1. *Principes additif et multiplicatif, k-uplets*

Ex. 1 ★☆☆ **k-uplets et produits cartésiens**

(a) On compte des 3-uplets de E : l'ordre compte et les répétitions sont permises, avec 5 choix pour chacune des 3 places. Il y en a $5^3 = 125$.

(b) On a 3 choix pour chacune des 5 places, donc $3^5 = 243$ 5-uplets (et pas 5^3).

(c) Par le principe multiplicatif, $\text{Card}(E \times F) = 5 \times 3 = 15$.

(d) $\text{Card}(E^2 \times F) = 5 \times 5 \times 3 = 75$.

(e) E^2 contient $5^2 = 25$ couples. Parmi eux, 5 ont deux composantes égales : $(a\,;a)$, …, $(e\,;e)$. On passe au complémentaire : $5^2 - 5 = 20$ couples. On peut aussi compter directement : 5 choix pour la première composante, puis 4 pour la seconde, soit $5 \times 4 = 20$.

(f) La seconde composante est imposée (0) et on a 5 choix pour la première : il y a $5 \times 1 = 5$ couples.

Ex. 2 ★☆☆ **Codes ou nombres ?**

(a) Il y a 10 choix pour chacune des 4 places, donc $10^4 = 10\,000$ codes.

(b) Il y a 9 choix pour le premier chiffre (pas 0), puis 10 pour chacun des trois autres : $9 \times 10^3 = 9\,000$ entiers.

(c) Il y a 9 choix pour le premier chiffre, 10 pour le deuxième, 10 pour le troisième et 5 pour le dernier (0, 2, 4, 6, 8) : $9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4\,500$ entiers.

(d) Il y a 5 chiffres impairs, avec 5 choix pour chacune des 4 places : $5^4 = 625$ codes.

(e) Le premier chiffre vaut 5 ou 7 (2 choix), puis on a 3 choix pour chacun des deux autres : $2 \times 3 \times 3 = 18$ entiers.

Ex. 3 ★★☆ **Les plaques de Valdorie**

(a) Une plaque est un 4-uplet de lettres suivi d'un bloc de chiffres. On a 23 choix pour chaque lettre et $1\,000 - 1 = 999$ blocs de chiffres. Par le principe multiplicatif, on obtient $23^4 \times 999 = 279\,841 \times 999 = 279\,561\,159$ plaques.

Ex. 3 (suite)

(b) On choisit le premier bloc de lettres (23^2 choix) et le bloc de chiffres (999 choix). Le dernier bloc est alors imposé. Il y a donc $23^2 \times 999 = 529 \times 999 = 528\,471$ plaques.

(c) On est en situation d'équiprobabilité. Les blocs de trois chiffres égaux autorisés sont $111, 222, \ldots, 999$: il y en a 9, car 000 est interdit. Le nombre de plaques favorables est $23^4 \times 9$, donc $p = \frac{23^4 \times 9}{23^4 \times 999} = \frac{9}{999} = \frac{1}{111}$.

Ex. 4 ★★☆ **L'erreur de Noé**

(a) On note A l'ensemble des multiples de 4 et B celui des multiples de 6. Ces ensembles ne sont pas disjoints : 12 appartient à A et à B. Noé l'a donc compté deux fois, et le principe additif ne s'applique pas tel quel.

(b) Un entier est multiple de 4 et de 6 si et seulement s'il est multiple de 12 (le PPCM de 4 et 6). Or $300 = 12 \times 25$, donc $\text{Card}(A \cap B) = 25$.

(c) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 75 + 50 - 25 = 100$. Il y a 100 entiers qui conviennent.

(d) On passe au complémentaire dans $\{1\,; \ldots\,; 300\}$: $300 - 100 = 200$ entiers ne sont multiples ni de 4 ni de 6.

Ex. 5 ★★☆ **Le mot de passe d'Inès**

(a) Un mot de passe est un 6-uplet d'un ensemble de $26 + 10 = 36$ caractères. Il y en a $36^6 = 2\,176\,782\,336$.

(b) Sans chiffre, chaque caractère est l'une des 26 lettres : il y a $26^6 = 308\,915\,776$ mots de passe.

(c) On passe au complémentaire de « aucun chiffre » : $36^6 - 26^6 = 1\,867\,866\,560$ mots de passe contiennent au moins un chiffre.

(d) On retire de l'ensemble total les mots de passe « que des lettres » (26^6) et « que des chiffres » (10^6). Ces deux ensembles sont disjoints, car un mot de passe de 6 caractères ne peut pas être des deux types. Il reste $36^6 - 26^6 - 10^6 = 1\,866\,866\,560$ mots de passe acceptés.

Ex. 6 ★★☆ **Vrai ou faux : tenues, inscriptions, ensembles**

(a) Faux. Une tenue est un couple (chemise, pantalon). Par le principe multiplicatif, il y en a $7 \times 6 = 42$, et non $7 + 6 = 13$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Vrai. Une grille de 6 questions à 4 réponses est un 6-uplet d'un ensemble à 4 éléments : $4^6 = 4\,096$ grilles. L'autre grille est un 4-uplet d'un ensemble à 6 éléments : $6^4 = 1\,296$ grilles. Comme $4\,096 > 1\,296$, l'affirmation est vraie.

(c) Faux. Le nombre de créneaux possibles dépend du sport choisi : on ne peut pas multiplier directement. On distingue deux cas disjoints. Avec les 2 autres sports, on a $2 \times 4 = 8$ inscriptions. Avec la natation, on a $1 \times 3 = 3$ inscriptions. Au total, $8 + 3 = 11$ inscriptions.

(d) Faux. A et B ne sont pas disjoints, donc $\text{Card}(A \cup B) = 12 + 9 - 4 = 17$.

(e) Vrai. $\text{Card}(E \times F) = 4 \times 6 = 24$ et $\text{Card}(F \times E) = 6 \times 4 = 24$. Les deux ensembles sont pourtant différents, car un couple est ordonné.

Ex. 7 ★★☆ **Des 4-uplets en Python**

(a) `L` contient tous les 4-uplets d'éléments de $\{1\,;2\,;3\}$ (ordre pris en compte, répétitions permises), comme $(1, 3, 3, 2)$.

(b) Elle affiche le nombre de 4-uplets d'un ensemble à 3 éléments, soit $3^4 = 81$.

(c) `n` compte les 4-uplets qui contiennent au moins un 3. Par le complémentaire, on retire les 4-uplets sans 3, dont chaque terme vaut 1 ou 2 : il y en a $2^4 = 16$. Le programme affiche $81 - 16 = 65$.

(d) `n` compte alors les 4-uplets dont le premier terme vaut 1. Ce terme est imposé, et on a 3 choix pour chacun des 3 autres termes. Le programme affiche $3^3 = 27$.

Ex. 8 ★★★ **Des 7 dans les entiers à 5 chiffres**

(a) Un entier à 5 chiffres s'écrit comme un 5-uplet de chiffres : l'ordre compte et les répétitions sont permises, mais le premier chiffre n'est pas nul. On applique le principe multiplicatif : $9 \times 10^4 = 90\,000$ entiers. Ce n'est pas 10^5, qui compterait aussi les codes commençant par 0. Sans aucun 7, le premier chiffre a 8 choix (de 1 à 9, sauf 7) et chacun des 4 autres a 9 choix : $8 \times 9^4 = 52\,488$. Il y a donc $90\,000$ entiers à 5 chiffres, dont $52\,488$ sans aucun 7.

(b) « Au moins un 7 » est le contraire de « aucun 7 ». On passe donc au complémentaire : $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$. Il y a $37\,512$ entiers à 5 chiffres qui contiennent au moins un 7.

Ex. 8 **(suite)**

(c) On distingue deux cas selon la place du seul 7. Ces cas sont disjoints, car le 7 ne peut pas être à deux places à la fois. 1er cas, le 7 est en tête : chacun des 4 autres chiffres a 9 choix (tout sauf 7), soit $9^4 = 6\,561$ entiers. 2e cas, le 7 est à l'une des 4 autres places : on choisit sa place (4 choix), puis le premier chiffre (8 choix : non nul et différent de 7), puis les 3 chiffres restants (9 choix chacun). Cela donne $4 \times 8 \times 9^3 = 23\,328$ entiers. Par le principe additif : $6\,561 + 23\,328 = 29\,889$ entiers contiennent exactement un 7.

