# *Terminale spécialité / Dénombrement*

**benprof** particulier.fr

**50 exercices** en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

## 1. *Principes additif et multiplicatif, k-uplets*

**À retenir :** Étapes successives : je multiplie. Cas disjoints : j'additionne, sinon je retire $\text{Card}(A \cap B)$. $n$ choix pour $k$ places : $n^k$, ex. $2^3 = 8$ mots de 3 lettres sur $\{a\,;b\}$. « Au moins un » = tout − « aucun ».

**Ex. 1** ★☆☆ **k-uplets et produits cartésiens** — On note $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}$ et $F = \{0\,;1\,;2\}$. Donne chaque résultat sous forme de puissance ou de produit, puis en entier.

(a) Combien y a-t-il de 3-uplets d'éléments de $E$ ?

(b) Combien y a-t-il de 5-uplets d'éléments de $F$ ?

(c) Calcule $\text{Card}(E \times F)$.

(d) Calcule $\text{Card}(E^2 \times F)$.

(e) Combien d'éléments de $E^2$ ont deux composantes différentes ?

(f) Combien d'éléments de $E \times F$ ont pour seconde composante 0 ?

**Ex. 2** ★☆☆ **Codes ou nombres ?** — Un code à 4 chiffres est un 4-uplet de chiffres (il peut commencer par 0). Un entier à $n$ chiffres ne commence jamais par 0. Calcule chaque nombre demandé.

(a) Combien y a-t-il de codes à 4 chiffres ?

(b) Combien y a-t-il d'entiers naturels à 4 chiffres ?

(c) Combien y a-t-il d'entiers pairs à 4 chiffres ?

(d) Combien de codes à 4 chiffres n'utilisent que des chiffres impairs ?

(e) Combien d'entiers à 3 chiffres s'écrivent uniquement avec les chiffres 0, 5 et 7 ?

**Ex. 3** ★★☆ **Les plaques de Valdorie** — En Valdorie, une plaque s'écrit avec 2 lettres, 3 chiffres, puis 2 lettres (ex. : BK-047-TZ). Les lettres sont prises parmi les 23 lettres autorisées (I, O et U sont exclues). Les répétitions sont permises, l'ordre compte et le bloc 000 est interdit.

(a) Combien de plaques différentes peut-on former ? Donne le résultat sous forme de produit, puis en entier.

(b) Combien de plaques ont leurs deux blocs de lettres identiques (comme AB-123-AB) ?

(c) On choisit une plaque au hasard parmi toutes les plaques possibles. Calcule la probabilité que ses trois chiffres soient égaux.

**Ex. 4** ★★☆ **L'erreur de Noé** — On cherche combien d'entiers compris entre 1 et 300 sont multiples de 4 ou de 6. Noé compte 75 multiples de 4 et 50 multiples de 6, puis il répond : « $75 + 50 = 125$ ».

(a) Explique pourquoi le raisonnement de Noé est faux, en donnant un exemple d'entier compté deux fois.

(b) Combien d'entiers compris entre 1 et 300 sont à la fois multiples de 4 et de 6 ? Justifie.

(c) Déduis-en le bon nombre d'entiers compris entre 1 et 300 qui sont multiples de 4 ou de 6.

(d) Combien d'entiers compris entre 1 et 300 ne sont multiples ni de 4 ni de 6 ?

**Ex. 5** ★★☆ **Le mot de passe d'Inès** — Le site d'Inès exige un mot de passe de 6 caractères. Chaque caractère est soit une lettre minuscule (26 possibilités), soit un chiffre (10 possibilités). L'ordre compte et les répétitions sont permises.

(a) Combien de mots de passe différents peut-on former ?

(b) Combien de mots de passe ne contiennent aucun chiffre ?

(c) Déduis-en le nombre de mots de passe qui contiennent au moins un chiffre.

(d) Le site exige maintenant au moins un chiffre et au moins une lettre. Combien de mots de passe sont acceptés ? Justifie.

**Ex. 6** ★★☆ **Vrai ou faux : tenues, inscriptions, ensembles** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) Avec 7 chemises et 6 pantalons, Lina peut composer 13 tenues « une chemise et un pantalon ».

(b) Il y a plus de façons de remplir une grille de 6 questions à 4 réponses possibles qu'une grille de 4 questions à 6 réponses possibles.

(c) Au club de Mado, on choisit un sport parmi 3, dont la natation, et un créneau parmi 4, dont le lundi. La natation n'a pas lieu le lundi. Il y a donc $3 \times 4 = 12$ inscriptions « sport et créneau ».

(d) Si $\text{Card}(A) = 12$, $\text{Card}(B) = 9$ et $\text{Card}(A \cap B) = 4$, alors $\text{Card}(A \cup B) = 21$.

(e) Si $\text{Card}(E) = 4$ et $\text{Card}(F) = 6$, alors $E \times F$ et $F \times E$ ont le même cardinal, égal à 24.

**Ex. 7** ★★☆ **Des 4-uplets en Python** — On considère le programme suivant.

```
from itertools import product
L = list(product([1, 2, 3], repeat=4))
print(len(L))
n = 0
for t in L:
    if 3 in t:
        n = n + 1
print(n)
```

(a) Décris les éléments de la liste `L`.

(b) Qu'affiche la première instruction `print` ? Justifie par un calcul.

