) = \frac{1}{4}(4x - 3) = \frac{4x-3}{4}$.

(d) $f = \frac{k}{v}$ avec $k = -2$, $v(x) = x^3 + 1$, $v'(x) = 3x^2$. $f'(x) = -\frac{(-2) \times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$.

(e) On simplifie d'abord : pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x(x+5)}{x} = x + 5$.
Donc $f'(x) = 1$.

(f) $v(x) = 2 - x$, $v'(x) = -1$. $f'(x) = -\frac{-1}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2}$.

**Ex. 16** ★☆☆ **Automatismes : dériver un quotient**

(a) $u = 2x + 1$, $u' = 2$ ; $v = x - 3$, $v' = 1$. $f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x+1)\times 1}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = -\frac{7}{(x-3)^2}$.

(b) $u = 4 - x$, $u' = -1$ ; $v = 2x + 5$, $v' = 2$. $f'(x) = \frac{-1\times(2x+5)-(4-x)\times 2}{(2x+5)^2} = \frac{-2x-5-8+2x}{(2x+5)^2} = -\frac{13}{(2x+5)^2}$.

(c) $u = x^2 - 2$, $u' = 2x$ ; $v = x + 4$, $v' = 1$. $f'(x) = \frac{2x(x+4)-(x^2-2)\times 1}{(x+4)^2} = \frac{2x^2+8x-x^2+2}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x+2}{(x+4)^2}$.

(d) $u = 3x$, $u' = 3$ ; $v = x^2 + 2$, $v' = 2x$. $f'(x) = \frac{3(x^2+2)-3x\times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{6-3x^2}{(x^2+2)^2}$.

(e) $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ; $v = x + 1$, $v' = 1$. Numérateur : $\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$.
Donc $f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}$.

**Ex. 17** ★★☆ **Quatre copies à corriger**

(a) Non : Inès a calculé $\frac{u'}{v'}$, ce qui est faux. On a $u = x^2 + 4$, $u' = 2x$, $v = 3x - 1$, $v' = 3$. $f'(x) = \frac{2x(3x-1)-3(x^2+4)}{(3x-1)^2} = \frac{6x^2-2x-3x^2-12}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2-2x-12}{(3x-1)^2}$.

(b) Non : Malo a inversé l'ordre et écrit $uv' - u'v$, donc le signe est faux. On a $u = 5x - 1$, $u' = 5$, $v = x + 6$, $v' = 1$. $g'(x) = \frac{5(x+6)-(5x-1)\times 1}{(x+6)^2} = \frac{5x+30-5x+1}{(x+6)^2} = \frac{31}{(x+6)^2}$.

(c) Non, il y a deux erreurs. Léna a oublié les parenthèses : $-(2x+1) \times 2x = -4x^2 - 2x$, et non $-4x^2 + 2x$. Elle a aussi écrit $v$ au lieu de $v^2$ au dénominateur. On obtient $h'(x) = \frac{2(x^2+3)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$.

(d) Non : Yanis a oublié $v'$. Avec $k = 4$, $v(x) = x^2 + 1$ et $v'(x) = 2x$, on a $p'(x) = -\frac{4\times 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{8x}{(x^2+1)^2}$.

**Ex. 18** ★★☆ **Trinôme au dénominateur : où dériver ?**

(a) Pour $x^2-4x+3$ : $\Delta = 16-12 = 4 > 0$. Les racines sont $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Les valeurs interdites sont donc 1 et 3. $f$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty\,;1[$, $]1\,;3[$ et $]3\,;+\infty[$ : $f$ est dérivable sur chacun de ces intervalles.

(b) Pour $x^2+2x+5$ : $\Delta = 4-20 = -16 < 0$ et $a = 1 > 0$, donc $x^2+2x+5 > 0$ pour tout réel $x$. $g$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$ ; $v(x) = x^2+2x+5$, $v'(x) = 2x+2$. $g'(x) = \frac{1\times(x^2+2x+5)-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{x^2+2x+5-(2x^2+4x+2)}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+2x+5)^2}$.

(c) Le dénominateur est un carré non nul, donc il est strictement positif : $g'(x)$ a le signe de $-x^2-2x+3$. $\Delta = 4+12 = 16 > 0$, d'où les racines $\frac{2-4}{-2} = 1$ et $\frac{2+4}{-2} = -3$. Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.
Donc $g$ est décroissante sur $]-\infty\,;-3]$, croissante sur $[-3\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$. $g'$ s'annule en changeant de signe en $-3$ et en $1$ : $g$ admet un minimum local $g(-3) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ et un maximum local $g(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

(d) $u = 2x-1$, $u' = 2$ ; $v = x^2-4x+3$, $v' = 2x-4$.
Numérateur : $2(x^2-4x+3)-(2x-1)(2x-4) = 2x^2-8x+6-(4x^2-10x+4) = -2x^2+2x+2$.
Donc $f'(x) = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2-4x+3)^2}$.

(e) 0 appartient à $]-\infty\,;1[$. $f(0) = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ et $f'(0) = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$. La tangente a pour équation $y = \frac{2}{9}(x-0)-\frac{1}{3}$, soit $y = \frac{2}{9}x-\frac{1}{3}$.

**Ex. 19** ★★★ **Coût moyen d'un atelier de céramique**

(a) Tom a tort. Le dénominateur 2 est une constante : $C(x) = \frac{1}{2}(x^2+6x+64)$ est le produit d'un polynôme par la constante $\frac{1}{2}$.
Donc $C'(x) = \frac{1}{2}(2x+6) = x+3$.

(b) Léa a tort : $\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$. Pour tout $x$ de $[1\,;20]$, $x \geqslant 1$, donc $x \neq 0$ : $C_M$ est dérivable sur $[1\,;20]$ comme quotient de fonctions dérivables. $u(x) = \frac{x^2+6x+64}{2}$, $u'(x) = x+3$ ; $v(x) = x$, $v'(x) = 1$. $C'_M(x) = \frac{(x+3)\times x-\left(\frac{x^2+6x+64}{2}\right)\times 1}{x^2} = \frac{x^2+3x-\frac{x^2}{2}-3x-32}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2}-32}{x^2} = \frac{x^2-64}{2x^2}$.

(c) Pour tout $x$ de $[1\,;20]$, $C_M(x) = \frac{x^2}{2x}+\frac{6x}{2x}+\frac{64}{2x} = \frac{x}{2}+3+\frac{32}{x}$. Avec $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$ : $C'_M(x) = \frac{1}{2}-\frac{32}{x^2} = \frac{x^2-64}{2x^2}$. On retrouve le même résultat, et plus vite.

**Ex. 19** (suite)

(d) Pour tout $x$ de $[1\,;20]$, $2x^2 > 0$.
Donc $C'_M(x)$ a le signe de $x^2-64 = (x-8)(x+8)$.
Comme $x+8 > 0$, c'est le signe de $x-8$. $C_M(1) = \frac{71}{2} = 35{,}5$ ; $C_M(8) = \frac{64+48+64}{16} = 11$ ;
$C_M(20) = \frac{584}{40} = 14{,}6$.

| x | 1 | | 8 | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| C_M'(x) | | − | 0 | + | |
| C_M(x) | 35{,}5 | ↘ | 11 | ↗ | 14{,}6 |

$C_M$ est décroissante sur $[1\,;8]$ et croissante sur $[8\,;20]$.

(e) D'après le tableau, $C_M$ admet sur $[1\,;20]$ un minimum égal à 11, atteint en $x = 8$. Le coût moyen est donc minimal pour 800 bols par jour : il vaut 11 € par bol.
De plus, $C'(8) = 8+3 = 11 = C_M(8)$ : pour cette production, le coût moyen est égal au coût marginal.