(d) Première erreur : avec 10^4 choix pour les autres chiffres, Lucas autorise un 0 en tête. Par exemple, s'il place le 7 en 2e position, il compte 07 123, qui n'est pas un entier à 5 chiffres. Deuxième erreur : ses 5 cas (un par place du 7) ne sont pas disjoints. Par exemple, 77 123 est compté deux fois : une fois avec le 7 placé en 1re position, une fois avec le 7 placé en 2e position. Or on n'additionne que des cas disjoints. Son résultat $50\,000$ est donc trop grand : le bon nombre est $37\,512$.

(e) « Au moins deux 7 », c'est « au moins un 7 » sans « exactement un 7 ». On a $37\,512 - 29\,889 = 7\,623$ entiers. Comme on est en situation d'équiprobabilité, $p = \frac{7\,623}{90\,000} = \frac{847}{10\,000} = 0{,}0847$. La probabilité cherchée vaut 0,0847.

Ex. 9 ★★★ **Les drapeaux de Mireval**

(a) Un drapeau à 3 bandes est un 3-uplet de couleurs : l'ordre des bandes compte et les répétitions sont permises. On a 6 choix pour chacune des 3 bandes, soit $6^3 = 216$ drapeaux. Zoé a inversé les rôles. Avec n choix pour chacune des k places, on obtient n^k et non k^n. Son nombre $3^6 = 729$ compterait les façons de colorier 6 bandes avec 3 couleurs.

(b) On colorie les bandes de haut en bas. La 1re bande a n choix. Chacune des $k - 1$ bandes suivantes peut prendre toutes les couleurs sauf celle de la bande juste au-dessus : elle a $n - 1$ choix. Ce nombre de choix ne dépend pas des couleurs déjà choisies, donc le principe multiplicatif s'applique. On obtient $n \times (n-1)^{k-1}$ drapeaux valides. Pour $n = 6$ et $k = 3$: $6 \times 5^2 = 150$.

(c) On choisit la bande du haut : 5 choix. La 2e bande doit être différente de la 1re : 4 choix. La 3e bande doit être différente de la 2e et de la 4e. Or la 4e a la couleur de la 1re, qui est différente de celle de la 2e : il reste donc 3 choix. Enfin, la 4e bande est imposée : 1 choix. Par le principe multiplicatif : $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ drapeaux.

Ex. 9 **(suite)**

(d) `product(couleurs, repeat=4)` parcourt les $5^4 = 625$ 4-uplets de couleurs. La condition ne garde que les drapeaux valides à 4 bandes. D'après la question 2, le programme affiche $5 \times 4^3 = 320$. Pour la question précédente, on remplace la condition par `d[0] != d[1] and d[1] != d[2] and d[2] != d[3] and d[3] == d[0]`. Le programme affiche alors 60.

(e) Avec $n = 3$, on cherche le plus petit k tel que $3 \times 2^{k-1} > 1\,000$, c'est-à-dire $2^{k-1} > 333{,}3\ldots$ Or $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$. Pour $k = 9$, on obtient $3 \times 2^8 = 768$ drapeaux. Pour $k = 10$, on obtient $3 \times 2^9 = 1\,536$ drapeaux. Comme $3 \times 2^{k-1}$ augmente avec k, le plus petit nombre de bandes est $k = 10$.

Ex. 10 ★★★ **Le food-truck d'Aïcha**

(a) Si E, P et D désignent les ensembles d'entrées, de plats et de desserts, une formule « entrée + plat » est un élément de $E \times P$. On a $\text{Card}(E \times P) = 4 \times 6 = 24$. De même, $\text{Card}(P \times D) = 6 \times 5 = 30$ et $\text{Card}(E \times P \times D) = 4 \times 6 \times 5 = 120$ (principe multiplicatif). Ces trois ensembles de repas sont disjoints, car deux formules différentes ne contiennent pas les mêmes types de mets. Par le principe additif : $24 + 30 + 120 = 174$ repas.

(b) Soit A l'ensemble des menus complets avec un plat végétarien : $\text{Card}(A) = 4 \times 2 \times 5 = 40$. Soit B l'ensemble des menus complets avec la tarte : $\text{Card}(B) = 4 \times 6 \times 1 = 24$. Ces ensembles ne sont pas disjoints. $A \cap B$ contient les menus avec un plat végétarien et la tarte : $\text{Card}(A \cap B) = 4 \times 2 \times 1 = 8$. Aïcha les a comptés deux fois. On a donc $\text{Card}(A \cup B) = 40 + 24 - 8 = 56$ menus.

(c) Une semaine est un 5-uplet de l'ensemble des 120 menus complets : l'ordre des jours compte et les répétitions sont permises. Il y a donc $120^5 = 24\,883\,200\,000$ semaines possibles. C'est bien 120^5 et non 5^{120} : on a 120 choix pour chacun des 5 jours.

(d) On passe au complémentaire. Les menus sans plat végétarien sont au nombre de $4 \times 4 \times 5 = 80$. Les semaines sans aucun plat végétarien sont donc au nombre de $80^5 = 3\,276\,800\,000$. On obtient $120^5 - 80^5 = 21\,606\,400\,000$ semaines avec au moins un plat végétarien. Comme on est en situation d'équiprobabilité, $p = \frac{120^5 - 80^5}{120^5} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243} \approx 0{,}868$.

2. *k-uplets d'éléments distincts, factorielle et permutations*

Ex. 11 ★☆☆ **Factorielles sans calculatrice**

(a) Par convention, $0! = 1$ (et non 0).

(b) $3! = 6$ et $4! = 24$, donc $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$. Attention : ce n'est pas $12!$.

(c) $9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6!$, donc $\frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$.

(d) $14! = 14 \times 13 \times 12!$, donc $\frac{14!}{12!} = 14 \times 13 = 182$.

(e) $100! = 100 \times 99!$, donc $\frac{100!}{99!} = 100$.

(f) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$, donc $\frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{336}{6} = 56$.

Ex. 12 ★☆☆ **Du produit au quotient de factorielles**

(a) Le produit compte $k = 4$ facteurs à partir de $n = 11$: $11 \times 10 \times 9 \times 8 = \frac{11!}{7!} = 7\,920$.

(b) Ici $n = 20$ et $k = 2$: $20 \times 19 = \frac{20!}{18!} = 380$.

(c) Ici $n = 4$ et $k = 4$: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{4!}{0!} = \frac{24}{1} = 24$, car $0! = 1$.

(d) $30! = 30 \times 29 \times 28 \times 27!$, donc $\frac{30!}{27!} = 30 \times 29 \times 28$: il compte $30 - 27 = 3$ facteurs. Il vaut 24 360.

(e) Le produit compte $k = 3$ facteurs à partir de $n = 13$: on divise par $(13 - 3)! = 10!$ et non par $3!$.
Donc $13 \times 12 \times 11 = \frac{13!}{10!} = 1\,716$.

Ex. 13 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les factorielles**

(a) Faux : contre-exemple avec $n = 3$. On a $(2 \times 3)! = 6! = 720$, alors que $2 \times 3! = 2 \times 6 = 12$.

(b) Vrai : $(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$, donc $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$.

(c) Faux : on ne simplifie pas des factorielles comme des fractions. $\frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$, alors que $2! = 2$.

(d) Faux : $\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$. Contre-exemple avec $n = 5$: $\frac{5!}{3!} = 20$ mais $\frac{5!}{2!} = 60$.

(e) Vrai : $(n+1)! - n! = (n+1) \times n! - n! = n! \times (n + 1 - 1) = n \times n!$.

(f) Vrai : $(n+1)! = (n+1) \times n!$, donc $\frac{1}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)!}$. Alors $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$.

Ex. 14 ★★☆ **Le podium du concours de pâtisserie**

(a) Léna compte des 3-uplets quelconques (n^k), donc avec répétition. Son modèle accepte par exemple (Maëlle ; Maëlle ; Maëlle). Or les trois lauréats sont distincts : il n'y a pas de répétition.