(c) Que compte la variable `n` ? Calcule, sans exécuter le programme, la valeur affichée à la fin.

(d) On remplace la condition par `t[0] == 1`. Que compte alors `n`, et quelle valeur est affichée à la fin ?

**Ex. 8** ★★★ **Des 7 dans les entiers à 5 chiffres** — On s'intéresse aux entiers à 5 chiffres, c'est-à-dire de 10 000 à 99 999. Le premier chiffre d'un tel entier n'est jamais 0.

(a) Combien y a-t-il d'entiers à 5 chiffres ? Combien d'entre eux ne contiennent aucun chiffre 7 ?

(b) Déduis-en le nombre d'entiers à 5 chiffres qui contiennent au moins un 7.

(c) Combien d'entiers à 5 chiffres contiennent exactement un 7 ? Distingue les cas selon la place du 7.

(d) Lucas compte ceux qui ont au moins un 7 ainsi : 5 places pour le 7, puis $10^4$ choix pour les autres chiffres, soit 50 000. Trouve deux erreurs et donne un exemple pour chacune.

(e) On choisit au hasard un entier à 5 chiffres. Tous ont la même probabilité d'être choisis. Calcule la probabilité qu'il contienne au moins deux 7.

**Ex. 9** ★★★ **Les drapeaux de Mireval** — À Mireval, un drapeau est formé de $k$ bandes horizontales, lues de haut en bas. Chaque bande reçoit une couleur choisie parmi $n$ couleurs, et une couleur peut servir plusieurs fois. Un drapeau est « valide » si deux bandes voisines n'ont jamais la même couleur.

(a) Sans exiger qu'il soit valide, combien de drapeaux à 3 bandes peut-on former avec 6 couleurs ? Zoé répond $3^6 = 729$. Corrige-la.

(b) Pour $n \geqslant 2$, démontre qu'il y a $n \times (n-1)^{k-1}$ drapeaux valides à $k$ bandes. Calcule ce nombre pour $n = 6$ et $k = 3$.

(c) Avec 5 couleurs, combien y a-t-il de drapeaux valides à 4 bandes dont la bande du haut et celle du bas ont la même couleur ?

**Ex. 9 (suite)**

(d) Voici un programme :

```
from itertools import product
couleurs = ["R", "V", "B", "J", "N"]
nb = 0
for d in product(couleurs, repeat=4):
    if d[0] != d[1] and d[1] != d[2] and d[2] != d[3]:
        nb = nb + 1
print(nb)
```

Quel nombre affiche-t-il ? Justifie sans l'exécuter. Modifie ensuite la condition pour qu'il affiche le résultat de la question précédente.

(e) Avec 3 couleurs, quel est le plus petit nombre de bandes $k$ qui permet de former plus de 1 000 drapeaux valides ?

**Ex. 10** ★★★ **Le food-truck d'Aïcha** — À Annecy, le food-truck d'Aïcha propose 4 entrées, 6 plats (dont 2 végétariens) et 5 desserts (dont une tarte). Il vend trois formules : « entrée + plat », « plat + dessert » et « menu complet » (entrée + plat + dessert).

(a) Combien de repas différents peut-on commander, toutes formules confondues ? Nomme et justifie chaque principe utilisé.

(b) Aïcha compte les menus complets qui ont un plat végétarien ou la tarte : $40 + 24 = 64$. Corrige son calcul.

(c) Paul prend un menu complet chaque jour du lundi au vendredi. Il peut reprendre le même menu. Combien de semaines de menus différentes sont possibles ?

(d) Toutes ces semaines ont la même probabilité. Calcule la probabilité que Paul mange au moins une fois un plat végétarien dans la semaine.

## 2. *k-uplets d'éléments distincts, factorielle et permutations*

**À retenir :** Ordre sans répétition : $k$ facteurs décroissants, $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (et non $\frac{n!}{k!}$). Exemple : podium de 3 parmi 7, $7 \times 6 \times 5 = 210$. Tout ranger : $n!$, avec $0! = 1$. Deux voisins : un bloc, puis $\times 2$.

**Ex. 11** ★☆☆ **Factorielles sans calculatrice** — Calcule sans calculatrice. Simplifie chaque quotient avant de calculer.

(a) Calcule $0!$.

(b) Calcule $3! \times 4!$.

(c) Calcule $\dfrac{9!}{6!}$.

(d) Calcule $\dfrac{14!}{12!}$.

(e) Calcule $\dfrac{100!}{99!}$.

(f) Calcule $\dfrac{8!}{3! \times 5!}$.

**Ex. 12** ★☆☆ **Du produit au quotient de factorielles** — Les produits ci-dessous sont formés d'entiers consécutifs décroissants.

(a) Écris $11 \times 10 \times 9 \times 8$ sous la forme $\frac{n!}{(n-k)!}$, puis calcule-le.

**Ex. 12** **(suite)**

(b) Écris $20 \times 19$ sous la forme $\frac{n!}{(n-k)!}$, puis calcule-le.

(c) Écris $4 \times 3 \times 2 \times 1$ sous la forme $\frac{n!}{(n-k)!}$ avec $k = 4$, puis calcule-le.

(d) Écris $\frac{30!}{27!}$ comme un produit d'entiers décroissants. Combien de facteurs compte-t-il ? Calcule-le.