**Ex. 20** ★★★ **Fonction homographique et tangente**

(a) $cx+d \neq 0$ sur l'intervalle, donc $g$ y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables. $u(x) = ax+b$, $u'(x) = a$ ; $v(x) = cx+d$, $v'(x) = c$. $g'(x) = \frac{a(cx+d)-(ax+b)\times c}{(cx+d)^2} = \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Il faut mettre $(ax+b)$ entre parenthèses : le signe $-$ s'applique aussi à $bc$.

(b) Pour tout $x$ de $I$, $x+2 > 0$, donc $f$ est dérivable sur $I$. Ici $a = 4$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 2$, donc $ad-bc = 8-(-1) = 9$ et $f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2}$. Pour tout $x$ de $I$, $f'(x) > 0$ : $f$ est strictement croissante sur $I$. Nina a calculé $uv'-u'v = (4x-1)\times 1-4(x+2) = -9$ : elle a inversé l'ordre du numérateur, ce qui change le signe.

(c) $f(1) = \frac{3}{3} = 1$ et $f'(1) = \frac{9}{9} = 1$. $T : y = f'(1)(x-1)+f(1) = 1\times(x-1)+1$, soit $y = x$.

(d) D'après la question précédente, $T : y = x$, donc pour tout $x$ de $I$ : $d(x) = f(x)-x = \frac{4x-1-x(x+2)}{x+2} = \frac{-x^2+2x-1}{x+2} = \frac{-(x-1)^2}{x+2}$. On a $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $x+2 > 0$, donc $d(x) \leqslant 0$, avec égalité seulement pour $x = 1$. Sur $I$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $T$ ; elles ont un seul point commun, $(1\,;1)$.

(e) Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur : on cherche $f'(x) = 0{,}25$, soit $\frac{9}{(x+2)^2} = \frac{1}{4}$, donc $(x+2)^2 = 36$. Sur $I$, $x+2 > 0$, donc $x+2 = 6$, soit $x = 4$ (la solution $x = -8$ n'est pas dans $I$). $f(4) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$. Il y a un seul point : $\left(4\,;\frac{5}{2}\right)$.

**Ex. 21** ★★★ **Concentration d'un médicament : deux modèles**

(a) Pour tout réel $t$, $t^2+9 \geqslant 9 > 0$ : le dénominateur ne s'annule pas. $C$ est donc dérivable sur $[0\,;10]$ comme quotient de fonctions dérivables. $u(t)=30t$, $u'(t)=30$ ; $v(t)=t^2+9$, $v'(t)=2t$. $C'(t)=\frac{30(t^2+9)-30t\times 2t}{(t^2+9)^2}=\frac{-30t^2+270}{(t^2+9)^2}=\frac{30(3-t)(3+t)}{(t^2+9)^2}$.

(b) $(t^2+9)^2$ est le carré d'un nombre non nul, donc il est strictement positif. Sous cette forme, son signe se voit tout de suite ; une fois développé, on ne le voit plus. $C'(t)$ a donc le signe de $30(3-t)(3+t)$. Comme $3+t>0$ sur $[0\,;10]$, c'est le signe de $3-t$. $C(0)=0$ ; $C(3)=\frac{90}{18}=5$ ; $C(10)=\frac{300}{109}\approx 2{,}75$.

| t | 0 | | 3 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| C'(t) | | + | 0 | − | |
| C(t) | 0 | ↗ | 5 | ↘ | ≈ 2{,}75 |

La concentration est maximale au bout de 3 h : elle vaut alors 5 mg/L.

(c) Comme $t^2+9>0$, $C(t)\geqslant 3$ équivaut à $30t\geqslant 3(t^2+9)$, soit $3t^2-30t+27\leqslant 0$, soit $t^2-10t+9\leqslant 0$.
$\Delta=100-36=64$, d'où les racines $\frac{10-8}{2}=1$ et $\frac{10+8}{2}=9$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc $t\in[1\,;9]$. Le médicament est efficace pendant 8 h.

(d) Pour $t^2-2t+10$ : $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 10=-36<0$. Le trinôme ne s'annule pas et garde le signe de son coefficient 1 : il est strictement positif. $D$ est donc dérivable sur $[0\,;10]$. Avec $\left(\frac{k}{v}\right)'=-\frac{kv'}{v^2}$, où $k=40$, $v(t)=t^2-2t+10$ et $v'(t)=2t-2$ : $D'(t)=-\frac{40(2t-2)}{(t^2-2t+10)^2}=\frac{80(1-t)}{(t^2-2t+10)^2}$.

(e) Le dénominateur est positif, donc $D'(t)$ a le signe de $1-t$ : $D$ est croissante sur $[0\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;10]$. $D(0)=4$ ; $D(1)=\frac{40}{9}\approx 4{,}44$ ; $D(10)=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$. Sur $[0\,;10]$, le maximum de $D$ vaut $\frac{40}{9}$ et il est atteint en $t=1$. Comme $\frac{40}{9}<5$, c'est le modèle $C$ qui donne le pic le plus élevé, mais plus tard : à 3 h au lieu de 1 h.

## 4. *Signe de la dérivée et sens de variation*

**Ex. 22** ★☆☆ **Du signe de f′ au sens de variation**

(a) $7-2x\geqslant 0 \iff x\leqslant \frac{7}{2}$.
Donc $f'(x)\geqslant 0$ sur $]-\infty\,;\frac{7}{2}]$ et $f'(x)\leqslant 0$ sur $[\frac{7}{2}\,;+\infty[$ : $f$ est croissante sur $]-\infty\,;\frac{7}{2}]$, puis décroissante sur $[\frac{7}{2}\,;+\infty[$.

**Ex. 22** (suite)

(b) Le dénominateur $(x+1)^2$ est un carré non nul, donc il est strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $-5$ : $f'(x)<0$ sur $]-1\,;+\infty[$, et $f$ est strictement décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

(c) Ce trinôme a pour racines $-4$ et $6$ et un coefficient $a=-2<0$ : il est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.
Donc $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;-4]$, croissante sur $[-4\,;6]$ et décroissante sur $[6\,;+\infty[$.

(d) Sur $]0\,;+\infty[$, on a $2\sqrt{x}>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x-3$. Ainsi $f'(x)\leqslant 0$ sur $]0\,;3]$ et $f'(x)\geqslant 0$ sur $[3\,;+\infty[$ : $f$ est décroissante sur $]0\,;3]$, puis croissante sur $[3\,;+\infty[$.

(e) $f'(x)>0$ sur $[-4\,;5]$, sauf en 1 où $f'$ s'annule sans changer de signe. D'après la version stricte du théorème, $f$ est strictement croissante sur tout $[-4\,;5]$ : il n'y a pas d'extremum en 1.

(f) $f'$ est nulle sur l'intervalle $[-2\,;5]$, donc $f$ est constante sur $[-2\,;5]$.

**Ex. 23** ★★☆ **Dériver, factoriser, trouver où f′ s'annule**

(a) $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$. $f'(x)$ s'annule en 0 et en 4.

(b) $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$. Le discriminant de $x^2+x-2$ vaut $\Delta=1+8=9$, et ses racines sont $\frac{-1-3}{2}=-2$ et $\frac{-1+3}{2}=1$.
Donc $f'(x)=6(x+2)(x-1)$, qui s'annule en $-2$ et en 1.

(c) $f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x-2)(x+2)$.
$f'(x)$ s'annule en $-2$, 0 et 2.

(d) $f'(x)=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$. Sur $]0\,;+\infty[$, seul 3 annule $f'(x)$
($-3$ n'est pas dans l'intervalle).

(e) $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$, $v(x)=x-1$, $v'(x)=1$. $f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2\times 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Sur $]1\,;+\infty[$, seul 2 annule $f'(x)$
(0 n'est pas dans l'intervalle).

(f) $u(x)=x-6$, $u'(x)=1$, $v(x)=\sqrt{x}$, $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-6}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x-6}{2\sqrt{x}}=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x}}$. $f'(x)$ s'annule en 2.