(b) Hugo compte des parties à 3 éléments : pour lui, l'ordre ne compte pas. Or le 1er prix et le 3e prix sont différents : l'ordre compte. Chaque groupe de 3 lauréats donne $3! = 6$ podiums.

(c) Un podium est un 3-uplet de pâtissiers distincts : l'ordre compte, sans répétition. Il y en a $12 \times 11 \times 10 = \frac{12!}{9!} = 1\,320$. On retrouve $220 \times 6 = 1\,320$.

(d) On passe au complémentaire. Les podiums sans Maëlle sont des 3-uplets distincts parmi les 11 autres : $11 \times 10 \times 9 = 990$.
Donc $1\,320 - 990 = 330$ podiums contiennent Maëlle. La probabilité vaut $\frac{330}{1\,320} = \frac{1}{4}$.

Ex. 15 ★★☆ **File d'attente au cinéma**

(a) Un ordre de la file range les 10 amis : c'est une permutation de ces 10 personnes. Il y en a $10! = 3\,628\,800$.

(b) On colle Inès et Tom en un bloc. On range alors 9 objets : $9! = 362\,880$ façons. Puis on ordonne le bloc (Inès devant ou Tom devant) : 2 façons. Par le principe multiplicatif : $9! \times 2 = 725\,760$ ordres.

(c) Passage au complémentaire : $10! - 9! \times 2 = 3\,628\,800 - 725\,760 = 2\,903\,040$ ordres séparent Inès et Tom.

(d) Il y a équiprobabilité : $p = \frac{725\,760}{3\,628\,800} = \frac{1}{5}$.

Ex. 16 ★★☆ **Le mot de passe de Noé**

(a) On dispose de $26 + 10 = 36$ caractères. Un mot de passe est un 5-uplet quelconque : l'ordre compte, avec répétition. Il y en a $36^5 = 60\,466\,176$.

(b) L'ordre compte et il n'y a pas de répétition : ce sont des 5-uplets d'éléments distincts. Il y en a $36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 = \frac{36!}{31!} = 45\,239\,040$.

(c) « Au moins deux caractères identiques » est le contraire de « tous distincts ». Il y en a $36^5 - \frac{36!}{31!} = 60\,466\,176 - 45\,239\,040 = 15\,227\,136$.

(d) On a 26 choix pour le 1er caractère (une lettre). Il reste ensuite 35, puis 34, 33 et 32 choix. Il y en a $26 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 = 32\,672\,640$.

Ex. 17 ★★☆ **Les anagrammes de FROMAGE**

(a) Une anagramme range les 7 lettres distinctes : c'est une permutation de ces 7 lettres. Il y en a $7! = 5\,040$.

(b) `permutations(mot)` parcourt les $7!$ anagrammes. `p[0]` est la première lettre et `p[-1]` la dernière. La variable `n` compte les anagrammes qui commencent et finissent par une voyelle.

(c) Première lettre : 3 voyelles possibles. Dernière lettre : une des 2 voyelles restantes. On range ensuite les 5 autres lettres au milieu : $5! = 120$ façons. Le programme affiche $3 \times 2 \times 5! = 720$.

(d) On écrit `if p[0] in 'FRMG' and p[-1] in 'AEO':`. Première lettre : 4 consonnes possibles. Dernière lettre : 3 voyelles possibles. On range ensuite les 5 autres lettres au milieu : $5! = 120$ façons. Le programme affiche $4 \times 3 \times 5! = 1\,440$.

Ex. 18 ★★★ **Une relation sur les k-uplets d'éléments distincts**

(a) Comme $(n+2)! = (n+2) \times (n+1) \times n!$, on obtient $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$.

(b) On résout $(n+1)(n+2) = 156$. On a $12 \times 13 = 156$, donc $n = 11$ convient. Comme $n \mapsto (n+1)(n+2)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, c'est la seule solution : $n = 11$. Alors $\frac{13!}{11!} = 13 \times 12 = 156$. C'est le nombre de 2-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 13 éléments (par exemple les couples (président ; trésorier) dans un groupe de 13 personnes).

(c) Les k-uplets d'éléments distincts de E forment deux ensembles disjoints. Sans a : ce sont les k-uplets d'éléments distincts de $E \setminus \{a\}$, qui a n éléments. Il y en a $\frac{n!}{(n-k)!}$. Avec a : a apparaît exactement une fois, car les termes sont distincts. On choisit sa place (k choix), puis on remplit les $k-1$ autres places, dans l'ordre et sans répétition, avec des éléments de $E \setminus \{a\}$: il y a $\frac{n!}{(n-(k-1))!} = \frac{n!}{(n-k+1)!}$ façons. Par le principe multiplicatif, cela fait $k \times \frac{n!}{(n-k+1)!}$ uplets. Au total, E a $n+1$ éléments, donc il y a $\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$ k-uplets d'éléments distincts. Le principe additif donne alors la relation demandée.

(d) À gauche : $\frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\,024$. À droite : $\frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,680$ et $4 \times \frac{8!}{5!} = 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 4 \times 336 = 1\,344$, soit $1\,680 + 1\,344 = 3\,024$. Les deux membres sont égaux : la relation est vérifiée.

Ex. 18 **(suite)**

(e) Avec $k = n$: $\frac{(n+1)!}{1!} = \frac{n!}{0!} + n \times \frac{n!}{1!}$. Comme $0! = 1$ et $1! = 1$, cela donne $(n+1)! = n! + n \times n! = (n+1) \times n!$. On retrouve la formule $(n+1)! = (n+1) \times n!$. La convention $0! = 1$ garantit que $\frac{n!}{0!} = n!$: c'est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. Avec $0! = 0$, le quotient n'aurait aucun sens.

Ex. 19 ★★★ **Le salut de la troupe de théâtre**

(a) Un alignement range les 9 personnes : l'ordre compte et chaque personne apparaît une seule fois. C'est donc une permutation d'un ensemble à 9 éléments. Il y a $9! = 362\,880$ alignements.

(b) Notons F une comédienne et H un comédien. Il y a 5 comédiennes et 4 comédiens. L'alternance impose donc un seul motif, F H F H F H F H F, avec une comédienne à chaque bout. Attention : on ne multiplie pas par 2, car le motif H F H . . . est impossible. On range les 5 comédiennes sur leurs 5 places (5! permutations), puis les 4 comédiens sur les leurs (4!). Principe multiplicatif : $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2\,880$ alignements.

(c) Échanger les places de Clara et Malik transforme un alignement où Clara est à gauche de Malik en un alignement où elle est à droite, et inversement. Les deux ensembles d'alignements ont donc le même cardinal. Ils sont disjoints et leur réunion contient les 9! alignements. Il y a donc $\frac{9!}{2} = 181\,440$ alignements où Clara est à gauche de Malik.

(d) On colle les 5 comédiennes en un bloc. Il reste à ranger 5 objets (le bloc et les 4 comédiens) : 5! façons. Puis on ordonne les comédiennes dans le bloc : 5! façons. On a donc $5! \times 5! = 14\,400$ cas favorables. Situation d'équiprobabilité : $p = \frac{14\,400}{362\,880} = \frac{5}{126}$.

(e) Il y a exactement deux personnes entre eux si leurs places sont i et $i+3$, avec $1 \leqslant i \leqslant 6$: 6 paires de places. On choisit qui occupe la place de gauche (2 façons), puis on range les 7 autres personnes (7!). On obtient $6 \times 2 \times 7! = 60\,480$ cas favorables, donc $p = \frac{60\,480}{362\,880} = \frac{1}{6}$.

Ex. 20 ★★★ **Les codes des armoires du club de robotique**

(a) L'ordre compte, et les caractères sont sans répétition : un code est un 4-uplet d'éléments distincts d'un ensemble à 16 éléments. Il y en a $16 \times 15 \times 14 \times 13 = \frac{16!}{12!} = 43\,680$. On peut former 43 680 codes.