(e) Zoé écrit $13 \times 12 \times 11 = \frac{13!}{3!}$. Corrige son écriture, puis calcule ce produit.

**Ex. 13** ★☆☆ **Vrai ou faux sur les factorielles** — Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel tel que $n \geqslant 3$. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) $(2n)! = 2 \times n!$.

(b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$.

(c) $\frac{10!}{5!} = 2!$.

(d) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{2!}$.

(e) $(n+1)! - n! = n \times n!$.

(f) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$.

**Ex. 14** ★★☆ **Le podium du concours de pâtisserie** — À Rennes, 12 pâtissiers, dont Maëlle, participent à un concours. Le jury décerne un 1er, un 2e et un 3e prix à trois candidats différents (pas d'ex æquo). Pour compter les podiums possibles, Léna calcule $12^3 = 1\,728$ et Hugo calcule $\binom{12}{3} = 220$.

(a) Explique l'erreur de modèle de Léna.

(b) Explique l'erreur de modèle de Hugo.

(c) Détermine le nombre de podiums possibles. Justifie le modèle choisi.

(d) Le podium est tiré au hasard : tous les podiums sont équiprobables. Calcule la probabilité que Maëlle soit sur le podium.

**Ex. 15** ★★☆ **File d'attente au cinéma** — À Lille, 10 amis, dont Inès et Tom, font la queue devant un cinéma, les uns derrière les autres.

(a) Combien d'ordres possibles y a-t-il pour cette file ? Justifie le modèle.

(b) Combien d'ordres placent Inès et Tom côte à côte ?

(c) Combien d'ordres séparent Inès et Tom (ils ne sont pas côte à côte) ?

(d) L'ordre de la file est dû au hasard : tous les ordres sont équiprobables. Calcule la probabilité qu'Inès et Tom soient côte à côte.

**Ex. 16** ★★☆ **Le mot de passe de Noé** — Noé, membre d'un club d'escalade de Grenoble, choisit un mot de passe de 5 caractères. Chaque caractère est l'une des 26 lettres minuscules ou l'un des 10 chiffres. L'ordre des caractères compte.

(a) Combien de mots de passe peut-il former si les répétitions sont permises ?

**Ex. 16** **(suite)**

(b) Combien de mots de passe ont leurs 5 caractères tous distincts ? Justifie le modèle.

(c) Combien de mots de passe contiennent au moins deux caractères identiques ?

(d) Combien de mots de passe ont des caractères tous distincts et commencent par une lettre ?

**Ex. 17** ★★☆ **Les anagrammes de FROMAGE** — Les 7 lettres du mot FROMAGE sont toutes distinctes. Une anagramme est un mot de 7 lettres, ayant un sens ou non, formé avec exactement ces lettres. Les voyelles sont A, E et O.

(a) Combien le mot FROMAGE a-t-il d'anagrammes (lui compris) ? Justifie le modèle.

(b) On exécute ce programme :

```
from itertools import permutations
mot = 'FROMAGE'
n = 0
for p in permutations(mot):
    if p[0] in 'AEO' and p[-1] in 'AEO':
        n = n + 1
print(n)
```

Explique ce que compte la variable `n`.

(c) Calcule, par un raisonnement, la valeur affichée par ce programme.

(d) Par quelle condition remplacer celle du `if` pour compter les anagrammes qui commencent par une consonne et finissent par une voyelle ? Donne la valeur affichée.

**Ex. 18** ★★★ **Une relation sur les k-uplets d'éléments distincts** — Dans tout l'exercice, $n$ et $k$ sont des entiers naturels avec $1 \leqslant k \leqslant n$.

(a) Simplifie $\frac{(n+2)!}{n!}$ sans développer les factorielles.

(b) Déduis-en l'entier $n$ tel que $\frac{(n+2)!}{n!} = 156$, puis interprète 156 comme un nombre de 2-uplets d'éléments distincts.

(c) Soit $E$ un ensemble à $n+1$ éléments et $a \in E$. En séparant les $k$-uplets d'éléments distincts de $E$ qui contiennent $a$ de ceux qui ne le contiennent pas, démontre que $\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} + k \times \frac{n!}{(n-k+1)!}$.

(d) Vérifie cette relation pour $n = 8$ et $k = 4$ en calculant chacun de ses membres.

(e) Écris la relation pour $k = n$. Quelle formule du cours retrouves-tu ? Quel rôle joue la convention $0! = 1$ ?

**Ex. 19** ★★★ **Le salut de la troupe de théâtre** — À Marseille, une troupe de 9 membres vient saluer le public : 5 comédiennes, dont Clara, et 4 comédiens, dont Malik. Ils s'alignent sur le devant de la scène. Un alignement est l'ordre des 9 personnes de gauche à droite.

(a) Combien d'alignements sont possibles ? Justifie le modèle.

**Ex. 19** **(suite)**

(b) Combien d'alignements alternent comédiennes et comédiens (deux voisins ne sont jamais du même groupe) ?

(c) Combien d'alignements placent Clara à gauche de Malik, voisins ou non ? Justifie par un argument de symétrie.

(d) L'alignement est choisi au hasard, et tous sont équiprobables. Calcule la probabilité que les 5 comédiennes soient côte à côte.

(e) Dans les mêmes conditions, calcule la probabilité qu'il y ait exactement deux personnes entre Clara et Malik.