**Ex. 24** ★★☆ **Vrai ou faux sur le théorème des variations**

(a) Faux. On a bien $g'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} > 0$, mais le théorème ne vaut que sur un intervalle : $g$ est croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ séparément. Contre-exemple : $-1 < 1$, alors que $g(-1) = -1 + 4 = 3$ et $g(1) = 1 - 4 = -3$, donc $g(-1) > g(1)$.

(b) Faux. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$, donc $f'(1) = 0$ : la conclusion est fausse. Pourtant $f$ est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car $f'(x) > 0$ sauf en 1, où $f'$ s'annule sans changer de signe. Si $f$ est croissante, on peut seulement affirmer que $f'(x) \geqslant 0$.

(c) Faux. Le sens de variation se lit sur le signe de $h'$, pas sur celui de $h$. $h'(x) = 2x \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$, donc $h$ est croissante sur $[0\,;2]$ (de $h(0) = -4$ à $h(2) = 0$).

(d) Vrai. $k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de produits de fonctions dérivables. Avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x - 5$ : $k'(x) = 1 \times (x-5) + (x+2) \times 1 - 2x + 3 = 0$. $k'$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc $k$ est constante, égale à $k(0) = 2 \times (-5) = -10$.

**Ex. 25** ★★☆ **Étude complète sur un segment**

(a) $f$ est un polynôme, donc elle est dérivable sur $[-5\,;0]$. Pour tout réel $x$ de $[-5\,;0]$ : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

(b) $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 36 + 108 = 144$, donc les racines sont $\frac{-6-12}{6} = -3$ et $\frac{-6+12}{6} = 1$. Comme $a = 3 > 0$, $f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Sur $[-5\,;0]$ (où 1 n'est pas) : $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-5\,;-3]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-3\,;0]$.

(c) $f(-5) = -125 + 75 + 45 + 2 = -3$, $f(-3) = -27 + 27 + 27 + 2 = 29$, $f(0) = 2$.

| **x** | **$-5$** | | **$-3$** | | **0** |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | $-3$ | ↗ | 29 | ↘ | 2 |

D'après le théorème, $f$ est croissante sur $[-5\,;-3]$ et décroissante sur $[-3\,;0]$.

(d) Le maximum de $f$ sur $[-5\,;0]$ vaut 29 et il est atteint en $-3$ (là où $f'$ s'annule en changeant de signe). Le minimum vaut $-3$ et il est atteint à la borne $-5$, car $f(-5) = -3 < f(0) = 2$.

**Ex. 26** ★★★ **Un quotient sur une réunion d'intervalles**

(a) $f$ est le quotient de deux polynômes, donc de deux fonctions dérivables. Son dénominateur ne s'annule pas sur chacun des deux intervalles : $f$ est donc dérivable sur chacun d'eux. $u(x) = x^2 + 5$, $u'(x) = 2x$ ; $v(x) = x - 2$, $v'(x) = 1$. $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(x-2) - (x^2+5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$. Pour le numérateur, $\Delta = 16 + 20 = 36$ et les racines sont $\frac{4-6}{2} = -1$ et $\frac{4+6}{2} = 5$. Donc $f'(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$.

(b) Pour tout $x$ de $D$, $(x-2)^2 > 0$ car c'est un carré non nul. Le dénominateur ne change donc pas le signe : $f'(x)$ a le signe de $(x+1)(x-5)$. Ce trinôme a pour coefficient $a = 1 > 0$. Il est positif à l'extérieur des racines $-1$ et 5 et négatif entre elles.
Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]5\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;2[$ et sur $]2\,;5[$, et $f'(-1) = f'(5) = 0$.

(c) $f(-1) = \frac{1+5}{-3} = -2$ et $f(5) = \frac{25+5}{3} = 10$.

| **x** | **$-\infty$** | **-1** | **2** | **5** | **$+\infty$** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | -2 | ↘ | ‖ | ↘ | 10 | ↗ |

On applique le théorème sur chaque intervalle séparément. $f$ est croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;2[$, décroissante sur $]2\,;5]$ et croissante sur $[5\,;+\infty[$.

(d) Non. On a $0 < 3$, mais $f(0) = \frac{5}{-2} = -2{,}5$ et $f(3) = \frac{14}{1} = 14$, donc $f(0) < f(3)$ : $f$ n'est pas décroissante sur cette réunion. Le théorème ne s'applique que sur un intervalle. $f$ est décroissante sur $[-1\,;2[$ et sur $]2\,;5]$, mais chaque intervalle pris séparément.

(e) Le maximum local $f(-1) = -2$ est plus petit que le minimum local $f(5) = 10$. Ce n'est pas une erreur : un extremum local ne compare $f(x)$ qu'aux valeurs prises tout près. $-2$ est la plus grande valeur de $f$ près de $-1$ dans $]-\infty\,;2[$. 10 est la plus petite près de 5 dans $]2\,;+\infty[$. Ces deux intervalles sont séparés par la valeur interdite 2.

**Ex. 27** ★★★ **Un paramètre pour une fonction croissante**

(a) $f_m$ est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x$, $f'_m(x) = 3x^2 + 2mx + 3$. Son discriminant est $\Delta = (2m)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 4m^2 - 36 = 4(m-3)(m+3)$.

**Ex. 27** **(suite)**

(b) $f'_{-5}(x) = 3x^2 - 10x + 3$, donc $\Delta = 100 - 36 = 64$. Les racines sont $\frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{10+8}{6} = 3$. Comme $a = 3 > 0$, $f'_{-5}(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. $f_{-5}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 1 - 1 = -\frac{14}{27}$ et $f_{-5}(3) = 27 - 45 + 9 - 1 = -10$.

| x | -∞ | $\frac{1}{3}$ | 3 | +∞ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_{-5}(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f_{-5}(x)$ | ↗ | $-\frac{14}{27}$ | ↘ | -10 | ↗ |

$f_{-5}$ est croissante sur $]-\infty\,;\frac{1}{3}]$, décroissante sur $[\frac{1}{3}\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$. Elle a un maximum local $-\frac{14}{27}$ en $\frac{1}{3}$ et un minimum local $-10$ en 3.

(c) Non. $f'_3(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$, donc pour tout réel $x$, $f'_3(x) \geqslant 0$. $f'_3$ ne s'annule qu'en $-1$, un point isolé, et ne change pas de signe. D'après la version stricte du théorème, $f_3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0.

(d) Si $-3 \leqslant m \leqslant 3$, alors $\Delta = 4(m-3)(m+3) \leqslant 0$. Dans ce cas, $f'_m(x)$ a le signe de $a = 3$ : $f'_m(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x$, donc $f_m$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, supposons $f_m$ croissante sur $\mathbb{R}$. D'après la réciproque admise, $f'_m(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x$. Si $\Delta > 0$, $f'_m(x)$ serait strictement négatif entre ses deux racines, ce qui est impossible.
Donc $\Delta \leqslant 0$, c'est-à-dire $m \in [-3\,;3]$. Conclusion : $f_m$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m \in [-3\,;3]$.

**Ex. 28** ★★★ **Une dérivée qui s'annule sans changer de signe**

(a) $f$ est un polynôme, donc elle est dérivable sur $[-3\,;4]$. Pour tout $x$ de $[-3\,;4]$, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16$. Par ailleurs, $4(x+1)(x-2)^2 = 4(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 4(x^3 - 3x^2 + 4) = 4x^3 - 12x^2 + 16$. On a donc bien $f'(x) = 4(x+1)(x-2)^2$.

(b) Pour tout $x$, $(x-2)^2 \geqslant 0$ et ce carré ne s'annule qu'en 2 ; de plus $4 > 0$.
Donc $f'(x)$ a le signe de $x + 1$, sauf en 2 où il est nul. On obtient : $f'(x) < 0$ sur $[-3\,;-1[$, $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ sur $]-1\,;2[$ et sur $]2\,;4]$, et $f'(2) = 0$.