Ex. 20 **(suite)**

(b) Sans lettre, le code est un 4-uplet de chiffres distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10!}{6!} = 5\,040$ codes. « Au moins une lettre » est le contraire de « aucune lettre ». Par passage au complémentaire, il y a $43\,680 - 5\,040 = 38\,640$ codes contenant au moins une lettre.

(c) Avec répétitions, un code est un 4-uplet quelconque de 16 symboles : il y en a $16^4 = 65\,536$, tous équiprobables. Parmi eux, 43 680 ont leurs caractères deux à deux distincts (question 1).
Donc $p = \frac{43\,680}{65\,536} = \frac{1\,365}{2\,048}$.

(d) `permutations(symboles, 4)` parcourt les 4-uplets de symboles distincts. Le test garde ceux qui contiennent A. Le programme compte donc les codes à caractères distincts qui contiennent A. Les caractères sont distincts, donc A apparaît exactement une fois : 4 choix pour sa place. On remplit ensuite les 3 autres places avec les 15 symboles restants, dans l'ordre et sans répétition : $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ façons. Cela fait $4 \times 2\,730 = 10\,920$: le programme affiche 10920.

(e) `product(symboles, repeat=4)` parcourt tous les 4-uplets, répétitions permises. Le programme compte alors les codes qui contiennent au moins une fois A. Ici, A peut apparaître plusieurs fois : on passe au complémentaire. Sans A, il y a $15^4 = 50\,625$ codes. Donc $16^4 - 15^4 = 65\,536 - 50\,625 = 14\,911$: le programme affiche 14911.

3. *Combinaisons et coefficients binomiaux*

Ex. 21 ★☆☆ **Calculer des coefficients binomiaux**

(a) Il y a une seule partie vide et une seule partie égale à l'ensemble tout entier : $\binom{9}{0} = \binom{9}{9} = 1$.

(b) Une partie à 1 élément revient à choisir cet élément : $\binom{11}{1} = 11$.

(c) On applique $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$: $\binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$.

(d) $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3\,024}{24} = 126$.

(e) Par symétrie, $\binom{25}{23} = \binom{25}{2} = \frac{25 \times 24}{2} = 300$.

(f) Par symétrie, $\binom{16}{13} = \binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 560$.

Ex. 22 ★☆☆ **Coefficients binomiaux en fonction de n**

(a) Par symétrie, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

(b) Par symétrie, $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!\,(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(c) $\binom{n}{3} = \dfrac{n!}{3!\,(n-3)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

(d) $\frac{11!}{4!\,7!} = \binom{11}{4}$ (ou $\binom{11}{7}$), et $\binom{11}{4} = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} = \frac{7\,920}{24} = 330$.

(e) $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = \dfrac{(n+1)n}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1-n+1)}{2} = n$.

(f) $\frac{n(n-1)}{2} = 153$ donne $n^2 - n - 306 = 0$, c'est-à-dire $(n-18)(n+17) = 0$. Comme $n \geqslant 3$, on obtient $n = 18$.

Ex. 23 ★☆☆ **Ordre ou pas ? Choisir le modèle**

(a) Une poignée de main est une paire d'invités : il n'y a pas d'ordre et pas de répétition. On compte donc $\binom{11}{2} = \frac{11\times10}{2} = 55$ poignées de main.

(b) Un tirage simultané est sans ordre et sans répétition : c'est une combinaison. Il y a $\binom{20}{3} = \frac{20\times19\times18}{6} = 1\,140$ tirages.

(c) Un code est un 4-uplet de chiffres : l'ordre compte (1 234 et 4 321 sont deux codes différents) et les répétitions sont permises. Ce n'est pas une combinaison : il y a $10^4 = 10\,000$ codes.

(d) Les garnitures sont distinctes et l'ordre ne compte pas. Nadia a $\binom{9}{2} = \frac{9\times8}{2} = 36$ choix.

(e) Un palmarès est un triplet de dessins distincts : l'ordre compte (1er, 2e, 3e) et il n'y a pas de répétition. Il y a $\frac{17!}{14!} = 17\times16\times15 = 4\,080$ palmarès, et non $\binom{17}{3}$.

(f) Un trajet est entièrement déterminé par les 4 positions des D parmi les 8 (ces positions forment une partie, sans ordre). Il y a $\binom{8}{4} = 70$ trajets.

Ex. 24 ★★☆ **Le bureau de l'association**

(a) Un bureau est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 15 membres, sans ordre et sans répétition. Il y a $\binom{15}{5} = \frac{15\times14\times13\times12\times11}{120} = 3\,003$ bureaux.

(b) On choisit 2 filles parmi 8, puis 3 garçons parmi 7, et on multiplie (principe multiplicatif). On obtient $\binom{8}{2} \times \binom{7}{3} = 28\times35 = 980$ bureaux.

Ex. 24 (suite)

(c) On passe par le complémentaire. Un bureau non mixte est formé soit uniquement de garçons, $\binom{7}{5} = 21$ bureaux, soit uniquement de filles, $\binom{8}{5} = 56$ bureaux. Ces deux cas sont disjoints. Il y a donc $3\,003 - 21 - 56 = 2\,926$ bureaux mixtes.

(d) On fait la somme de deux cas disjoints. Avec 4 garçons et 1 fille : $\binom{7}{4} \times \binom{8}{1} = 35\times8 = 280$. Avec 5 garçons : $\binom{7}{5} = 21$. Au total, $280 + 21 = 301$ bureaux.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur de Hugo sur les as**

(a) Il y a $\binom{32}{4} = \frac{32\times31\times30\times29}{24} = 35\,960$ mains. Une main sans as est formée de 4 cartes parmi les 28 autres : $\binom{28}{4} = 20\,475$ mains.

(b) Par passage au complémentaire, il y a $35\,960 - 20\,475 = 15\,485$ mains avec au moins un as.

(c) Les cas suivants sont disjoints. Exactement 1 as : $\binom{4}{1}\binom{28}{3} = 4\times3\,276 = 13\,104$. Exactement 2 as : $\binom{4}{2}\binom{28}{2} = 6\times378 = 2\,268$. Exactement 3 as : $\binom{4}{3}\binom{28}{1} = 112$. Exactement 4 as : $\binom{4}{4} = 1$. La somme donne 15 485 : on retrouve bien le même résultat.

(d) Hugo trouve $4\times\binom{31}{3} = 4\times4\,495 = 17\,980$, ce qui est trop grand. Une main à 2 as est comptée 2 fois (une fois pour chacun des deux as choisis « en premier »), une main à 3 as est comptée 3 fois, etc. D'ailleurs, $13\,104 + 2\times2\,268 + 3\times112 + 4\times1 = 17\,980$.

Ex. 26 ★★☆ **Urne et tirage simultané**

(a) Un tirage simultané est sans ordre et sans répétition : c'est une combinaison de 3 boules parmi 12. Il y a $\binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{6} = 220$ tirages.

(b) On choisit une boule dans chaque couleur : $\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 60$ tirages favorables. La probabilité vaut $\frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

(c) Le numérateur $5\times4\times3$ compte des triplets ordonnés, alors que 220 compte des parties : les deux modèles ne sont pas les mêmes. Avec des parties des deux côtés : $\dfrac{\binom{5}{3}}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$.

(d) Les cas « 3 rouges », « 3 vertes » et « 3 bleues » sont disjoints : $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 4 + 1 = 15$. La probabilité vaut $\frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

(e) L'événement contraire est « aucune bleue » : on tire 3 boules parmi les 9 non bleues, soit $\binom{9}{3} = 84$ tirages. La probabilité vaut $1 - \frac{84}{220} = \frac{136}{220} = \frac{34}{55}$.

Ex. 27 ★★☆ **Des équipes générées en Python**

(a) `combinations(amis, 3)` donne les parties à 3 éléments parmi 7 (sans ordre, sans répétition). Le programme affiche $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{6} = 35$.

(b) La condition est `if "Emma" in e:`. Une équipe contenant Emma est déterminée par le choix des 2 autres membres parmi 6 : `n` vaut $\binom{6}{2} = 15$.