**Ex. 20** ★★★ **Les codes des armoires du club de robotique** — À Nantes, un club de robotique ferme ses armoires avec des codes de 4 caractères, écrits dans un ordre précis. Chaque caractère est l'un des 16 symboles 0, 1, …, 9, A, B, C, D, E, F. Sauf mention contraire, les 4 caractères d'un code sont deux à deux distincts.

(a) Combien de codes peut-on former ? Justifie le modèle.

(b) Combien de codes ne contiennent aucune lettre ? Déduis-en le nombre de codes contenant au moins une lettre.

(c) On choisit maintenant un code au hasard parmi tous les codes de 4 caractères, répétitions permises. Calcule la probabilité que ses caractères soient deux à deux distincts.

(d) Que compte ce programme ? Prévois son affichage sans l'exécuter.

```
from itertools import permutations
symboles = '0123456789ABCDEF'
n = 0
for c in permutations(symboles, 4):
    if 'A' in c:
        n = n + 1
print(n)
```

(e) Mia importe `product` et remplace la ligne 4 par `for c in product(symboles, repeat=4):`. Que compte alors le programme ? Prévois son affichage.

## 3. *Combinaisons et coefficients binomiaux*

**À retenir :** Sans ordre ni répétition, on compte des parties : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$. « Exactement » : on choisit dans chaque catégorie et on multiplie. « Au moins un » : on retire du total les cas « aucun ».

**Ex. 21** ★☆☆ **Calculer des coefficients binomiaux** — Calcule chaque coefficient sans calculatrice, en écrivant le calcul.

(a) $\binom{9}{0}$ et $\binom{9}{9}$.

(b) $\binom{11}{1}$.

**Ex. 21** **(suite)**

(c) $\binom{13}{2}$.

(d) $\binom{9}{4}$, avec la formule $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

(e) $\binom{25}{23}$, en utilisant la symétrie.

(f) $\binom{16}{13}$, en passant d'abord par la symétrie.

**Ex. 22** ★☆☆ **Coefficients binomiaux en fonction de n** — Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel avec $n \geqslant 3$.

(a) Exprime $\binom{n}{n-1}$ en fonction de $n$.

(b) Montre que $\binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(c) Écris $\binom{n}{3}$ sous la forme d'un quotient sans factorielle.

(d) Écris $\frac{11!}{4!\,7!}$ sous la forme d'un coefficient binomial, puis calcule-le.

(e) Simplifie $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2}$.

(f) Détermine l'entier $n$ tel que $\binom{n}{2} = 153$.

**Ex. 23** ★☆☆ **Ordre ou pas ? Choisir le modèle** — Pour chaque situation, dis si l'ordre compte et si les répétitions sont permises, puis donne le nombre de possibilités.

(a) À une soirée à Lille, chacun des 11 invités serre une fois la main de chacun des autres. Combien y a-t-il de poignées de main ?

(b) On tire simultanément 3 jetons dans un sac de 20 jetons numérotés. Combien y a-t-il de tirages ?

(c) Iris compose le code de 4 chiffres de son digicode, chaque chiffre allant de 0 à 9, les répétitions étant permises. Combien y a-t-il de codes ?

(d) Nadia choisit 2 garnitures différentes parmi 9 pour sa pizza. Combien a-t-elle de choix ?

(e) À un concours de dessin, le jury décerne un 1er, un 2e et un 3e prix à trois dessins différents parmi 17. Combien y a-t-il de palmarès possibles ?

(f) Dans une ville quadrillée, un trajet est un mot de 8 lettres formé de 4 D et de 4 H. Combien y a-t-il de trajets ?

**Ex. 24** ★★☆ **Le bureau de l'association** — Une association de Rennes compte 8 filles et 7 garçons. Elle élit un bureau de 5 membres distincts, sans attribuer de rôles : l'ordre ne compte pas.

(a) Combien de bureaux différents peut-on former ? Justifie le modèle choisi.

(b) Combien de bureaux comptent exactement 2 filles et 3 garçons ?

**Ex. 24** **(suite)**

(c) Combien de bureaux comptent au moins une fille et au moins un garçon ?

(d) Combien de bureaux comptent au moins 4 garçons ?

**Ex. 25** ★★☆ **L'erreur de Hugo sur les as** — On tire une main de 4 cartes dans un jeu de 32 cartes, qui contient 4 as. Une main est une partie de 4 cartes : l'ordre ne compte pas.

(a) Calcule le nombre total de mains, puis le nombre de mains sans aucun as.

(b) Déduis-en le nombre de mains contenant au moins un as.

(c) Retrouve ce résultat en faisant la somme des cas « exactement 1, 2, 3, 4 as ».

(d) Hugo choisit « d'abord un as, puis 3 cartes parmi les 31 restantes ». Calcule son résultat et explique son erreur.

**Ex. 26** ★★☆ **Urne et tirage simultané** — Une urne contient 5 boules rouges, 4 vertes et 3 bleues, indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules : tous les tirages sont équiprobables.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ? Nomme le modèle.

(b) Calcule la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

(c) Léna écrit $P(\text{3 rouges}) = \frac{5\times4\times3}{220}$. Explique son erreur, puis corrige.

(d) Calcule la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur.

(e) Calcule la probabilité d'obtenir au moins une boule bleue.

