Corrigé – Dérivée et variations d'une fonction

Mathématiques – Première spécialité

Variations, extremums et courbes · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Du signe de $f'(x)$ au sens de variation ★

On donne la dérivée $f'(x)$ d'une fonction f dérivable sur l'intervalle indiqué. Étudie le signe de $f'(x)$, puis donne le sens de variation de f.

a) $3x - 12 = 0 \iff 3x = 12 \iff x = 4$.

Le coefficient de x est 3, positif : $3x - 12$ est négatif avant 4 et positif après.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$3x-12$		$-$	0	$+$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est décroissante sur $]-\infty\,;\,4]$ et croissante sur $[4\,;\,+\infty[$.

b) -3 est un nombre négatif : son signe ne change jamais.

$x + 1 = 0 \iff x = -1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 1$ est négatif avant -1 et positif après.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-3		$-$	‖	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

c) $x + 4 = 0 \iff x = -4$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 4$ est négatif avant -4 et positif après.

$x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 2$ est négatif avant 2 et positif après.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est croissante sur $]-\infty\,;\,-4]$, décroissante sur $[-4\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

d) $(x+2)^2$ est un carré : il est positif, et nul seulement pour $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
$f'(-2) = 0$, *mais f' ne change pas de signe : f n'a pas d'extremum en -2.*

e) $-x = 0 \iff x = 0$.
Le coefficient de x est -1, négatif : $-x$ est positif avant 0 et négatif après.
$x - 5 = 0 \iff x = 5$.
Le coefficient de x est 1, positif : $x - 5$ est négatif avant 5 et positif après.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$, croissante sur $[0\,;\,5]$ et décroissante sur $[5\,;\,+\infty[$.

f) $4 > 0$ et $x^2 + 1 > 0$: le quotient est strictement positif pour tout réel x.
D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

g) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 3$.

x	0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est décroissante sur $]0\,;\,3]$ et croissante sur $[3\,;\,+\infty[$.

h) $(x+1)^2 > 0$ sur cet intervalle, et $-2 < 0$: $f'(x) < 0$.
D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est décroissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Exercice 2 – Lire la courbe de f ★

1. On suit la courbe de gauche à droite : elle monte de $(-2\,;\,-1)$ à $(-1\,;\,3)$, descend jusqu'à $(1\,;\,-1)$, puis remonte jusqu'à $(2\,;\,3)$.

x	-2		-1		1		2
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

2. Là où f est croissante, $f'(x) \geqslant 0$; là où elle est décroissante, $f'(x) \leqslant 0$.

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Aux points d'abscisses -1 et 1, la courbe a un sommet : la tangente y est horizontale.
   Son coefficient directeur est nul : $f'(-1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

4. On compare les valeurs hautes du tableau : $f(-1) = 3$ et $f(2) = 3$.
   Le maximum de f sur $[-2\,;\,2]$ vaut 3 ; il est atteint en $x = -1$ et en $x = 2$.
   En 2, une borne, f' ne s'annule pas : sur un segment, il faut regarder les bornes.

Exercice 3 – Variations d'un trinôme ★

Calcule $f'(x)$, étudie son signe, dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et donne son extremum.

a) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x - 6$.
$2x - 6 = 0 \iff 2x = 6 \iff x = 3$.
Le coefficient de x est 2, positif : $2x - 6$ est négatif avant 3 et positif après.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

$f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 1$
$= 9 - 18 + 1$
$= -8$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

f' s'annule en 3 en changeant de signe : f admet un minimum en 3, égal à -8.

b) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = -4x + 8$.
$-4x + 8 = 0 \iff -4x = -8 \iff x = 2$.
Le coefficient de x est -4, négatif : $-4x + 8$ est positif avant 2 et négatif après.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		$+$	0	$-$	

$f(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 3$
$= -8 + 16 - 3$
$= 5$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	5	$\searrow$	

f' s'annule en 2 en changeant de signe : f admet un maximum en 2, égal à 5.

c) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 6x + 12$.
$6x + 12 = 0 \iff 6x = -12 \iff x = -2$.
Le coefficient de x est 6, positif : $6x + 12$ est négatif avant -2 et positif après.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$6x + 12$		$-$	0	$+$	

$f(-2) = 3 \times (-2)^2 + 12 \times (-2)$
$= 12 - 24$
$= -12$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\searrow$	-12	$\nearrow$	

f' s'annule en -2 en changeant de signe : f admet un minimum en -2, égal à -12.

d) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = -2x$.
$-2x = 0 \iff x = 0$.
Le coefficient de x est -2, négatif : $-2x$ est positif avant 0 et négatif après.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	

$f(0) = -0^2 + 5$
$= 5$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	5	$\searrow$	

f' s'annule en 0 en changeant de signe : f admet un maximum en 0, égal à 5.

e) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = x - 3$.
$x - 3 = 0 \iff x = 3$.
Le coefficient de x est 1, positif : $x - 3$ est négatif avant 3 et positif après.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$	

$f(3) = \dfrac{1}{2} \times 3^2 - 3 \times 3 + 2$
$= \dfrac{9}{2} - 9 + 2$
$= -\dfrac{5}{2}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	

f' s'annule en 3 en changeant de signe : f admet un minimum en 3, égal à $-\dfrac{5}{2}$.

f) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = -4 - 2x$.

$-4 - 2x = 0 \iff -2x = 4 \iff x = -2$.

Le coefficient de x est -2, négatif : $-4 - 2x$ est positif avant -2 et négatif après.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$-4-2x$		$+$	0	$-$	

$f(-2) = 5 - 4 \times (-2) - (-2)^2$
$= 5 + 8 - 4$
$= 9$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\nearrow$	9	$\searrow$	

f' s'annule en -2 en changeant de signe : f admet un maximum en -2, égal à 9.

Exercice 4 – Tableau de variations complet ★★

Calcule $f'(x)$ et factorise-le, étudie son signe, puis dresse le tableau de variations complet de f (avec les images).

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x+2)(x-2)$.

$x + 2 = 0 \iff x = -2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 2$ est négatif avant -2 et positif après.

$x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 2$ est négatif avant 2 et positif après.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
3		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Images :

$f(-2) = (-2)^3 - 12 \times (-2) + 5$
$= -8 + 24 + 5$
$= 21$

$f(2) = 2^3 - 12 \times 2 + 5$
$= 8 - 24 + 5$
$= -11$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	21	$\searrow$	-11	$\nearrow$	

f admet un maximum local 21 en -2 et un minimum local -11 en 2.

b) $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x^2 - x - 2)$.

$x^2 - x - 2$ a pour racines -1 et 2 ($\Delta = 9$) : $f'(x) = -6(x+1)(x-2)$.

-6 est un nombre négatif : son signe ne change jamais.

$x + 1 = 0 \iff x = -1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 1$ est négatif avant -1 et positif après.

$x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 2$ est négatif avant 2 et positif après.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
-6		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Images :

$f(-1) = -2 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 12 \times (-1) - 4$
$= 2 + 3 - 12 - 4$
$= -11$

$f(2) = -2 \times 2^3 + 3 \times 2^2 + 12 \times 2 - 4$
$= -16 + 12 + 24 - 4$
$= 16$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-11	$\nearrow$	16	$\searrow$	

f admet un minimum local -11 en -1 et un maximum local 16 en 2.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$.

3 est un nombre positif : son signe ne change jamais.

$(x-1)^2$ est un carré : il est positif, et nul seulement pour $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
3		$+$	$\vert$	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

$f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 3 \times 1$
$= 1 - 3 + 3$
$= 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	1	$\nearrow$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$f'(1) = 0$ *sans changement de signe : pas d'extremum en* 1.

d) $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $2x+1 > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2x-1$, qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$+$	$\vert$	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$= 2 + 2$$
$$= 4$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$ vaut 4, atteint en $\dfrac{1}{2}$.

e) Quotient avec $u = x^2$, $u' = 2x$, $v = x-1$, $v' = 1$:

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Sur $]1\,;+\infty[$, $x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x-2$.

x	1		2		$+\infty$
x		$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1}$$
$$= 4$$

x	1		2		$+\infty$
f		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Le minimum de f sur $]1\,;+\infty[$ vaut 4, atteint en 2.

f) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 4x(x+1)(x-1)$.