(c) Non. $f'$ s'annule en 2 mais ne change pas de signe : elle est positive avant et après. Sur $[-1\,;4]$, $f'(x) > 0$ sauf en $-1$ et en 2, des points isolés.
Donc $f$ est strictement croissante sur $[-1\,;4]$ et n'a pas d'extremum local en 2. La tangente en 2 est seulement horizontale.

**Ex. 28** **(suite)**

(d) $f(-3) = 81 + 108 - 48 = 141$, $f(-1) = 1 + 4 - 16 = -11$, $f(2) = 16 - 32 + 32 = 16$ et $f(4) = 256 - 256 + 64 = 64$.

| x | −3 | | −1 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | 0 | + | 0 | + | |
| f(x) | 141 | ↘ | −11 | ↗ | 16 | ↗ | 64 |

$f$ est décroissante sur $[-3\,;-1]$ (de 141 à $-11$) et croissante sur $[-1\,;4]$ (de $-11$ à 64). Le minimum de $f$ sur $[-3\,;4]$ est $-11$, atteint en $-1$. Pour le maximum, on compare les images des bornes : $141 > 64$, donc le maximum est 141, atteint en $-3$.

(e) Non. Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de $f$, pas le signe de $f(x)$. Ici $f$ décroît de $f(-3) = 141$ à $f(-1) = -11$ sur $[-3\,;-1]$, et elle prend des valeurs positives. Par exemple, $f(-2) = 16 + 32 - 32 = 16 > 0$ .

## 5. *Tableau de variations et extremums*

**Ex. 29** ★☆☆ **Lire le signe de f′ autour de a**

(a) $f'(3) = 0$. On a $4x - 12 < 0$ pour $x < 3$ et $4x - 12 > 0$ pour $x > 3$ : $f'$ passe de $-$ à $+$.
Donc $f(3)$ est un minimum local.

(b) $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$. On a $-2x + 5 > 0$ pour $x < \frac{5}{2}$ et $-2x + 5 < 0$ pour $x > \frac{5}{2}$ : $f'$ passe de $+$ à $-$.
Donc $f\left(\frac{5}{2}\right)$ est un maximum local.

(c) $f'(-1) = 0$, mais $3(x+1)^2 \geqslant 0$ pour tout réel $x$ : $f'$ ne change pas de signe en $-1$.
Donc $f$ n'a pas d'extremum en $-1$
(même situation que $x^3$ en 0).

(d) $f'(4) = 0$. Pour $0 < x < 4$, on a $x > 0$ et $x - 4 < 0$, donc $f'(x) < 0$. Pour $x > 4$, $f'(x) > 0$. $f'$ passe de $-$ à $+$ : $f(4)$ est un minimum local.

(e) $f'(-3) = -9 + 9 = 0$. $-x^2 + 9$ est un trinôme de coefficient $-1 < 0$ et de racines $-3$ et 3. Il est négatif pour $x < -3$ et positif sur $]-3\,;3[$. $f'$ passe de $-$ à $+$ : $f(-3)$ est un minimum local.

(f) $f'(0) = 1 \neq 0$. Or un extremum local en un point intérieur impose $f'(0) = 0$.
Donc $f$ n'a pas d'extremum en 0. D'ailleurs $f'(x) > 0$ pour tout $x$ : $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Ex. 30** ★☆☆ **Valeur de l'extremum et abscisse**

(a) $f'(x) = 2x - 6$ s'annule en 3 et passe de $-$ à $+$. Le minimum local vaut $f(3) = 9 - 18 + 11 = 2$. Il est atteint en $x = 3$.

(b) $f'(x) = -4x + 8$ s'annule en 2 et passe de $+$ à $-$. Le maximum local vaut $f(2) = -8 + 16 - 1 = 7$. Il est atteint en $x = 2$.

(c) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45 = 3(x^2 + 2x - 15) = 3(x + 5)(x - 3)$. Sur $]0\,;+\infty[$, $3(x+5) > 0$ : $f'$ a le signe de $x - 3$ et passe de $-$ à $+$ en 3. Le minimum local vaut $f(3) = 27 + 27 - 135 = -81$. Il est atteint en $x = 3$.

(d) $f'(x) = 12 - 3x^2 = 3(2 - x)(2 + x)$. Sur $]0\,;+\infty[$, $2 + x > 0$ : $f'$ a le signe de $2 - x$ et passe de $+$ à $-$ en 2. Le maximum local vaut $f(2) = 24 - 8 = 16$. Il est atteint en $x = 2$.

(e) $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$. Cette dérivée s'annule en 1. Elle est négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$. Le minimum local vaut $f(1) = 1 - 2 = -1$. Il est atteint en $x = 1$.

(f) $u = x$, $u' = 1$, $v = x^2 + 1$, $v' = 2x$.
Donc $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. Sur $]0\,;+\infty[$, $f'$ a le signe de $1 - x$ et passe de $+$ à $-$ en 1. Le maximum local vaut $f(1) = \frac{1}{2}$. Il est atteint en $x = 1$.

**Ex. 31** ★★☆ **Maximum local ou maximum sur le segment ?**

(a) $f$ est dérivable sur $[-2\,;6]$ comme fonction polynôme. On a $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$. Pour $x^2 - 2x - 3$ : $\Delta = 4 + 12 = 16$, donc les racines sont $-1$ et 3. Ainsi $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$. Le coefficient 3 est positif : $f'(x) > 0$ sur $[-2\,;-1[$ et sur $]3\,;6]$, et $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;3[$.

(b) On calcule $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0$, $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$, $f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$ et $f(6) = 216 - 108 - 54 + 2 = 56$.

| **x** | **−2** | **−1** | **3** | **6** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | − | 0 | + | | |
| f(x) | 0 | ↗ | 7 | ↘ | −25 | ↗ | 56 |

(c) Non. $f'$ passe de $+$ à $-$ en $-1$ : $f(-1) = 7$ n'est qu'un maximum local. À la borne, $f(6) = 56 > 7$. Le maximum de $f$ sur $[-2\,;6]$ est donc 56, atteint en $x = 6$, où pourtant $f'(6) = 63 \neq 0$.

**Ex. 31** **(suite)**

(d) Les candidats sont $f(-2) = 0$ et $f(3) = -25$. Le minimum de $f$ sur $[-2\,;6]$ est donc $-25$, atteint en $x = 3$. Comme $f'(3) = 0$, la tangente est horizontale : $y = -25$.

**Ex. 32** ★★☆ **Placer le minimum avec un paramètre**

(a) $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, et le dénominateur ne s'y annule pas. On pose $u = x^2 + k$, $u' = 2x$, $v = x$, $v' = 1$. Alors $f'(x) = \frac{2x \times x - (x^2+k) \times 1}{x^2} = \frac{x^2-k}{x^2}$.

(b) Condition nécessaire : $f'(3) = 0$, soit $\frac{9-k}{9} = 0$, donc $k = 9$. Vérifions le changement de signe :
$f'(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$, avec $x + 3 > 0$ et $x^2 > 0$. $f'$ est négative sur $]0\,;3[$ et positive sur $]3\,;+\infty[$.
Donc $f(3) = \frac{18}{3} = 6$ est un minimum.

(c) $f'(x) = \frac{x^2-7}{x^2} = \frac{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}{x^2}$, avec $x + \sqrt{7} > 0$ et $x^2 > 0$ : $f'$ passe de $-$ à $+$ en $\sqrt{7}$. Yanis a tort : $\sqrt{7} \approx 2{,}65$ est l'abscisse où le minimum est atteint. Le minimum est la valeur $f(\sqrt{7}) = \frac{14}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7} \approx 5{,}29$.