**Ex. 27** ★★☆ **Des équipes générées en Python** — Sept amis veulent former une équipe de 3 personnes, sans ordre. On écrit le programme suivant :

```
from itertools import combinations
amis = ["Ana", "Bilal", "Chloe", "Dario", "Emma", "Farah", "Gael"]
equipes = list(combinations(amis, 3))
print(len(equipes))
```

(a) Qu'affiche ce programme ? Justifie par un calcul.

(b) On ajoute `n = 0`, puis une boucle `for e in equipes:` qui fait `n = n + 1` sous une condition. Écris cette condition pour compter les équipes contenant Emma, et donne la valeur finale de `n`.

(c) On remplace `combinations` par `permutations`. Qu'affiche alors le programme ? Explique le lien avec le résultat de la première question.

(d) Déduis-en le nombre d'équipes sans Emma, et vérifie-le à l'aide d'un coefficient binomial.

**Ex. 28** ★★★ **Le club de théâtre de Brest** — Le club de théâtre d'un lycée de Brest compte 12 élèves, dont Léa et Tom. Pour une scène, on choisit un groupe de 4 élèves distincts. Les rôles ne sont pas attribués : l'ordre ne compte pas.

(a) Yanis affirme qu'il y a $12 \times 11 \times 10 \times 9$ groupes possibles. A-t-il raison ? Justifie, puis donne le bon nombre de groupes.

(b) Léa et Tom refusent de jouer ensemble. Combien de groupes respectent cette contrainte ?

(c) Combien de groupes ne contiennent ni Léa ni Tom ? Combien en contiennent exactement un des deux ? Vérifie la cohérence avec la question précédente.

(d) Le groupe est tiré au sort parmi tous les groupes de 4, de façon équiprobable. Calcule la probabilité qu'il contienne Léa ou Tom (au moins l'un des deux).

**Ex. 29** ★★★ **L'équipe et son capitaine** — Soit $n$ et $k$ deux entiers naturels avec $1 \leqslant k \leqslant n$. On veut démontrer que $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$.

(a) Vérifie l'égalité pour $n = 13$ et $k = 3$, en calculant chaque membre.

(b) Un club de volley compte $n$ joueurs. On forme une équipe de $k$ joueurs, puis on désigne un capitaine dans l'équipe. Compte ces choix de deux façons et déduis-en l'égalité.

(c) Démontre à nouveau l'égalité, cette fois par le calcul, avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

(d) On donne $\binom{24}{6} = 134\,596$. Déduis-en $\binom{25}{7}$ sans calculatrice.

**Ex. 30** ★★★ **Le loto de la kermesse de Colmar** — À la kermesse d'une école de Colmar, Maëlle coche 5 numéros distincts parmi les numéros de 1 à 25 : 1, 2, 3, 4 et 5. On tire ensuite simultanément 5 numéros distincts parmi les 25. Tous les tirages sont équiprobables.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ? Nomme le modèle et justifie-le.

(b) Calcule la probabilité que le tirage contienne exactement 3 des numéros de Maëlle.

(c) Calcule la probabilité que le tirage contienne au moins un des numéros de Maëlle.

**Ex. 30 (suite)**

(d) On écrit le programme ci-dessous. Que contient `compte[k]` à la fin ? Qu'affiche le programme ? Justifie sans l'exécuter.

```
from itertools import combinations
grille = [1, 2, 3, 4, 5]
compte = [0, 0, 0, 0, 0, 0]
for t in combinations(range(1, 26), 5):
    k = 0
    for x in t:
        if x in grille:
            k = k + 1
    compte[k] = compte[k] + 1
print(compte[0], compte[5], sum(compte))
```

## 4. *Relation de Pascal et nombre de parties d'un ensemble*

**À retenir :** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ : on additionne deux voisins de la ligne $n$, et le résultat est sous le second, à la ligne $n+1$. Un ensemble $E$ à $n$ éléments a $2^n$ parties (vide et $E$ compris) ; c'est aussi la somme de la ligne $n$. Ex. : $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$.

**Ex. 31** ★☆☆ **Écrire et utiliser la relation de Pascal** — Utilise la relation de Pascal, sans calculatrice.

(a) Complète : $\binom{11}{6} + \binom{11}{7} = \binom{\dots}{\dots}$.

(b) Écris $\binom{15}{9}$ comme somme de deux coefficients binomiaux de la ligne 14.

(c) Sachant que $\binom{13}{4} = 715$ et $\binom{13}{5} = 1\,287$, calcule $\binom{14}{5}$.

(d) Sachant que $\binom{15}{6} = 5\,005$ et $\binom{16}{7} = 11\,440$, calcule $\binom{15}{7}$.

(e) Pour $n \geqslant 3$, écris $\binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ avec un seul coefficient binomial.

**Ex. 32** ★☆☆ **Compter des parties** — Donne chaque résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

(a) Combien de parties possède un ensemble à 13 éléments ?

(b) Écris toutes les parties de $E = \{r\,;s\,;t\}$. Combien y en a-t-il ?

(c) Combien de parties à au moins 2 éléments possède un ensemble à 9 éléments ?

(d) Combien de parties non vides possède un ensemble à 14 éléments ?

(e) Un ensemble fini possède 1 024 parties. Combien a-t-il d'éléments ?