$4x = 0 \iff x = 0$.

Le coefficient de x est 4, positif : $4x$ est négatif avant 0 et positif après.

$x + 1 = 0 \iff x = -1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+1$ est négatif avant -1 et positif après.

$x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-1$ est négatif avant 1 et positif après.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Images :

$f(-1) = (-1)^4 - 2 \times (-1)^2$
$= 1 - 2$
$= -1$

$f(0) = 0^4 - 2 \times 0^2$
$= 0$

$f(1) = 1^4 - 2 \times 1^2$
$= 1 - 2$
$= -1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Minimums locaux -1 en -1 et en 1 ; maximum local 0 en 0.

Exercice 5 – Lire la courbe de la dérivée ★★

1. On lit où la courbe de f' coupe l'axe des abscisses : en $x = -1$ et en $x = 3$.
   Elle est au-dessus de l'axe avant -1 et après 3, en dessous entre les deux.

x	$-1{,}5$		-1		3		$3{,}5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations :

x	$-1{,}5$		-1		3		$3{,}5$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. En -1, f' s'annule en passant de $+$ à $-$: f admet un maximum local en $x = -1$.
   En 3, f' s'annule en passant de $-$ à $+$: f admet un minimum local en $x = 3$.
   On ne connaît pas leurs valeurs : la courbe tracée est celle de f'.

4. Le point de la courbe de f' d'abscisse 1 est $(1\,;\,-4)$: $f'(1) = -4$.
   C'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 : à cet endroit, f descend le plus vite.

Exercice 6 – Fonctions paires et impaires ★★

Étudie la parité de f : calcule $f(-x)$, puis compare à $f(x)$ et à $-f(x)$. Donne la symétrie de la courbe.

a) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$.
f est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x)$.
f est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

c) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$.
Un contre-exemple suffit : $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$.
$f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$: f n'est ni paire ni impaire.

d) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x}{x^2 + 1} = -f(x)$.
f est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

e) $[0\,;\,+\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 : $f(-1)$ n'existe pas.
f n'est ni paire ni impaire, sans aucun calcul.

f) L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,2\}$ est symétrique par rapport à 0.
$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{1}{x^2 - 4} = f(x)$: f est paire.

Exercice 7 – Démontrer une inégalité ★★★

Pour chaque question, étudie les variations de la différence $d(x)$, puis conclus.

a) On pose $d(x) = x^3 - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$, sur $[0\,;\,+\infty[$.
$d'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$.
Sur $[0\,;\,+\infty[$, $x + 1 > 0$: $d'(x)$ a le signe de $x - 1$.

x	0		1		$+\infty$
3		$+$		$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$d'(x)$		$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
d	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de d sur $[0\,;\,+\infty[$ est $d(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.
Donc $d(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^3 \geqslant 3x - 2$ pour tout $x \geqslant 0$.

b) On pose $d(x) = x + \dfrac{1}{x} - 2$, sur $]0\,;\,+\infty[$.

$d'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$	$\vert$	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$d'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
d		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de d est $d(1) = 1 + 1 - 2 = 0$, donc $d(x) \geqslant 0$: $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ pour tout $x > 0$.

c) On pose $d(x) = x^4 - 4x + 3$, sur $\mathbb{R}$.

$d'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2+x+1)$ (on vérifie en développant).

$x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$: il reste positif.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
4		$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$	$\vert$	$+$	
$d'(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
d		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de d est $d(1) = 1 - 4 + 3 = 0$, donc $x^4 - 4x + 3 \geqslant 0$, soit $x^4 \geqslant 4x - 3$ pour tout réel x.

d) On pose $d(x) = \dfrac{1}{x} - \left(-\dfrac{1}{4}x + 1\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{4} - 1$.