(d) $\sqrt{7} \approx 2{,}65$ appartient à $[1\,;7]$. $f$ est décroissante sur $[1\,;\sqrt{7}]$ et croissante sur $[\sqrt{7}\,;7]$ : le maximum est donc atteint à une borne. $f(1) = \frac{8}{1} = 8$ et $f(7) = \frac{56}{7} = 8$. Le maximum de $f$ sur $[1\,;7]$ est 8, atteint en $x = 1$ et en $x = 7$.

**Ex. 33** ★★★ **Une tangente horizontale sans extremum**

(a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout réel $x$ : $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$.

(b) $4x^2 \geqslant 0$ et ne s'annule qu'en 0 : pour $x \neq 0$, $f'(x)$ a le signe de $x - 3$.
Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;3[$, et $f'(x) > 0$ sur $]3\,;+\infty[$. On a $f(0) = 10$ et $f(3) = 81 - 108 + 10 = -17$.

| **x** | **−∞** | **0** | **3** | **+∞** | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | − | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 10 | ↘ | −17 | ↗ |

$f$ est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.

**Ex. 33** **(suite)**

(c) Non. On a bien $f'(0) = 0$, mais $f'$ est négative de part et d'autre de 0 : elle ne change pas de signe. Sur $]-\infty\,;3]$, $f'$ est négative et ne s'annule qu'en 0 et en 3 : $f$ y est strictement décroissante. Par exemple, $f(-1) = 15 > f(0) = 10 > f(1) = 7$. La tangente en 0, d'équation $y = 10$, est horizontale, mais $f$ n'a pas d'extremum en 0.

(d) En 3, $f'$ s'annule en passant de $-$ à $+$. Comme $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$, pour tout réel $x$, $f(x) \geqslant f(3)$. Le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $-17$, atteint en $x = 3$.

(e) Pour tout réel $x$, $f(x) \geqslant -17$, soit $x^4 - 4x^3 + 10 \geqslant -17$, donc $x^4 + 27 \geqslant 4x^3$. L'égalité a lieu quand $f(x) = -17$, c'est-à-dire seulement en $x = 3$ : $81 + 27 = 108 = 4 \times 27$.

**Ex. 34** ★★★ **Retrouver une fonction grâce à sa tangente horizontale**

(a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. Pour tout réel $x$ : $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

(b) $A \in \mathcal{C}_f$ : $f(2) = -3$, soit $8 + 4a + 2b + 1 = -3$, donc $2a + b = -6$. La tangente en $A$ est horizontale : $f'(2) = 0$, soit $12 + 4a + b = 0$, donc $4a + b = -12$. En soustrayant les deux équations : $2a = -6$, donc $a = -3$, puis $b = -6 - 2 \times (-3) = 0$. Ainsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

(c) Pour tout réel $x$ : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. C'est un trinôme de racines 0 et 2, de coefficient $3 > 0$ : il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. $f(0) = 1$ et $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$.

| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 1 | ↘ | −3 | ↗ |

(d) $f'(0) = 0$ et $f'$ passe de $+$ à $-$ en 0 : $f$ admet un maximum local. Sa valeur est $f(0) = 1$, atteinte en $x = 0$.

(e) Non. $f'(2) = 0$ et $f'$ passe de $-$ à $+$ en 2 : $f(2) = -3$ est bien un minimum local. Mais ce n'est pas le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$, car $f(-2) = -8 - 12 + 1 = -19 < -3$. Une tangente horizontale ne suffit pas : le minimum local ne vaut que près de 2.

**Ex. 35** ★★★ **Concentration d'un médicament**

(a) $u(t) = 12t$, $u'(t) = 12$ ; $v(t) = t^2 + 3$, $v'(t) = 2t$. $v(t) \geqslant 3 > 0$, donc $C$ est dérivable sur $[0\,;5]$ comme quotient de fonctions dérivables. $C'(t) = \frac{12(t^2+3) - 12t \times 2t}{(t^2+3)^2} = \frac{36 - 12t^2}{(t^2+3)^2} = \frac{12(3-t^2)}{(t^2+3)^2}$.

(b) $(t^2+3)^2 > 0$, donc $C'(t)$ a le signe de $3 - t^2 = (\sqrt{3} - t)(\sqrt{3} + t)$. Sur $[0\,;5]$, $\sqrt{3} + t > 0$ : le signe est celui de $\sqrt{3} - t$.
Donc $C'(t) > 0$ sur $[0\,;\sqrt{3}[$ et $C'(t) < 0$ sur $]\sqrt{3}\,;5]$.
$C(0) = 0$, $C(\sqrt{3}) = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$, $C(5) = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$.

| t | 0 | $\sqrt{3}$ | 5 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C'(t) | + | 0 | − | | |
| C(t) | 0 | ↗ | $2\sqrt{3}$ | ↘ | $\frac{15}{7}$ |

(c) $C'$ s'annule en $\sqrt{3}$ en passant de $+$ à $-$ : maximum local $C(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$. Aux bornes, $C(0) = 0$ et $C(5) = \frac{15}{7} \approx 2{,}14$, plus petits. La concentration maximale est donc $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ mg/L. Elle est atteinte à $t = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ h, soit environ 1 h 44 min ($0{,}732 \times 60 \approx 44$), et non 1 h 73 min.

(d) Comme $t^2 + 3 > 0$ : $C(t) \geqslant 3 \iff 12t \geqslant 3t^2 + 9 \iff 3t^2 - 12t + 9 \leqslant 0 \iff t^2 - 4t + 3 \leqslant 0$.
$\Delta = 16 - 12 = 4$, racines $t_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $t_2 = \frac{4+2}{2} = 3$.
Le trinôme est négatif entre ses racines : $t \in [1\,;3]$, inclus dans $[0\,;5]$. Le médicament est efficace pendant $3 - 1 = 2$ heures.

## 6. *Problèmes d'optimisation*

**Ex. 36** ★☆☆ **Mettre un problème en équation**

(a) L'autre côté vaut $10 - x$. Il faut $x > 0$ et $10 - x > 0$, donc $x \in ]0\,;10[$. On obtient $A(x) = x(10-x) = 10x - x^2$
(en cm²).

(b) L'autre côté vaut $\frac{50}{x}$, avec $x \in ]0\,;+\infty[$. On obtient $P(x) = 2x + 2 \times \frac{50}{x} = 2x + \frac{100}{x}$
(en m).

(c) La boîte mesure $40 - 2x$ sur $24 - 2x$, pour une hauteur $x$. Il faut $x > 0$ et $24 - 2x > 0$, donc $x \in ]0\,;12[$. On obtient $V(x) = x(40-2x)(24-2x) = 4x^3 - 128x^2 + 960x$
(en cm³).

**Ex. 36** **(suite)**

(d) Le volume donne la hauteur : $x^2h = 27$, donc $h = \frac{27}{x^2}$, avec $x \in ]0\,;+\infty[$. Les deux faces carrées ont chacune pour aire $x^2$, et les quatre faces latérales ont chacune pour aire $xh = \frac{27}{x}$. On obtient $S(x) = 2x^2 + 4 \times \frac{27}{x} = 2x^2 + \frac{108}{x}$
(en dm²).

(e) Ici $x \in [1\,;30]$. On obtient $C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = x + 6 + \frac{49}{x}$
(en euros par objet).

(f) Ici $x \in [0\,;15]$. Le bénéfice est la recette moins le coût : $B(x) = 40x - (x^3 - 12x^2 + 60x + 20) = -x^3 + 12x^2 - 20x - 20$
(en euros).

**Ex. 37** ★☆☆ **La racine est-elle dans l'intervalle ?**

(a) $12 - 2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 6$, et $6 \in [0\,;10]$. $A'$ est positive sur $[0\,;6]$ puis négative sur $[6\,;10]$ : $A$ croît puis décroît. L'aire est maximale pour $x = 6$.