(c) `permutations(amis, 3)` donne les triplets d'éléments distincts (l'ordre compte). Le programme affiche $\frac{7!}{4!} = 7\times6\times5 = 210$. Chaque équipe peut être ordonnée de $3! = 6$ façons, et $210 = 6\times35$.

(d) Par complémentaire, il y a $35 - 15 = 20$ équipes sans Emma. On le vérifie directement : c'est le choix de 3 amis parmi les 6 autres, soit $\binom{6}{3} = 20$.

Ex. 28 ★★★ **Le club de théâtre de Brest**

(a) Yanis a tort. $12\times11\times10\times9 = 11\,880$ compte les 4-uplets d'éléments distincts : l'ordre y compte. Or un groupe est une partie à 4 éléments. Chaque groupe peut être ordonné de $4! = 24$ façons : il est donc compté 24 fois. Le bon nombre est $\frac{11\,880}{24} = \binom{12}{4} = 495$ groupes.

(b) Modèle : combinaisons (pas d'ordre, pas de répétition). On passe par le complémentaire. Les groupes contenant à la fois Léa et Tom s'obtiennent en choisissant les 2 autres membres parmi les 10 restants : $\binom{10}{2} = 45$. Il y a donc $495 - 45 = 450$ groupes acceptables.

(c) Sans Léa ni Tom : on choisit 4 élèves parmi les 10 autres, soit $\binom{10}{4} = 210$ groupes. Avec exactement un des deux : on choisit lequel (2 choix), puis 3 élèves parmi les 10 autres : $2\times\binom{10}{3} = 2\times120 = 240$ groupes. Ces deux cas sont disjoints et couvrent tous les groupes acceptables : $210 + 240 = 450$. C'est cohérent.

(d) Équiprobabilité sur les 495 groupes (le même modèle pour les cas favorables et les cas possibles). Complémentaire : « ni Léa ni Tom », 210 groupes. $P = 1 - \frac{210}{495} = \frac{285}{495} = \frac{19}{33}$.

Ex. 29 ★★★ **L'équipe et son capitaine**

(a) Membre de gauche : $3\times\binom{13}{3} = 3\times286 = 858$. Membre de droite : $13\times\binom{12}{2} = 13\times66 = 858$. Les deux membres sont égaux.

Ex. 29 **(suite)**

(b) Première façon : on choisit l'équipe, une partie à k éléments parmi n ($\binom{n}{k}$ choix), puis le capitaine parmi ses k membres (k choix). Principe multiplicatif : $k\times\binom{n}{k}$. Seconde façon : on choisit d'abord le capitaine parmi les n joueurs (n choix), puis les $k-1$ autres membres parmi les $n-1$ joueurs restants, sans ordre ($\binom{n-1}{k-1}$ choix) : $n\times\binom{n-1}{k-1}$. On a compté le même ensemble de deux façons, donc $k\times\binom{n}{k} = n\times\binom{n-1}{k-1}$.

(c) $k\times\binom{n}{k} = \frac{k\times n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$, car $k! = k\times(k-1)!$. De plus, $n\times\binom{n-1}{k-1} = n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$. Les deux expressions sont égales.

(d) On applique l'égalité avec $n = 25$ et $k = 7$: $7\times\binom{25}{7} = 25\times\binom{24}{6} = 25\times134\,596 = 3\,364\,900$. Donc $\binom{25}{7} = \frac{3\,364\,900}{7} = 480\,700$.

Ex. 30 ★★★ **Le loto de la kermesse de Colmar**

(a) Le tirage est simultané : l'ordre ne compte pas et les numéros sont distincts. Un tirage est donc une combinaison de 5 numéros parmi 25. Il y a $\binom{25}{5} = \frac{25\times24\times23\times22\times21}{5!} = 53\,130$ tirages.

(b) « Exactement » : on choisit séparément dans chaque catégorie. On prend 3 numéros parmi les 5 de Maëlle ($\binom{5}{3} = 10$), puis 2 parmi les 20 autres ($\binom{20}{2} = 190$). Cela donne $10\times190 = 1\,900$ tirages favorables. Avec le même modèle pour les cas possibles : $P = \frac{1\,900}{53\,130} = \frac{190}{5\,313}$.

(c) On passe par le complémentaire, « aucun numéro de Maëlle » : les 5 numéros sont choisis parmi les 20 autres, soit $\binom{20}{5} = 15\,504$ tirages. $P = 1 - \frac{15\,504}{53\,130} = \frac{37\,626}{53\,130} = \frac{6\,271}{8\,855}$.

(d) `combinations(range(1, 26), 5)` parcourt chacun des $\binom{25}{5}$ tirages une seule fois. Pour chaque tirage, `k` compte les numéros de la grille qu'il contient. Donc `compte[k]` est le nombre de tirages qui ont exactement k numéros en commun avec la grille. On a `compte[0]` $= \binom{20}{5} = 15\,504$ et `compte[5]` $= \binom{5}{5} = 1$. Enfin, `sum(compte)` $= \binom{25}{5} = 53\,130$. Le programme affiche `15504 1 53130`.

4. Relation de Pascal et nombre de parties d'un ensemble

Ex. 31 ★☆☆ **Écrire et utiliser la relation de Pascal**

(a) Ce sont deux voisins de la ligne 11 (colonnes 6 et 7). La relation avec $n = 11$ et $k = 6$ donne $\binom{11}{6} + \binom{11}{7} = \binom{12}{7}$: le résultat est à la ligne suivante, sous le second.

(b) On pose $n + 1 = 15$ et $k + 1 = 9$, donc $n = 14$ et $k = 8$: $\binom{15}{9} = \binom{14}{8} + \binom{14}{9}$.

(c) Avec $n = 13$ et $k = 4$: $\binom{14}{5} = \binom{13}{4} + \binom{13}{5} = 715 + 1\,287 = 2\,002$.

(d) La relation donne $\binom{16}{7} = \binom{15}{6} + \binom{15}{7}$, donc $\binom{15}{7} = 11\,440 - 5\,005 = 6\,435$.

(e) On applique la relation avec $k = 2$, ce qui est permis car $2 \leqslant n - 1$: $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}$.

Ex. 32 ★☆☆ **Compter des parties**

(a) Chaque élément est dans la partie ou n'y est pas : une partie correspond à un 13-uplet de $\{0\,;1\}^{13}$. Il y a donc $2^{13} = 8\,192$ parties.

(b) Les parties de E sont $\varnothing$, $\{r\}$, $\{s\}$, $\{t\}$, $\{r\,;s\}$, $\{r\,;t\}$, $\{s\,;t\}$ et E. Il y en a $8 = 2^3$ (la partie vide et E comprises).

(c) Il y a $2^9 = 512$ parties en tout. Parmi elles, 1 est vide et 9 ont un seul élément. Il reste $512 - 1 - 9 = 502$ parties à au moins 2 éléments.

(d) On retire uniquement la partie vide : $2^{14} - 1 = 16\,384 - 1 = 16\,383$ parties non vides.

(e) Un ensemble à n éléments a 2^n parties. Or $1\,024 = 2^{10}$, donc l'ensemble a 10 éléments.

(f) On est en situation d'équiprobabilité sur les $2^6 = 64$ parties de F, la partie vide et F comprises. Deux parties sont favorables : $\varnothing$ et F. La probabilité vaut $\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$.

Ex. 33 ★☆☆ **Prolonger le triangle de Pascal**

(a) La ligne 9 contient $\binom{9}{0}, \binom{9}{1}, \ldots, \binom{9}{9}$, soit 10 nombres. Le premier est $\binom{9}{0} = 1$, et non $\binom{9}{1}$.

(b) D'après la relation de Pascal : $\binom{10}{2} = \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 9 + 36 = 45$ et $\binom{10}{3} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120$.

(c) La somme de la ligne n vaut 2^n, donc la somme de la ligne 9 vaut $2^9 = 512$.

Ex. 33 (suite)

(d) Par symétrie, la ligne 9 s'écrit $1, 9, 36, 84, \binom{9}{4}, \binom{9}{5}, 84, 36, 9, 1$ avec $\binom{9}{5} = \binom{9}{4}$. Donc $2 \times (1 + 9 + 36 + 84) + 2\binom{9}{4} = 512$, soit $260 + 2\binom{9}{4} = 512$, puis $\binom{9}{4} = 126$.