$d'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x^2 - 4}{4x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{4x^2}$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$	$\vert$	$+$	
$4x^2$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$d'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

x	0		2		$+\infty$
d		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de d est $d(2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = 0$, donc $d(x) \geqslant 0$.

$\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $]0\,;\,+\infty[$, et les deux se touchent au point d'abscisse 2 : T est la tangente à $\mathcal{C}$ en 2.

Exercice 8 – Une étude complète ★★★

1. $f'(x) = 2x - \dfrac{16}{x^2}$ (car $\left(\dfrac{16}{x}\right)' = -\dfrac{16}{x^2}$).
   Au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 16}{x^2} = \dfrac{2(x^3-8)}{x^2}$.
   En développant : $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$.
   D'où la forme demandée.

2. $x^2 + 2x + 4$ a pour discriminant $4 - 16 = -12 < 0$: il est toujours positif.
   $x^2 > 0$ et $2 > 0$.
   Donc $f'(x)$ a le signe de $x - 2$.

x	0		2		$+\infty$
2		$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
x^2+2x+4		$+$	$\vert$	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

3. $f(2) = 2^2 + \dfrac{16}{2}$
$= 4 + 8$
$= 12$

x	0		2		$+\infty$
f		$\searrow$	12	$\nearrow$	

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est décroissante sur $]0\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.
Son minimum vaut 12, atteint en $x = 2$.

4. D'après la question 3, $f(x) \geqslant 12$ pour tout $x > 0$: $x^2 + \dfrac{16}{x} \geqslant 12$.
On multiplie par $x > 0$ (le sens ne change pas) : $x^3 + 16 \geqslant 12x$, soit $x^3 - 12x + 16 \geqslant 0$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $f'(0) = 0$ *ne suffit pas : il faut que f' change de signe.*
$3x^2 \geqslant 0$ pour tout x : f' ne change pas de signe, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et n'a pas d'extremum.

b) 2 *est l'endroit où le maximum est atteint, pas sa valeur.*
Le maximum vaut $f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$; il est atteint en $x = 2$.

c) *f' passe de $-$ à $+$ en 1 : $f(1) = -1$ est le minimum.*
Le maximum est à chercher aux bornes.
$f(0) = 0$ et $f(3) = 9 - 6 = 3$: le maximum de f sur $[0\,;\,3]$ vaut 3, atteint en $x = 3$.

d) *Le théorème ne s'applique que sur un intervalle.*
Contre-exemple : $-1 < 1$ et $f(-1) = -1 < f(1) = 1$.
f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, séparément.

e) *Il manque les parenthèses : on remplace x par $(-x)$.*
$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$: f est paire.

f) *C'est le signe de d qui compte, pas celui de d'.*
d est croissante, mais elle part de $d(0) = -1 < 0$.
En fait $d(x) \geqslant 0$ seulement pour $x \geqslant 1$: par exemple $0{,}5^2 = 0{,}25 < 1$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Alors f est :

Réponse C : décroissante sur $[-3\,;\,1]$
$f'(x)$ est un trinôme de coefficient $1 > 0$: négatif entre ses racines -3 et 1.

2. $f'(a) = 0$ et f' passe de $+$ à $-$ en a. Alors $f(a)$ est :

Réponse A : un maximum local
f croît puis décroît : elle atteint un maximum local en a.

3. $f(x) = x^3 + 3x$. Alors :

Réponse D : f est croissante sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pour tout réel x.

4. Sur $[-1\,;\,3]$, le maximum de $f(x) = x^2 - 4x$ est :

Réponse B : 5
f décroît sur $[-1\,;\,2]$ et croît sur $[2\,;\,3]$; on compare les bornes : $f(-1) = 5$ et $f(3) = -3$. (-1 est l'endroit, pas la valeur ; -4 est le minimum.)

5. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur un intervalle I signifie :

Réponse D : $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout x de I
C'est le signe de la différence $f - g$ qui compte.

6. La fonction $f(x) = x^3 - x$, définie sur $\mathbb{R}$, est :

Réponse A : impaire
$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).