(b) La racine 6 n'est pas dans $[0\,;4]$. Pour tout $x$ de $[0\,;4]$, $12 - 2x \geqslant 4 > 0$, donc $A$ est croissante. L'aire est maximale à la borne, pour $x = 4$.

(c) Sur $]0\,;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $x + 3 > 0$ : $P'(x)$ a le signe de $x - 3$. La racine $-3$ est hors de l'intervalle. $P$ décroît sur $]0\,;3]$ puis croît sur $[3\,;+\infty[$ : le périmètre est minimal pour $x = 3$.

(d) $C'_M(x) = \frac{x^2-64}{x^2}$, qui s'annule en $x = 8$. Or $8 \notin [10\,;40]$. Pour tout $x$ de $[10\,;40]$, $x^2 \geqslant 100 > 64$, donc $C'_M(x) > 0$ et $C_M$ est croissante. Le coût moyen est minimal à la borne : pour 10 objets.

(e) Sur $]0\,;6[$, $x - 6 < 0$ : $V'(x)$ a le signe contraire de $x - 2$. $V'$ est positive sur $]0\,;2]$ puis négative sur $[2\,;6[$ : $V$ croît puis décroît. Le volume est maximal pour $x = 2$.

(f) $\Delta = 30^2 - 4 \times (-3) \times (-48) = 324 = 18^2$, d'où les racines $x_1 = \frac{-30+18}{-6} = 2$ et $x_2 = \frac{-30-18}{-6} = 8$. Sur $[5\,;10]$, seule la racine 8 compte. $B'(x) = -3(x-2)(x-8)$ est du signe de $-3$ hors des racines et du signe opposé entre elles : $B'$ est positive sur $[5\,;8]$ et négative sur $[8\,;10]$. Le bénéfice est maximal pour $x = 8$.

**Ex. 38** ★★☆ **La boîte de Lina**

(a) La base est un carré de côté $30 - 2x$, et la hauteur vaut $x$. Il faut $x > 0$ et $30 - 2x > 0$, donc $x \in ]0\,;15[$. On obtient $V(x) = x(30-2x)^2 = x(900 - 120x + 4x^2) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.

**Ex. 38** **(suite)**

(b) $V$ est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $]0\,;15[$. $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x^2 - 20x + 75)$. Pour $x^2 - 20x + 75$ : $\Delta = 400 - 300 = 100$, d'où les racines $x_1 = \frac{20-10}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{20+10}{2} = 15$.
Donc $V'(x) = 12(x-5)(x-15)$.

(c) Sur $]0\,;15[$, $x - 15 < 0$ : $V'(x)$ a le signe contraire de $x - 5$. La racine 15 est une borne exclue, elle ne compte pas. $V(5) = 5 \times 20^2 = 2000$.

| x | 0 | | 5 | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| V'(x) | | + | 0 | − | |
| V(x) | | ↗ | 2000 | ↘ | |

(d) Le volume est maximal pour $x = 5$. La boîte mesure alors 20 cm sur 20 cm à la base, pour 5 cm de haut. Son volume maximal est 2000 cm³, soit 2 L.

**Ex. 39** ★★☆ **L'enclos de Noé**

(a) Le côté parallèle au mur vaut $\frac{150}{x}$.
Donc $L(x) = 2x + \frac{150}{x}$
(en m).

(b) $L$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, comme somme de fonctions dérivables. $L'(x) = 2 - \frac{150}{x^2} = \frac{2(x^2-75)}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, $L'(x)$ a le signe de $x^2 - 75$, dont les racines sont $\pm\sqrt{75} = \pm 5\sqrt{3}$. Sur $]0\,;+\infty[$, seule $5\sqrt{3}$ compte.

| x | 0 | | $5\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| L'(x) | | − | 0 | + | |

$L$ est décroissante sur $]0\,;5\sqrt{3}]$, puis croissante sur $[5\sqrt{3}\,;+\infty[$.

(c) $L$ atteint son minimum en $x = 5\sqrt{3}$. On calcule $L(5\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} + \frac{150}{5\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$. La longueur minimale de clôture est $20\sqrt{3} \approx 34{,}64$ m.

(d) Le côté parallèle au mur doit vérifier $\frac{150}{x} \leqslant 15$, soit $x \geqslant 10$. Or $5\sqrt{3} \approx 8{,}66 < 10$ : cette racine est hors du nouvel intervalle $[10\,;+\infty[$. Sur cet intervalle, $L'(x) > 0$, donc $L$ est croissante. Le minimum est atteint à la borne $x = 10$ : $L(10) = 20 + 15 = 35$. La longueur minimale de clôture est alors de 35 m.

**Ex. 40** ★★★ **L'atelier de Salomé**

(a) $C_M(x) = \frac{x^3-6x^2+15x+32}{x} = x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x}$. $C_M$ est dérivable sur $[1\,;10]$ comme somme de fonctions dérivables (car $x \neq 0$). Pour tout réel $x$ de $[1\,;10]$ : $C'_M(x) = 2x - 6 - \frac{32}{x^2} = \frac{2x^3-6x^2-32}{x^2} = \frac{2(x^3-3x^2-16)}{x^2}$.

**Ex. 40** **(suite)**

(b) $(x-4)(x^2+x+4) = x^3+x^2+4x-4x^2-4x-16 = x^3-3x^2-16$. Pour $x^2+x+4$ :
$\Delta = 1-16 = -15 < 0$, donc ce trinôme est toujours du signe de $a=1$, c'est-à-dire strictement positif. Comme $2>0$ et $x^2>0$, $C'_M(x)$ a le signe de $x-4$ : négatif sur $[1\,;4]$, positif sur $[4\,;10]$. $C_M(1) = 1-6+15+32 = 42$, $C_M(4) = 16-24+15+8 = 15$, $C_M(10) = 100-60+15+3{,}2 = 58{,}2$.

| x | 1 | | 4 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'_M(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $C_M(x)$ | 42 | $\searrow$ | 15 | $\nearrow$ | 58,2 |

(c) Le coût moyen est minimal pour $x=4$, soit 400 casques. Il vaut alors 15 milliers d'euros par centaine, c'est-à-dire $15\,000 \div 100 = 150$ € par casque.

(d) $B(x) = 27x - C(x) = -x^3+6x^2+12x-32$. $B$ est un polynôme, dérivable sur $[1\,;10]$ :
$B'(x) = -3x^2+12x+12$. $\Delta = 144+144 = 288$ et $\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$, d'où les racines $x_1 = \frac{-12+12\sqrt{2}}{-6} = 2-2\sqrt{2} \approx -0{,}83$ et $x_2 = 2+2\sqrt{2} \approx 4{,}83$. Or $x_1 \notin [1\,;10]$, donc on ne la retient pas. $B'(x)$ est du signe de $a=-3$ à l'extérieur des racines et du signe opposé entre elles. Comme $x_1<1$, on a $B'(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;2+2\sqrt{2}]$ et $B'(x) \leqslant 0$ sur $[2+2\sqrt{2}\,;10]$.

(e) $B$ est croissante puis décroissante : son maximum est atteint pour $x = 2+2\sqrt{2} \approx 4{,}83$ (centaines), soit environ 483 casques. Avec $(2+2\sqrt{2})^2 = 12+8\sqrt{2}$ et $(2+2\sqrt{2})^3 = 56+40\sqrt{2}$, on obtient $B(2+2\sqrt{2}) = -(56+40\sqrt{2})+6(12+8\sqrt{2})+12(2+2\sqrt{2})-32 = 8+32\sqrt{2} \approx 53{,}25$. Le bénéfice maximal est d'environ 53 255 €, pour à peu près 483 casques fabriqués et vendus.