**Ex. 32 (suite)**

(f) On choisit au hasard une partie de $F = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$, toutes les parties étant équiprobables. Calcule la probabilité que ce soit la partie vide ou $F$ lui-même.

**Ex. 33** ★☆☆ **Prolonger le triangle de Pascal** — Voici le début de la ligne 9 du triangle de Pascal.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\binom{9}{k}$ | 1 | 9 | 36 | 84 |

(a) Combien de nombres la ligne 9 contient-elle ? Écris le premier sous la forme d'un coefficient binomial.

(b) Calcule $\binom{10}{2}$ et $\binom{10}{3}$ à l'aide du tableau.

(c) Sans calculer chaque terme, donne la somme de tous les nombres de la ligne 9.

(d) Déduis-en $\binom{9}{4}$ en utilisant la symétrie $\binom{9}{k} = \binom{9}{9-k}$.

(e) Calcule $\binom{10}{4}$.

**Ex. 34** ★★☆ **Vrai ou faux : Pascal et parties** — Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) $\binom{14}{3} + \binom{14}{4} = \binom{15}{3}$.

(b) $\binom{18}{6} + \binom{18}{13} = \binom{19}{13}$.

(c) Un ensemble à 5 éléments possède exactement 30 parties.

(d) La somme des nombres de la ligne 11 du triangle de Pascal vaut $2^{12}$.

(e) Pour $n \geqslant 2$, un ensemble à $n$ éléments possède $2^n - n - 1$ parties ayant au moins deux éléments.

**Ex. 35** ★★☆ **Corriger une démonstration par le calcul** — Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, Léa veut démontrer par le calcul que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Elle écrit : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{2\times n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$.

(a) Pour $n = 7$ et $k = 3$, calcule $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$, puis le dernier quotient de Léa. Conclus.

(b) Explique l'erreur commise par Léa.

(c) Rédige le calcul correct et conclus.

**Ex. 36** ★★☆ **Les coupes d'un glacier** — Un glacier de Biarritz propose 8 garnitures différentes, dont la chantilly. Une coupe est définie par l'ensemble de ses garnitures : l'ordre ne compte pas, chaque garniture figure au plus une fois et une coupe sans garniture est permise.

(a) Combien de coupes différentes le glacier peut-il servir ?

**Ex. 36** **(suite)**

(b) Combien de coupes ont exactement 3 garnitures ?

(c) Parmi les coupes à 3 garnitures, combien contiennent la chantilly ? Combien ne la contiennent pas ? Quelle relation retrouves-tu ?

(d) Une coupe est choisie au hasard parmi toutes les coupes possibles, supposées équiprobables. Calcule la probabilité qu'elle ait exactement 3 garnitures.

(e) Dans les mêmes conditions, calcule la probabilité que la coupe ait au plus 3 garnitures.

**Ex. 37** ★★☆ **Compter les parties avec Python** — Ben a écrit ce programme, dans lequel la liste `E` représente un ensemble à 7 éléments.

```
from itertools import combinations
E = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
total = 0
for k in range(len(E) + 1):
    nb = len(list(combinations(E, k)))
    print(k, nb)
    total = total + nb
print(total)
```

(a) Pour un entier `k` donné, que vaut `nb` ? Exprime-le avec un coefficient binomial.

(b) Quelles valeurs prend `k` ? Écris les lignes affichées dans la boucle.

(c) Sans exécuter le programme, donne la dernière valeur affichée. Justifie.

(d) Modifie le programme pour qu'il affiche seulement le nombre de parties de `E` ayant au moins 4 éléments. Quelle valeur obtient-on ? Justifie-la par la symétrie.

**Ex. 38** ★★★ **Bureaux avec président** — Le club d'échecs de Nancy compte 9 membres. Un bureau est une partie non vide des membres, dans laquelle on désigne un président parmi les membres du bureau. Il n'y a pas d'autre rôle : l'ordre des autres membres ne compte pas.

(a) Combien de bureaux de 4 membres, président compris, peut-on former ? Compte-les de deux façons : le bureau puis le président, ou le président puis les autres membres.

(b) Soit $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n$. Compte de deux façons les bureaux de $k$ membres d'un club de $n$ membres, puis démontre que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(c) Déduis-en que $1\times\binom{n}{1} + 2\times\binom{n}{2} + \cdots + n\times\binom{n}{n} = n\times 2^{n-1}$, en utilisant seulement la somme d'une ligne du triangle de Pascal.

(d) Combien de bureaux, de toutes tailles, le club de Nancy peut-il former ? Justifie avec la formule précédente, puis directement en commençant par choisir le président.

**Ex. 38** **(suite)**

(e) Écris la ligne 6 du triangle de Pascal, en commençant par $\binom{6}{0}$. Vérifie alors que $1\times\binom{6}{1} + 2\times\binom{6}{2} + \cdots + 6\times\binom{6}{6} = 6\times 2^5$.

**Ex. 39** ★★★ **Pascal appliquée deux fois** — Soit $n \geqslant 2$ et $k$ deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n-2$. On veut démontrer de deux façons que $\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$.

(a) Écris la relation de Pascal qui exprime $\binom{n+2}{k+2}$ à l'aide de deux coefficients de la ligne $n+1$. Fais attention aux indices.

(b) Applique de nouveau la relation de Pascal à chacun de ces deux coefficients, puis démontre la formule.