(e) $\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 84 + 126 = 210$.

Ex. 34 ★★☆ **Vrai ou faux : Pascal et parties**

(a) Faux. La relation de Pascal avec $n = 14$ et $k = 3$ donne $\binom{14}{3} + \binom{14}{4} = \binom{15}{4}$: le résultat est sous le second. Vérification : $364 + 1\,001 = 1\,365 = \binom{15}{4}$, alors que $\binom{15}{3} = 455$.

(b) Vrai. Par symétrie, $\binom{18}{6} = \binom{18}{12}$. Puis, par la relation de Pascal, $\binom{18}{12} + \binom{18}{13} = \binom{19}{13}$.

(c) Faux. Un ensemble à 5 éléments possède $2^5 = 32$ parties, car la partie vide et l'ensemble lui-même sont aussi des parties.

(d) Faux. La ligne 11 compte 12 nombres, mais sa somme vaut $2^{11} = 2\,048$: c'est le nombre de parties d'un ensemble à 11 éléments.

(e) Vrai. Il y a 2^n parties en tout. On retire la partie vide (1 partie) et les n singletons ($\binom{n}{1} = n$). Il reste $2^n - 1 - n$ parties à au moins deux éléments.

Ex. 35 ★★☆ **Corriger une démonstration par le calcul**

(a) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 35 + 35 = 70$. Le quotient de Léa vaut $\frac{2\times7!}{4!\times4!} = \frac{10\,080}{576} = \frac{35}{2}$. Ce n'est même pas un entier, donc l'égalité de Léa est fausse.

(b) Léa a pris $(k+1)!\,(n-k)!$ comme dénominateur commun sans modifier les numérateurs. Or $(k+1)! = (k+1) \times k!$ et $(n-k)! = (n-k) \times (n-k-1)!$. Il faut donc multiplier le premier numérateur par $k+1$ et le second par $n-k$.

(c) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$. Comme $n - k = (n+1) - (k+1)$, ce quotient vaut $\binom{n+1}{k+1}$, ce qui démontre la relation de Pascal.

Ex. 36 ★★☆ **Les coupes d'un glacier**

(a) Une coupe est une partie de l'ensemble des 8 garnitures : il n'y a ni ordre ni répétition, et la partie vide est permise. Il y a donc $2^8 = 256$ coupes.

(b) Une telle coupe est une combinaison de 3 garnitures parmi 8 (ni ordre ni répétition) : $\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3!} = 56$ coupes.

Ex. 36 **(suite)**

(c) Avec la chantilly, on choisit les 2 autres garnitures parmi les 7 restantes : $\binom{7}{2} = 21$ coupes. Sans la chantilly, on choisit les 3 garnitures parmi les 7 autres : $\binom{7}{3} = 35$ coupes. Ces deux familles sont disjointes et contiennent toutes les coupes à 3 garnitures. Par le principe additif, $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$: c'est la relation de Pascal
$(21 + 35 = 56)$.

(d) On est en situation d'équiprobabilité sur les $2^8 = 256$ coupes. D'après la question précédente, $\binom{8}{3} = 56$ coupes sont favorables. La probabilité vaut $\frac{56}{256} = \frac{7}{32}$.

(e) Les coupes à 0, 1, 2 ou 3 garnitures forment quatre familles disjointes. Par le principe additif, il y en a $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$. La probabilité vaut $\frac{93}{256}$.

Ex. 37 ★★☆ **Compter les parties avec Python**

(a) `combinations(E, k)` donne les combinaisons de k éléments de `E`, c'est-à-dire ses parties à k éléments, sans ordre ni répétition.
Donc `nb` $= \binom{7}{k}$.

(b) `range(len(E) + 1)` donne $k = 0, 1, \ldots, 7$: 8 valeurs, car la ligne 7 commence à $\binom{7}{0}$. La boucle affiche : 0 1 ; 1 7 ; 2 21 ; 3 35 ; 4 35 ; 5 21 ; 6 7 ; 7 1
(un couple par ligne).

(c) `total` est la somme de la ligne 7 du triangle de Pascal, soit le nombre total de parties d'un ensemble à 7 éléments. Le programme affiche donc $2^7 = 128$.

(d) Il suffit de commencer la boucle à $k = 4$ et de ne plus afficher dans la boucle :

```
from itertools import combinations
E = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
total = 0
for k in range(4, len(E) + 1):
    nb = len(list(combinations(E, k)))
    total = total + nb
print(total)
```

On obtient $35 + 21 + 7 + 1 = 64$. En effet, par symétrie $\binom{7}{k} = \binom{7}{7-k}$, il y a autant de parties à au moins 4 éléments que de parties à au plus 3 éléments. Ces deux familles disjointes réunissent les $2^7 = 128$ parties, donc chacune en compte $\frac{128}{2} = 64$.

Ex. 38 ★★★ **Bureaux avec président**

(a) Un bureau de 4 membres est une partie à 4 éléments : pas d'ordre, pas de répétition, donc une combinaison.
Façon 1 : on choisit le bureau, soit $\binom{9}{4} = 126$ choix, puis le président parmi ses 4 membres. Par le principe multiplicatif, cela donne $4 \times \binom{9}{4} = 4 \times 126 = 504$.
Façon 2 : on choisit le président parmi les 9 membres, puis les 3 autres parmi les 8 restants. Cela donne $9 \times \binom{8}{3} = 9 \times 56 = 504$. On peut former 504 bureaux.

(b) Façon 1 : on choisit la partie à k éléments, soit $\binom{n}{k}$ choix, puis son président parmi ses k membres. On obtient $k\binom{n}{k}$ bureaux par le principe multiplicatif.
Façon 2 : on choisit le président parmi les n membres, puis les $k-1$ autres membres parmi les $n-1$ restants, soit $\binom{n-1}{k-1}$ choix. On obtient $n\binom{n-1}{k-1}$ bureaux. On a compté le même ensemble de deux façons, donc $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(c) On remplace chaque terme $k\binom{n}{k}$ par $n\binom{n-1}{k-1}$, puis on met n en facteur. La somme vaut $n\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right)$. La parenthèse est la somme de la ligne $n-1$ du triangle : elle vaut 2^{n-1}, le nombre de parties d'un ensemble à $n-1$ éléments. La somme vaut donc $n \times 2^{n-1}$, sans utiliser la formule du binôme.

(d) Les bureaux à k membres, pour k allant de 1 à 9, forment des familles disjointes. Par le principe additif et la formule précédente avec $n = 9$, on obtient $9 \times 2^8 = 2\,304$. Directement : on choisit le président (9 choix), puis n'importe quelle partie des 8 autres membres, y compris la partie vide. Cela fait $2^8 = 256$ choix, donc $9 \times 256 = 2\,304$ bureaux.

(e) La ligne 6 s'obtient à partir de la ligne 5 (1, 5, 10, 10, 5, 1) en additionnant les voisins : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Elle commence par $\binom{6}{0} = 1$. On calcule $1 \times 6 + 2 \times 15 + 3 \times 20 + 4 \times 15 + 5 \times 6 + 6 \times 1 = 6 + 30 + 60 + 60 + 30 + 6 = 192$. De plus, $6 \times 2^5 = 6 \times 32 = 192$: l'égalité est vérifiée.

Ex. 39 ★★★ **Pascal appliquée deux fois**

(a) On applique la relation $\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} = \binom{m+1}{j+1}$ avec $m = n+1$ et $j = k+1$. C'est possible car $k+1 \leqslant n$. On obtient $\binom{n+2}{k+2} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2}$: on additionne deux voisins de la ligne $n+1$, et le résultat est sous le second.

(b) Comme $k \leqslant n-1$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Comme $k+1 \leqslant n-1$, on a $\binom{n+1}{k+2} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$. On additionne : $\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$.

