Dérivée et variations d'une fonction – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Variations, extremums et courbes · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- « $f'(a) = 0$, donc extremum » est faux sans changement de signe de f' (x^5 en 0).
- Le maximum est une valeur $f(a)$; il est atteint en $x = a$: ne confonds pas les deux.
- Sur un segment, le maximum peut être atteint en une borne, où f' ne s'annule pas.
- Le théorème des variations ne vaut que sur un intervalle, pas sur une réunion comme $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.
- Pour la parité, $f(-x)$ se calcule avec des parenthèses : $(-x)^5 = -x^5$.
- Pour comparer deux courbes, c'est le signe de $d = f - g$ qui compte, pas celui de d'.

Exercice 1 – Du signe de $f'(x)$ au sens de variation ★

On donne la dérivée $f'(x)$ d'une fonction f dérivable sur l'intervalle indiqué. Étudie le signe de $f'(x)$, puis donne le sens de variation de f.

a) $f'(x) = 3x - 12$, sur $\mathbb{R}$

b) $f'(x) = -3\,(x + 1)$, sur $\mathbb{R}$

c) $f'(x) = (x - 2)\,(x + 4)$, sur $\mathbb{R}$

d) $f'(x) = (x + 2)^2$, sur $\mathbb{R}$

e) $f'(x) = -x\,(x - 5)$, sur $\mathbb{R}$

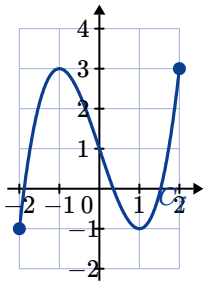
f) $f'(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$, sur $\mathbb{R}$

g) $f'(x) = \dfrac{x - 3}{x^2}$, sur $]0\,;\,+\infty[$

h) $f'(x) = -\dfrac{2}{(x + 1)^2}$, sur $]-1\,;\,+\infty[$

Exercice 2 – Lire la courbe de f ★

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f dérivable sur $[-2\,;\,2]$. Les points de la courbe d'abscisses -2, -1, 1 et 2 sont sur le quadrillage.



1. Dresse le tableau de variations de f sur $[-2\,;\,2]$.
2. Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;\,2]$.
3. Que valent $f'(-1)$ et $f'(1)$? Justifie.
4. Quel est le maximum de f sur $[-2\,;\,2]$? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

Exercice 3 – Variations d'un trinôme ★

Calcule $f'(x)$, étudie son signe, dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et donne son extremum.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$

c) $f(x) = 3x^2 + 12x$

d) $f(x) = -x^2 + 5$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

f) $f(x) = 5 - 4x - x^2$

Exercice 4 – Tableau de variations complet ★★

Calcule $f'(x)$ et factorise-le, étudie son signe, puis dresse le tableau de variations complet de f (avec les images).

a) $f(x) = x^3 - 12x + 5$, sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$, sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, sur $\mathbb{R}$

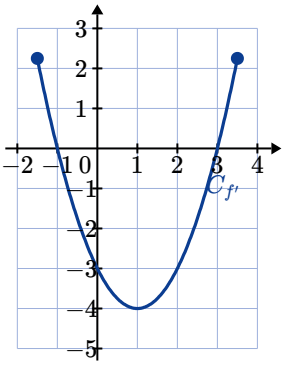
d) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$, sur $]0\,;\,+\infty[$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, sur $]1\,;\,+\infty[$

f) $f(x) = x^4 - 2x^2$, sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 – Lire la courbe de la dérivée ★★

La courbe ci-contre n'est pas celle de f : c'est celle de sa **dérivée** f', sur l'intervalle $[-1{,}5\,;\,3{,}5]$.



1. Lis les solutions de $f'(x) = 0$, puis donne le signe de $f'(x)$.
2. Dresse le tableau de variations de f (sans les valeurs).
3. f admet-elle des extremums locaux ? Précise leur nature et où ils sont atteints.
4. Lis $f'(1)$. Que représente ce nombre pour la courbe de f ?

Exercice 6 – Fonctions paires et impaires ★★

Étudie la parité de f : calcule $f(-x)$, puis compare à $f(x)$ et à $-f(x)$. Donne la symétrie de la courbe.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2$, sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = x^3 + 2x$, sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = x^2 + x$, sur $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, sur $\mathbb{R}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, sur $[0\,;\,+\infty[$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$, sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,2\}$

Exercice 7 – Démontrer une inégalité ★★★

Pour chaque question, étudie les variations de la différence $d(x)$, puis conclus.

a) Montre que, pour tout $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 3x - 2$.

b) Montre que, pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

c) Montre que, pour tout réel x, $x^4 \geqslant 4x - 3$.

d) Sur $]0\,;\,+\infty[$, on note $\mathcal{C}$ la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et T la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$. Étudie la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

Exercice 8 – Une étude complète ★★★

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.

1. Montre que $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$.
2. Étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Dresse le tableau de variations de f et donne son minimum.
4. Déduis-en que, pour tout $x > 0$, $x^3 - 12x + 16 \geqslant 0$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $f(x) = x^3 + 4$: « $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0, donc f admet un extremum en 0 ».

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$: « $f'(x) = -2x + 4$ s'annule en 2 en passant de $+$ à $-$: le maximum de f est 2 ».

c) $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[0\,;\,3]$: « f' s'annule seulement en 1, donc le maximum de f sur $[0\,;\,3]$ est $f(1) = -1$ ».

d) « $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a pour dérivée $-\dfrac{1}{x^2} < 0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ».

e) $f(x) = x^4 + x^2$: « $f(-x) = -x^4 - x^2 = -f(x)$, donc f est impaire ».

f) « $d(x) = x^2 - 1$ sur $[0\,;\,+\infty[$: $d'(x) = 2x \geqslant 0$, donc $d(x) \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$ ».

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Alors f est :
   A croissante sur $[-3\,;\,1]$ **B** décroissante sur $\mathbb{R}$ **C** décroissante sur $[-3\,;\,1]$
   D décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$
2. $f'(a) = 0$ et f' passe de $+$ à $-$ en a. Alors $f(a)$ est :
   A un maximum local **B** un minimum local **C** égal à 0 **D** ni un maximum ni un minimum
3. $f(x) = x^3 + 3x$. Alors :
   A f admet un minimum en 0 **B** f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ **C** $f'(0) = 0$
   D f est croissante sur $\mathbb{R}$
4. Sur $[-1\,;\,3]$, le maximum de $f(x) = x^2 - 4x$ est :
   A -4 **B** 5 **C** -1 **D** -3
5. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur un intervalle I signifie :
   A $f'(x) - g'(x) \geqslant 0$ pour tout x de I **B** $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de I **C** f est croissante sur I
   D $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout x de I
6. La fonction $f(x) = x^3 - x$, définie sur $\mathbb{R}$, est :
   A impaire **B** paire **C** ni paire ni impaire **D** paire et impaire

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).