(c) Démontre la formule par dénombrement. Pour cela, fixe deux éléments $a$ et $b$ d'un ensemble $E$ à $n+2$ éléments.

(d) Au lycée de Poitiers, on choisit une délégation de 6 élèves parmi 13, dont Inès et Malik. Compte les délégations qui contiennent les deux, un seul des deux, puis aucun. Retrouve $\binom{13}{6}$.

(e) La délégation est choisie au hasard, toutes étant équiprobables. Calcule la probabilité qu'elle contienne au moins l'un des deux, en passant par l'événement contraire.

**Ex. 40** ★★★ **Photos de groupe paires ou impaires** — Douze amis passent un week-end à Annecy. Une photo de groupe est définie par l'ensemble des amis présents : l'ordre ne compte pas. Plus généralement, $E$ est un ensemble à $n \geqslant 1$ éléments et $a$ est un élément fixé de $E$.

(a) Mathis affirme : « Il y a $2^{12} - 1 = 4\,095$ photos réunissant au moins deux amis. » A-t-il raison ? Justifie.

(b) Démontre que $E$ possède exactement $2^{n-1}$ parties qui contiennent $a$, et autant qui ne le contiennent pas.

(c) À une partie $A$ de $E$, on associe $A'$ : on ajoute $a$ si $a \notin A$ et on le retire sinon. Justifie que les parties de cardinal pair sont aussi nombreuses que celles de cardinal impair. Déduis-en leur nombre.

(d) Ben a écrit ce programme.

```
from itertools import combinations
amis = list(range(12))
pair = 0
for k in range(2, 13):
    for groupe in combinations(amis, k):
        if k % 2 == 0:
            pair = pair + 1
print(pair)
```

Sans l'exécuter, dis ce qu'il affiche et justifie.

(e) Combien de photos réunissent un nombre impair d'amis, au moins 3 ?

## 5. *Mots, chemins et choix du modèle*

**À retenir :** Deux questions : l'ordre compte-t-il ? les répétitions sont-elles possibles ? Avec remise : $n^k$ ; sans remise : $\frac{n!}{(n-k)!}$ ; simultané : $\binom{n}{k}$. Chemin de $(0\,;0)$ à $(2\,;3)$ : $\binom{5}{2} = 10$ chemins, pas $2 \times 3$.

**Ex. 41** ★☆☆ **Mots écrits avec deux lettres** — Un mot est une suite de lettres, avec ou sans signification. Calcule chaque nombre et donne-le en entier.

a) Combien de mots de 10 lettres contiennent exactement 3 lettres A et 7 lettres B ?

b) Combien de mots de 5 lettres, écrits avec les seules lettres A et B, contiennent au moins une lettre A ?

c) Calcule $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \cdots + \binom{9}{9}$ en comptant de deux façons les mots de 9 lettres écrits avec A et B.

d) Combien de mots de 6 lettres peut-on écrire avec les seules lettres A et B, sans autre contrainte ?

e) Calcule $\binom{11}{4}$, puis déduis-en sans calcul $\binom{11}{7}$.

f) On lance 7 fois une pièce. Combien de suites de résultats contiennent exactement 5 « face » ?

**Ex. 42** ★☆☆ **Chemins dans un quadrillage** — Dans un quadrillage, un chemin avance par pas d'une unité vers la droite (D) ou vers le haut (H).

a) Combien de chemins vont de $(0\,;0)$ à $(5\,;4)$ ?

b) Combien de chemins de 8 pas partent de $(0\,;0)$, sans point d'arrivée imposé ?

c) Combien de chemins vont de $(0\,;0)$ à $(8\,;1)$ ?

d) Combien de chemins vont de $(2\,;3)$ à $(5\,;9)$ ?

e) Yanis affirme : « De $(0\,;0)$ à $(5\,;5)$, il y a $5 \times 5 = 25$ chemins. » Vrai ou faux ? Justifie.

**Ex. 43** ★★☆ **Les anagrammes de BANANE** — Une anagramme de BANANE est un mot de 6 lettres, avec ou sans signification, qui utilise exactement les lettres B, A, A, N, N, E.

a) Combien y a-t-il de façons de choisir les places des deux A ?

b) Les A étant placés, combien y a-t-il de façons de choisir les places des deux N ?

c) Déduis-en le nombre d'anagrammes de BANANE.

d) Tom répond : « Il y a $6! = 720$ anagrammes. » A-t-il raison ? Justifie.

e) Combien d'anagrammes commencent et finissent par N ?

**Ex. 44** ★★☆ **Trois façons de tirer des jetons** — À la kermesse de Quimper, un sac contient 13 jetons numérotés de 1 à 13. On tire 3 jetons. Pour chaque tirage, réponds aux deux questions : l'ordre compte-t-il ? les répétitions sont-elles possibles ? Puis nomme le modèle.

a) On tire un jeton, on note son numéro et on le remet, trois fois de suite. Combien y a-t-il de listes possibles ?

b) On tire les jetons un par un sans les remettre, en notant la liste. Combien y a-t-il de listes possibles ?

c) On tire les 3 jetons d'un coup. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

d) Dans le tirage avec remise, combien de listes comportent au moins deux numéros égaux ?