**Ex. 41** ★★★ **La porte sous l'arche**

(a) La largeur $2x$ est positive, donc $x>0$. Pour que la hauteur $f(x) = 4-x^2$ soit strictement positive, il faut $x^2<4$, soit $x<2$.
Donc $x \in ]0\,;2[$. La largeur vaut $2x$ et la hauteur $4-x^2$, d'où $A(x) = 2x(4-x^2) = 8x-2x^3$.

**Ex. 41** **(suite)**

(b) $A$ est un polynôme, dérivable sur $[0\,;2]$ :
$A'(x) = 8-6x^2 = 2(4-3x^2)$. $4-3x^2=0 \iff x^2 = \frac{4}{3} \iff x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, cette dernière racine étant hors de $[0\,;2]$. $A'(x)$ est du signe de $a=-6$ à l'extérieur des racines : $A'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ et $A'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\,;2\right]$. $A(0)=0$, $A(2)=0$ et $A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9}$.

| x | 0 | | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| A'(x) | | $+$ | 0 | $-$ | |
| A(x) | 0 | $\nearrow$ | $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | 0 |

(c) L'aire est maximale pour $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. La largeur est $2x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}31$ m et la hauteur est $4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ m. L'aire maximale vaut $\frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 6{,}16$ m².

(d) $2x \geqslant 2{,}6 \iff x \geqslant 1{,}3$, donc $x \in [1{,}3\,;2[$. Comme $\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155 < 1{,}3$, la racine de $A'$ est hors de ce nouvel intervalle : $A$ y est décroissante, donc son maximum est atteint à la borne $x=1{,}3$. On a $A(1{,}3) = 8\times 1{,}3 - 2\times 1{,}3^3 = 10{,}4 - 4{,}394 = 6{,}006$. Or $6{,}006 \geqslant 6$ : Lucas a raison. La porte de 2,6 m de large et $4-1{,}69 = 2{,}31$ m de haut a une aire de 6,006 m², soit au moins 6 m².

**Ex. 42** ★★★ **Le bac à semis de Yanis**

(a) Le volume vaut $x^2 h = 4\,000$, donc $h = \frac{4\,000}{x^2}$. Le fond a pour aire $x^2$, et chacune des quatre faces a pour aire $xh = \frac{4\,000}{x}$.
Donc $S(x) = x^2 + 4\times\frac{4\,000}{x} = x^2 + \frac{16\,000}{x}$.

(b) $S$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout réel $x>0$ : $S'(x) = 2x - \frac{16\,000}{x^2} = \frac{2x^3-16\,000}{x^2} = \frac{2(x^3-8\,000)}{x^2}$. D'autre part, $(x-20)(x^2+20x+400) = x^3+20x^2+400x-20x^2-400x-8\,000 = x^3-8\,000$.

(c) $S'(x) = \frac{2(x-20)(x^2+20x+400)}{x^2}$. Pour $x^2+20x+400$ :
$\Delta = 400-1\,600 < 0$, donc ce trinôme est strictement positif. Comme $2>0$ et $x^2>0$, $S'(x)$ a le signe de $x-20$ : $S'(x)<0$ sur $]0\,;20[$ et $S'(x)>0$ sur $]20\,;+\infty[$.
$S(20) = 400+800 = 1\,200$.

| x | 0 | | 20 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S'(x) | | $-$ | 0 | $+$ | |
| S(x) | | $\searrow$ | 1200 | $\nearrow$ | |

(d) $S$ atteint son minimum en $x=20$. Le côté de la base vaut alors 20 cm et la hauteur $h = \frac{4\,000}{400} = 10$ cm. Yanis utilise 1 200 cm² de carton.

**Ex. 42** **(suite)**

(e) $h \leqslant 8 \iff \frac{4\,000}{x^2} \leqslant 8 \iff x^2 \geqslant 500 \iff x \geqslant 10\sqrt{5}$ (car $x > 0$). Comme $10\sqrt{5} \approx 22{,}36 > 20$, la valeur 20 n'est plus possible : $S$ est croissante sur $[10\sqrt{5}\,;+\infty[$, donc son minimum est atteint à la borne $x = 10\sqrt{5}$. Alors $S(10\sqrt{5}) = 500 + \frac{16\,000}{10\sqrt{5}} = 500 + 320\sqrt{5} \approx 1\,215{,}54$. Yanis choisit une base d'environ 22,36 cm de côté et une hauteur de 8 cm, ce qui demande environ 1 215,54 cm² de carton.

## 7. *Position de deux courbes, inégalités*

**Ex. 43** ★☆☆ **Position de deux courbes par factorisation**

(a) $d(x) = x^2 + 25 - 10x = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 \geqslant 0$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$. Les courbes ont un seul point commun, d'abscisse 5.

(b) $d(x) = x^2 + 2x - 3$. On a $\Delta = 4 + 12 = 16$, donc les racines sont $-3$ et 1, et $d(x) = (x-1)(x+3)$. $d$ est positive à l'extérieur des racines : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\,;-3]$ et sur $[1\,;+\infty[$, en dessous sur $[-3\,;1]$. Points communs : abscisses $-3$ et 1.

(c) $d(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Comme $x^2 \geqslant 0$, $d(x)$ a le signe de $x - 1$ (et s'annule aussi en 0).
Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\,;1]$ et au-dessus sur $[1\,;+\infty[$. Points communs : abscisses 0 et 1.

(d) $d(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$. Sur $[0\,;+\infty[$, $x \geqslant 0$ et $x + 2 > 0$, donc $d(x)$ a le signe de $x - 2$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[0\,;2]$ et au-dessus sur $[2\,;+\infty[$. Points communs : abscisses 0 et 2.

(e) $d(x) = x^2 + 1 - 2x^2 + 3 = 4 - x^2 = (2-x)(2+x)$. Ce trinôme est positif entre ses racines.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[-2\,;2]$ et en dessous sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[2\,;+\infty[$. Points communs : abscisses $-2$ et 2.

**Ex. 44** ★☆☆ **Courbe et tangente : qui est au-dessus ?**

(a) $f'(x) = 2x - 1$, $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = -3$.
Donc $T : y = -3(x+1) + 2 = -3x - 1$. Alors $d(x) = x^2 - x + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geqslant 0$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $T$ sur $\mathbb{R}$ ; elles se touchent seulement en $x = -1$.

**Ex. 44** **(suite)**

(b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f'(2) = -\frac{1}{4}$.
Donc $T : y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} + 1$. Alors $d(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{4} - 1 = \frac{4 + x^2 - 4x}{4x} = \frac{(x-2)^2}{4x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, $4x > 0$, donc $d(x) \geqslant 0$ : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $T$ sur $]0\,;+\infty[$, avec un seul point commun, d'abscisse 2.

(c) $f'(x) = 4x^3$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 4$.
Donc $T : y = 4(x-1) + 1 = 4x - 3$. Alors $d(x) = x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$. Pour $x^2 + 2x + 3$ : $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, donc $x^2 + 2x + 3 > 0$ pour tout réel $x$. Ainsi $d(x) \geqslant 0$ : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $T$ sur $\mathbb{R}$ ; un seul point commun, d'abscisse 1.

(d) $f'(x) = -2x + 4$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.
Donc $T : y = 4x + 1$. Alors $d(x) = -x^2 + 4x + 1 - 4x - 1 = -x^2 \leqslant 0$. $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $T$ sur $\mathbb{R}$ ; elles se touchent seulement en $x = 0$.

**Ex. 45** ★★☆ **Une inégalité prouvée par les variations**

(a) $d(x) = x^3 + 5 - 3x^2 = x^3 - 3x^2 + 5$. $d$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $d'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

(b) Sur $[0\,;+\infty[$, on a $3x \geqslant 0$, donc $d'(x)$ a le signe de $x - 2$ : $d'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;2]$ et $d'(x) \geqslant 0$ sur $[2\,;+\infty[$. On calcule $d(0) = 5$ et $d(2) = 8 - 12 + 5 = 1$.

| x | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| d'(x) | 0 | − | 0 | + | |
| d(x) | 5 | ↘ | 1 | ↗ | |

(c) Sur $[0\,;+\infty[$, le minimum de $d$ est $d(2) = 1 > 0$.
Donc pour tout réel $x$ de $[0\,;+\infty[$, $d(x) > 0$, c'est-à-dire $x^3 + 5 > 3x^2$. Sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$, et les deux courbes n'ont aucun point commun.