Ex. 39 **(suite)**

(c) Les parties de E à $k+2$ éléments se rangent en trois familles disjointes. Celles qui contiennent a et b : leurs k autres éléments sont pris parmi les n autres, soit $\binom{n}{k}$ parties. Celles qui contiennent exactement un des deux : il y a 2 choix pour cet élément, puis $\binom{n}{k+1}$ choix pour les autres, soit $2\binom{n}{k+1}$ parties. Celles qui ne contiennent ni a ni b : $\binom{n}{k+2}$ parties. Par le principe additif, leur total vaut $\binom{n+2}{k+2}$.

(d) Une délégation est une partie à 6 éléments, sans ordre et sans répétition : c'est une combinaison. Les deux : on choisit les 4 autres parmi les 11 autres élèves, soit $\binom{11}{4} = 330$. Un seul : 2 choix pour lui, puis 5 élèves parmi 11, soit $2 \times \binom{11}{5} = 2 \times 462 = 924$. Aucun : $\binom{11}{6} = 462$. On retrouve $330 + 924 + 462 = 1\,716 = \binom{13}{6}$; c'est la formule avec $n = 11$ et $k = 4$.

(e) On est en situation d'équiprobabilité sur les $\binom{13}{6} = 1\,716$ délégations. L'événement contraire est « ni Inès ni Malik », de probabilité $\frac{462}{1\,716} = \frac{7}{26}$. La probabilité cherchée vaut $1 - \frac{7}{26} = \frac{19}{26}$.

Ex. 40 ★★★ **Photos de groupe paires ou impaires**

(a) Non. Une photo est une partie des 12 amis, et il y a $2^{12} = 4\,096$ parties. Ce total compte la partie vide et les 12 singletons. Mathis n'a retiré que la partie vide. Le bon nombre est $2^{12} - 1 - 12 = 4\,083$ photos d'au moins deux amis.

(b) Une partie qui contient a s'écrit $\{a\} \cup B$, où B est une partie quelconque de $E \setminus \{a\}$. Cette correspondance est une bijection. Comme $E \setminus \{a\}$ a $n-1$ éléments, il y a 2^{n-1} telles parties. Les autres parties sont au nombre de $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

(c) A' a un élément de plus ou de moins que A : si A est de cardinal pair, A' est de cardinal impair, et inversement. De plus, $(A')' = A$. L'application $A \mapsto A'$ est donc une bijection des parties de cardinal pair vers les parties de cardinal impair. Ces deux familles disjointes ont le même nombre d'éléments, et leur réunion compte les 2^n parties. Il y a donc 2^{n-1} parties de cardinal pair et 2^{n-1} de cardinal impair.

(d) Le programme parcourt toutes les combinaisons de k amis, pour k allant de 2 à 12. Il compte celles où k est pair, donc les parties de cardinal pair non vides. D'après la question précédente avec $n = 12$, il y a $2^{11} = 2\,048$ parties de cardinal pair, dont la partie vide. Le programme affiche donc $2^{11} - 1 = 2\,047$.

Ex. 40 **(suite)**

(e) Il y a $2^{11} = 2\,048$ parties de cardinal impair, dont les 12 singletons. On obtient $2^{11} - 12 = 2\,036$ photos. Contrôle : $2\,047 + 2\,036 = 4\,083$, le total trouvé à la première question.

5. *Mots, chemins et choix du modèle*

Ex. 41 ★☆☆ **Mots écrits avec deux lettres**

(a) Un mot est déterminé par les 3 positions des A parmi les 10 : c'est une partie à 3 éléments, l'ordre de choix des places ne compte pas. Il y a $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$ mots.

(b) L'ordre compte et les répétitions sont permises : un mot est un 5-uplet de $\{A\,;B\}$, il y en a $2^5 = 32$. On passe au complémentaire : un seul mot ne contient aucun A (BBBBB). Il y a $32 - 1 = 31$ mots avec au moins un A.

(c) $\binom{9}{k}$ compte les mots de 9 lettres qui ont exactement k lettres A. Les cas $k = 0, \ldots, 9$ sont disjoints et couvrent tous les mots : par le principe additif, la somme compte tous les mots de 9 lettres. Ce sont les 9-uplets de $\{A\,;B\}$, donc la somme vaut $2^9 = 512$.

(d) Ici les répétitions sont permises et l'ordre compte : un mot est un 6-uplet de $\{A\,;B\}$. Il y en a $2^6 = 64$.

(e) $\binom{11}{4} = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} = \frac{7\,920}{24} = 330$. Par symétrie, $\binom{11}{7} = \binom{11}{11-7} = \binom{11}{4} = 330$.

(f) Une suite est un mot de 7 lettres avec 5 lettres F : on choisit les positions des F. Il y a $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$ suites.

Ex. 42 ★☆☆ **Chemins dans un quadrillage**

(a) Un chemin compte $5 + 4 = 9$ pas, dont 4 H : c'est un mot de 9 lettres où l'on choisit les positions des H. Il y a $\binom{9}{4} = 126$ chemins.

(b) Chaque pas est D ou H : l'ordre compte et les répétitions sont permises. Un chemin est un 8-uplet de $\{D\,;H\}$, il y en a $2^8 = 256$.

(c) Un chemin compte 9 pas, dont un seul H : on choisit sa position, $\binom{9}{1} = 9$ chemins.

(d) On fait $5 - 2 = 3$ pas D et $9 - 3 = 6$ pas H, soit 9 pas : $\binom{9}{3} = 84$ chemins.

(e) Faux. Un chemin compte $5 + 5 = 10$ pas, dont 5 H. Il y a $\binom{10}{5} = 252$ chemins. Le produit 5×5 ne compte rien : on choisit des positions parmi 10 pas.

Ex. 43 ★★☆ Les anagrammes de BANANE

(a) On choisit une partie à 2 éléments parmi les 6 positions (les deux A sont identiques, l'ordre ne compte pas) : $\binom{6}{2} = 15$ façons.

(b) Il reste 4 positions ; on y choisit les 2 places des N : $\binom{4}{2} = 6$ façons.

(c) Il reste 2 places : B en choisit une (2 choix), E prend la dernière. Par le principe multiplicatif : $15 \times 6 \times 2 = 180$ anagrammes.

(d) Non. Les lettres identiques ne se distinguent pas : échanger les deux A ou les deux N donne le même mot. Chaque anagramme est comptée $2! \times 2! = 4$ fois dans $6!$, et $\frac{720}{4} = 180$.

(e) Les deux N sont aux extrémités. Au milieu, on place B, A, A, E sur 4 places : les A ($\binom{4}{2} = 6$), puis B (2 choix), puis E. Il y a $6 \times 2 = 12$ anagrammes.

Ex. 44 ★★☆ Trois façons de tirer des jetons

(a) L'ordre compte et les répétitions sont possibles : un résultat est un 3-uplet de $\{1\,;\ldots\,;13\}$. Il y a $13^3 = 2\,197$ listes.

(b) L'ordre compte, pas de répétition : 3-uplet d'éléments distincts. Il y a $\frac{13!}{10!} = 13 \times 12 \times 11 = 1\,716$ listes.

(c) Ni ordre ni répétition : un résultat est une partie à 3 éléments. Il y a $\binom{13}{3} = \frac{1\,716}{3!} = 286$ résultats.

(d) On passe au complémentaire : les listes sans répétition sont les 3-uplets d'éléments distincts. Il y a $2\,197 - 1\,716 = 481$ listes avec au moins deux numéros égaux.

Ex. 45 ★★☆ La délégation de Noé

(a) Noé a compté des 3-uplets d'éléments distincts : pour lui, l'ordre compte. Or une délégation n'a pas d'ordre : c'est une partie à 3 éléments. Choisir Ana puis Bao puis Chloé ou Chloé puis Ana puis Bao donne la même délégation.

(b) Chaque délégation correspond à toutes les façons d'ordonner ses 3 membres, soit $3! = 6$ listes.

(c) Modèle : partie à 3 éléments parmi 15. $\binom{15}{3} = \frac{2\,730}{6} = 455$ délégations.

(d) Ici l'ordre compte (les rôles distinguent les élus) et pas de répétition : 3-uplets d'éléments distincts. Il y a $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ bureaux : le calcul de Noé répond à cette question-là.