**Ex. 45** ★★☆ **La délégation de Noé** — Au lycée de Besançon, une classe compte 15 élèves : 9 filles et 6 garçons. On désigne une délégation de 3 élèves, sans rôle : seul compte l'ensemble des trois élus. Noé écrit : « Il y a $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ délégations. »

a) Quel modèle Noé a-t-il utilisé ? Explique pourquoi il ne convient pas ici.

b) Combien de fois Noé compte-t-il chaque délégation ?

c) Corrige : combien y a-t-il de délégations ?

d) On attribue maintenant les rôles de président, trésorier et secrétaire à trois élèves différents. Quel modèle convient ? Combien y a-t-il de bureaux ?

e) Combien de délégations sans rôle comptent au moins une fille ?

**Ex. 46** ★★☆ **Les stylos de Sacha : deux modèles** — À Lille, Sacha a 11 stylos indiscernables au toucher : 5 rouges et 6 bleus. Il en prend 3 au hasard. On note $A$ l'événement « obtenir exactement 2 stylos rouges ».

a) Sacha prend les 3 stylos d'un coup. Nomme le modèle et calcule $\mathrm{Card}(\Omega)$.

b) Dans ce modèle, combien de résultats réalisent $A$ ?

c) Déduis-en $P(A)$ sous forme de fraction irréductible.

d) Il prend maintenant les stylos un par un, sans remise, en notant l'ordre. Nomme le modèle et calcule le nouveau $\mathrm{Card}(\Omega)$.

e) Dans ce second modèle, compte les tirages qui réalisent $A$ et calcule $P(A)$. Compare et explique.

**Ex. 47** ★★☆ **Compter des chemins en Python** — Un chemin part de $(0\,;0)$ par pas D (droite) ou H (haut). On considère le programme :

```
from itertools import product
n = 0
for mot in product("DH", repeat=7):
    if mot.count("H") == 3:
        n = n + 1
print(n)
```

a) Que représente `mot` ? Combien de tours la boucle fait-elle ?

**Ex. 47** **(suite)**

(b) Que compte `n` ? Quelle valeur le programme affiche-t-il ?

(c) Modifie la condition pour compter les chemins de $(0\,;0)$ à $(1\,;6)$. Qu'affiche alors le programme ?

(d) Ben écrit plutôt :

```
from itertools import combinations
print(len(list(combinations(range(7), 3))))
```

Qu'affiche ce programme ? Compare au résultat de la deuxième question et explique.

**Ex. 48** ★★★ **La ville quadrillée d'Inès** — À Montpellier, Inès va de son domicile, en $(0\,;0)$, à son lycée, en $(6\,;4)$, par les rues d'un quartier quadrillé. Chaque pas d'une unité va vers la droite (D) ou vers le haut (H). La boulangerie est en $(1\,;3)$. Le carrefour $(3\,;1)$ est en travaux.

(a) Combien de chemins vont du domicile au lycée ?

(b) Combien de ces chemins passent par la boulangerie ?

(c) Combien de chemins évitent le carrefour en travaux ?

(d) Avant les travaux, Inès choisit un chemin au hasard, tous étant équiprobables. Calcule la probabilité qu'il passe par la boulangerie ou par le carrefour $(3\,;1)$.

(e) Soit $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$. En regardant le dernier pas d'un chemin vers $(p\,;q)$, démontre que $\binom{p+q}{q} = \binom{p+q-1}{q} + \binom{p+q-1}{q-1}$.

**Ex. 49** ★★★ **Les codes binaires de Malo** — À Toulouse, Malo fabrique des codes binaires. Un code est un mot de 12 caractères, chacun valant 0 ou 1. L'ordre des caractères compte et les répétitions sont permises.

(a) Combien de codes contiennent exactement cinq 1 ?

(b) Combien de codes contiennent au moins deux 1 ?

(c) Malo écrit d'abord 7 zéros, puis place cinq 1, chacun dans un espace différent (entre deux zéros ou à un bout). Combien de codes à cinq 1 sans deux 1 voisins obtient-il ?

(d) On choisit au hasard un code à exactement cinq 1, tous étant équiprobables. Calcule la probabilité qu'il n'ait pas deux 1 voisins.

(e) Que compte le programme ci-dessous ? Quelle valeur affiche-t-il ?

```
from itertools import product
n = 0
for mot in product("01", repeat=12):
    m = "".join(mot)
    if m.count("1") == 5 and "11" not in m:
        n = n + 1
print(n)
```

**Ex. 50** ★★★ **Le club d'échecs de Nantes** — À Nantes, un club d'échecs compte 8 membres : 4 filles et 4 garçons. Un match oppose deux membres. On ignore la couleur des pièces : seul compte l'ensemble des deux joueurs.

(a) Dans un tournoi, chaque membre affronte une fois chaque autre membre. Nomme le modèle et calcule le nombre de matchs.

(b) Combien de ces matchs sont mixtes ? Combien opposent deux filles ? Deux garçons ? Vérifie la cohérence avec la question précédente.

(c) Soit $n \geqslant 1$. Par un double dénombrement dans un groupe de $n$ filles et $n$ garçons, démontre que $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

(d) Au premier tour, les 8 membres sont répartis en 4 paires, sur des tables non numérotées. Combien y a-t-il de répartitions ? Compte d'abord avec des tables numérotées.

(e) Une répartition est tirée au hasard, toutes étant équiprobables. Calcule la probabilité que les 4 matchs du premier tour soient mixtes.