(d) Non. C'est le signe de $d$ qui donne la position, pas celui de $d'$. Sur $[0\,;2]$, $d$ décroît mais reste supérieure ou égale à $d(2) = 1 > 0$.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[0\,;2]$.

(e) $d(-2) = -8 - 12 + 5 = -15 < 0$, donc $f(-2) < g(-2)$. L'inégalité est fausse pour $x = -2$ : elle n'est pas vraie sur $\mathbb{R}$. Elle est seulement démontrée sur $[0\,;+\infty[$.

**Ex. 46** ★★☆ **Vrai ou faux sur les inégalités**

(a) Faux. Pour $x = \frac{1}{4}$, on a $\sqrt{x} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. En effet, $d(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ est strictement négatif sur $]0\,;1[$. L'inégalité est vraie seulement sur $[1\,;+\infty[$ (et en 0).

**Ex. 46** **(suite)**

(b) Vrai. Pour tout réel $x$ de $[1\,;+\infty[$, $d(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. Or $x-1\geqslant 0$ et $x^2>0$, donc $d(x)\geqslant 0$, soit $\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{x}$, avec égalité seulement en $x=1$.

(c) Faux. $d(x)=x^3+x-2x^2=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$ s'annule en 0 et en 1. Les courbes ont donc deux points communs : $(0\,;0)$ et $(1\,;2)$.

(d) Faux. $f'(x)=3x^2$, $f(0)=0$ et $f'(0)=0$, donc $T:y=0$. Alors $d(x)=x^3-0=x^3$. Contre-exemple : $d(-1)=-1<0$. $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $T$ sur $]-\infty\,;0]$ et au-dessus sur $[0\,;+\infty[$ : elle traverse sa tangente en 0.

**Ex. 47** ★★★ **La racine carrée sous sa tangente**

(a) $f(4)=\sqrt{4}=2$. Pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(4)=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$. $T:y=f'(4)(x-4)+f(4)=\frac{1}{4}(x-4)+2$, soit $T:y=\frac{1}{4}x+1$.

(b) $d(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{4}x-1$. $d$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables : $d'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$.

(c) Pour $x>0$, $4\sqrt{x}>0$ : $d'(x)$ a le signe de $2-\sqrt{x}$. Or $2-\sqrt{x}>0 \iff \sqrt{x}<2 \iff x<4$ (la racine carrée est croissante). $d(0)=0-0-1=-1$ et $d(4)=2-1-1=0$.

| x | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| d'(x) | | + | 0 | − | |
| d(x) | −1 | ↗ | 0 | ↘ | |

Le maximum de $d$ sur $[0\,;+\infty[$ est $d(4)=0$, donc $d(x)\leqslant 0$ pour tout réel $x$ de $[0\,;+\infty[$ : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $T$ sur $[0\,;+\infty[$, avec un seul point commun, d'abscisse 4 (solution de $d(x)=0$).

(d) Non. C'est le signe de $d$ qui donne la position, pas celui de $d'$. Sur $[0\,;4]$, $d'$ est positive mais $d$ croît de $-1$ à $0$ : $d$ reste négative. Par exemple $d(0)=-1<0$ : en 0, $\mathcal{C}_f$ est déjà sous $T$. $\mathcal{C}_f$ est sous $T$ sur tout $[0\,;+\infty[$.

(e) Pour tout réel $x$ de $[0\,;+\infty[$, $d(x)\leqslant 0$, soit $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{4}x+1$. On multiplie par $4>0$ (le sens ne change pas) : $4\sqrt{x}\leqslant x+4$. L'égalité a lieu seulement si $d(x)=0$, c'est-à-dire pour $x=4$. (Contrôle : $x+4-4\sqrt{x}=(\sqrt{x}-2)^2\geqslant 0$.)

**Ex. 48** ★★★ **Une inégalité vraie seulement sur un intervalle**

(a) $d(x)=x^3-3x+2$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. $d'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$ : trinôme positif à l'extérieur des racines $-1$ et 1. $d(-1)=-1+3+2=4$ et $d(1)=1-3+2=0$.

| x | $-\infty$ | | −1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d'(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| d(x) | | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | |

(b) Sur $[0\,;+\infty[$, $d$ décroît sur $[0\,;1]$ (de $d(0)=2$ à 0), puis croît sur $[1\,;+\infty[$ : son minimum sur cet intervalle est $d(1)=0$. Donc, pour tout réel $x$ de $[0\,;+\infty[$, $d(x)\geqslant 0$, c'est-à-dire $x^3\geqslant 3x-2$. L'égalité n'a lieu que pour $x=1$.

(c) $(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2=x^3-3x+2=d(x)$. Comme $(x-1)^2\geqslant 0$, $d(x)$ a le signe de $x+2$ (et s'annule en 1). Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\,;-2]$ et au-dessus sur $[-2\,;+\infty[$.

(d) Les abscisses des points communs sont les solutions de $d(x)=0$ : $x=-2$ ou $x=1$. $f(-2)=-8$ (et $g(-2)=-6-2=-8$), $f(1)=1$ (et $g(1)=3-2=1$). Points communs : $(-2\,;-8)$ et $(1\,;1)$.

(e) Faux. Contre-exemple : $x=-3$ donne $d(-3)=-27+9+2=-16<0$, donc $(-3)^3<3\times(-3)-2$. L'inégalité est vraie seulement sur $[-2\,;+\infty[$.

**Ex. 49** ★★★ **L'inverse face à une droite et une parabole**

(a) $d(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$. Pour $x>0$, $x>0$ et $1+x>0$, donc $d(x)$ a le signe de $1-x$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $D$ sur $]0\,;1]$ et en dessous sur $[1\,;+\infty[$. Point commun ($d(x)=0$ avec $x>0$) : $(1\,;1)$.

(b) Pour passer de $\frac{1}{x}\geqslant x$ à $1\geqslant x^2$, Tom a multiplié par $x$, qui est strictement négatif : le sens doit changer. Correction : $\frac{1}{x}\geqslant x \iff 1\leqslant x^2 \iff x\leqslant -1$ (car $x<0$). Sur $]-\infty\,;0[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $D$ seulement sur $]-\infty\,;-1]$. Contrôle : $x=-2$ donne $-\frac{1}{2}\geqslant -2$, mais $x=-\frac{1}{2}$ donne $-2<-\frac{1}{2}$.

(c) $h(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{x^2}{2}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables : $h'(x)=-\frac{1}{x^2}+x=\frac{-1+x^3}{x^2}=\frac{x^3-1}{x^2}$.

**Ex. 49** **(suite)**

ⓓ $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3-1$. Pour $x^2+x+1$ : $\Delta = 1^2-4\times1\times1 = -3 < 0$, donc $x^2+x+1>0$ pour tout réel $x$ (signe de $a=1$).
Comme $x^2>0$, $h'(x)$ a le signe de $x-1$ : $h'(x)<0$ sur $]0\,;1[$, $h'(1)=0$, $h'(x)>0$ sur $]1\,;+\infty[$.

ⓔ $h(1) = 1-1+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

| **x** | **0** | | **1** | | **$+\infty$** |
|---|---|---|---|---|---|
| h'(x) | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| h(x) | ‖ | ↘ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | |

Le minimum de $h$ sur $]0\,;+\infty[$ est $\frac{1}{2}>0$, donc pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$, $h(x)>0$ : $\frac{1}{x} > 1-\frac{x^2}{2}$. $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]0\,;+\infty[$, sans point commun.