Ex. 45 (suite)

(e) Complémentaire de « aucune fille » : délégations de 3 garçons, $\binom{6}{3} = 20$. Il y a $455 - 20 = 435$ délégations avec au moins une fille.

Ex. 46 ★★☆ Les stylos de Sacha : deux modèles

(a) Ni ordre ni répétition : un résultat est une partie à 3 éléments, tous équiprobables. $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{11}{3} = 165$.

(b) On choisit 2 rouges parmi 5 et 1 bleu parmi 6 : $\binom{5}{2} \times \binom{6}{1} = 10 \times 6 = 60$ résultats.

(c) Équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{60}{165} = \dfrac{4}{11}$.

(d) L'ordre compte, pas de répétition : 3-uplets d'éléments distincts. $\mathrm{Card}(\Omega) = 11 \times 10 \times 9 = 990$.

(e) Place du bleu : 3 choix ; bleu : 6 choix ; rouges dans l'ordre : 5×4. Soit $3 \times 6 \times 20 = 360$ tirages et $P(A) = \frac{360}{990} = \frac{4}{11}$. Même résultat : chaque partie correspond à $3! = 6$ tirages ordonnés, au numérateur comme au dénominateur.

Ex. 47 ★★☆ Compter des chemins en Python

(a) `mot` est un 7-uplet de $\{D\,;H\}$ (ordre et répétitions). La boucle parcourt tous ces 7-uplets : $2^7 = 128$ tours.

(b) `n` compte les mots de 7 lettres avec exactement 3 H, donc 4 D : les chemins de $(0\,;0)$ à $(4\,;3)$. Le programme affiche $\binom{7}{3} = 35$.

(c) Il faut 6 H (et 1 D) : la condition devient `mot.count("H") == 6`. Le programme affiche $\binom{7}{6} = 7$.

(d) Il affiche le nombre de parties à 3 éléments de $\{0\,;\ldots\,;6\}$: $\binom{7}{3} = 35$, le même nombre. Un chemin est déterminé par les 3 positions de ses pas H : choisir ces positions revient à choisir le chemin.

Ex. 48 ★★★ La ville quadrillée d'Inès

(a) Un chemin est un mot de $6 + 4 = 10$ lettres, avec 6 lettres D et 4 lettres H. Il est déterminé par l'ensemble des 4 places des H parmi les 10 : c'est une partie à 4 éléments, l'ordre de choix des places ne compte pas. Il y a $\binom{10}{4} = 210$ chemins
(et non $6 \times 4 = 24$).

(b) On applique le principe multiplicatif aux deux tronçons. De $(0\,;0)$ à $(1\,;3)$: 4 pas dont 1 D, soit $\binom{4}{1} = 4$ chemins. De $(1\,;3)$ à $(6\,;4)$: 5 D et 1 H, soit $\binom{6}{1} = 6$ chemins.
Donc $4 \times 6 = 24$ chemins passent par la boulangerie.

Ex. 48 **(suite)**

(c) Les chemins qui passent par $(3\,;1)$: de $(0\,;0)$ à $(3\,;1)$, on a $\binom{4}{1} = 4$ chemins ; de $(3\,;1)$ à $(6\,;4)$, on a 3 D et 3 H, soit $\binom{6}{3} = 20$ chemins. Cela fait $4 \times 20 = 80$ chemins. Par passage au complémentaire, $210 - 80 = 130$ chemins évitent le carrefour.

(d) Aucun chemin ne passe par les deux points. Après $(1\,;3)$, l'ordonnée vaut au moins 3 : on n'atteint plus $(3\,;1)$. Après $(3\,;1)$, l'abscisse vaut au moins 3 : on n'atteint plus $(1\,;3)$. Les deux ensembles sont disjoints. Par le principe additif, il y a $24 + 80 = 104$ chemins favorables. Comme les chemins sont équiprobables, $P = \frac{104}{210} = \frac{52}{105}$.

(e) Le dernier pas d'un chemin vers $(p\,;q)$ est D ou H. S'il finit par D, on enlève ce pas et on obtient un chemin vers $(p-1\,;q)$, et réciproquement : il y en a $\binom{p-1+q}{q} = \binom{p+q-1}{q}$. S'il finit par H, on obtient de même un chemin vers $(p\,;q-1)$: il y en a $\binom{p+q-1}{q-1}$. Les deux cas sont disjoints et couvrent tous les chemins. Par le principe additif, $\binom{p+q}{q} = \binom{p+q-1}{q} + \binom{p+q-1}{q-1}$. Contrôle : $\binom{10}{4} = 210 = 126 + 84 = \binom{9}{4} + \binom{9}{3}$.

Ex. 49 ★★★ **Les codes binaires de Malo**

(a) Un tel code est un mot de 12 lettres avec cinq 1. Il est déterminé par l'ensemble des 5 positions des 1 parmi les 12 : c'est une partie à 5 éléments. Il y a $\binom{12}{5} = 792$ codes.

(b) Un code est un 12-uplet de $\{0\,;1\}$: l'ordre compte et les répétitions sont permises. Il y en a $2^{12} = 4\,096$. On passe au complémentaire, « au plus un 1 » : il y a 1 code sans 1 et $\binom{12}{1} = 12$ codes avec un seul 1.
Donc $4\,096 - 1 - 12 = 4\,083$ codes ont au moins deux 1.

(c) Les 7 zéros créent 8 espaces : 6 entre deux zéros et 2 aux bouts. Avec au plus un 1 par espace, deux 1 ne sont jamais voisins. Tout code qui convient s'obtient ainsi d'une seule façon. On choisit une partie à 5 éléments parmi les 8 espaces : $\binom{8}{5} = 56$ codes.

(d) L'univers est l'ensemble des 792 codes à exactement cinq 1, tous équiprobables. On a donc $P = \frac{56}{792} = \frac{7}{99}$.

(e) `product("01", repeat=12)` parcourt les $2^{12} = 4\,096$ codes. Pour chacun, `m` est le mot écrit en entier. Le compteur `n` augmente quand le code contient exactement cinq 1 et ne contient pas le motif « 11 », c'est-à-dire pas deux 1 voisins. Le programme compte donc les codes de la troisième question : il affiche 56.

Ex. 50 ★★★ **Le club d'échecs de Nantes**

(a) Un match est déterminé par ses deux joueurs : l'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition. C'est une partie à 2 éléments parmi 8 : $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$ matchs.

(b) Un match mixte, c'est une fille et un garçon. Par le principe multiplicatif, il y en a $4 \times 4 = 16$. Les matchs entre deux filles sont des parties à 2 éléments parmi 4 : $\binom{4}{2} = 6$. Il y en a aussi 6 entre deux garçons. Ces trois cas sont disjoints, donc $16 + 6 + 6 = 28$: on retrouve le total.

(c) On compte les paires de personnes du groupe. Première façon : c'est une partie à 2 éléments parmi $2n$, soit $\binom{2n}{2}$. Seconde façon, en trois cas disjoints : deux filles, $\binom{n}{2}$; deux garçons, $\binom{n}{2}$; une fille et un garçon, $n \times n = n^2$. Par le principe additif, il y a $2\binom{n}{2} + n^2$ paires. Les deux nombres comptent le même ensemble, donc ils sont égaux. Contrôle par le calcul : $\frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$ et $n(n-1) + n^2 = 2n^2 - n$.

(d) Avec des tables numérotées, on choisit la paire de la table 1 ($\binom{8}{2} = 28$), puis celle de la table 2 ($\binom{6}{2} = 15$), puis celle de la table 3 ($\binom{4}{2} = 6$). La dernière paire est imposée ($\binom{2}{2} = 1$). Cela fait $28 \times 15 \times 6 \times 1 = 2\,520$ répartitions. Chaque répartition sans numéros correspond à $4! = 24$ numérotations des tables. Il y a donc $\frac{2\,520}{24} = 105$ répartitions.

(e) Les 4 matchs sont mixtes si chaque fille affronte un garçon différent. La première fille a 4 choix, la deuxième 3, la troisième 2, la dernière 1 : cela fait $4! = 24$ répartitions, une par permutation des garçons. Comme les répartitions sont équiprobables, $P = \frac{24}{105} = \frac{8}{35}$.