Corrigé – Cosinus, sinus et angles associés

Mathématiques – Première spécialité

Trigonométrie · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Lire sur le cercle ★

1. $3\pi = \pi + 2\pi$: même image que π.
   L'image est $I'(-1\,;\,0)$: $\cos 3\pi = -1$ et $\sin 3\pi = 0$.

2. $-\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} - 2\pi$: même image que $\dfrac{3\pi}{2}$.
   L'image est $J'(0\,;\,-1)$: $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

3. $\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi$: même image que $\dfrac{\pi}{2}$.
   L'image est $J(0\,;\,1)$: $\cos\dfrac{5\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{5\pi}{2} = 1$.

4. $-\pi = \pi - 2\pi$: même image que π.
   L'image est $I'(-1\,;\,0)$: $\cos(-\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = 0$.

5. $4\pi = 0 + 2 \times 2\pi$: même image que 0.
   L'image est $I(1\,;\,0)$: $\cos 4\pi = 1$ et $\sin 4\pi = 0$.

6. $\dfrac{7\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi$: même image que $\dfrac{3\pi}{2}$.
   L'image est $J'(0\,;\,-1)$: $\cos\dfrac{7\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{7\pi}{2} = -1$.

7. $-\dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 2\pi$: même image que $\dfrac{\pi}{2}$.
   L'image est $J(0\,;\,1)$: $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$.

8. $11\pi = \pi + 5 \times 2\pi$: même image que π.
   L'image est $I'(-1\,;\,0)$: $\cos 11\pi = -1$ et $\sin 11\pi = 0$.

Exercice 2 – Valeurs remarquables ★

Calcule la valeur exacte, sans calculatrice.

a) $\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{6}$
$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$
$= 1$

b) $2\cos\dfrac{\pi}{4}$
$= 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$= \sqrt{2}$

c) $\cos\dfrac{\pi}{6}\times\sin\dfrac{\pi}{3}$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$=\dfrac{3}{4}$

d) $\sin\dfrac{\pi}{2}-\cos\pi$
$=1-(-1)$
$=2$

e) $\cos^2\dfrac{\pi}{6}-\sin^2\dfrac{\pi}{3}$
$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}$
$=0$

f) $4\sin\dfrac{\pi}{6}\times\cos\dfrac{\pi}{3}$
$=4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$
$=1$

g) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}$
$=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$=\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2}$
$=\dfrac{5}{2}$

h) $\cos 0+2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$
$=1+2\times(-1)$
$=-1$

Exercice 3 – Signe selon le quadrant ★

Dans quel quadrant est l'image du réel ? Déduis-en le signe de son cosinus et de son sinus.

a) $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{3}<\pi$, car $\dfrac{3\pi}{6}<\dfrac{4\pi}{6}<\dfrac{6\pi}{6}$.
L'image est dans le deuxième quadrant : $\cos\dfrac{2\pi}{3}<0$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3}>0$.

b) $-\dfrac{\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{5}<0$.
L'image est dans le quatrième quadrant : $\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)>0$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)<0$.

c) $\pi<\dfrac{5\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{2}$, car $\dfrac{4\pi}{4}<\dfrac{5\pi}{4}<\dfrac{6\pi}{4}$.
L'image est dans le troisième quadrant : $\cos\dfrac{5\pi}{4}<0$ et $\sin\dfrac{5\pi}{4}<0$.

d) $-\dfrac{7\pi}{5}+2\pi=\dfrac{3\pi}{5}$, même image ; et $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{5}<\pi$.
L'image est dans le deuxième quadrant : $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)<0$ et $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)>0$.

e) Avec $\pi \approx 3{,}14$: $\dfrac{3\pi}{2} \approx 4{,}71 < 5 < 2\pi \approx 6{,}28$.
L'image est dans le quatrième quadrant : $\cos 5 > 0$ et $\sin 5 < 0$.

f) $-\pi \approx -3{,}14 < -2 < -\dfrac{\pi}{2} \approx -1{,}57$.
L'image est dans le troisième quadrant : $\cos(-2) < 0$ et $\sin(-2) < 0$.

g) $\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi$: même image que $\dfrac{\pi}{4}$, entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
L'image est dans le premier quadrant : $\cos\dfrac{9\pi}{4} > 0$ et $\sin\dfrac{9\pi}{4} > 0$.

h) $\pi < \dfrac{11\pi}{8} < \dfrac{3\pi}{2}$, car $\dfrac{8\pi}{8} < \dfrac{11\pi}{8} < \dfrac{12\pi}{8}$.
L'image est dans le troisième quadrant : $\cos\dfrac{11\pi}{8} < 0$ et $\sin\dfrac{11\pi}{8} < 0$.

Exercice 4 – Du cosinus au sinus ★★

Utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, puis le quadrant pour choisir le signe.

a) D'après $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\cos^2 x = 1 - \left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$, donc $\cos x = \dfrac{12}{13}$ ou $\cos x = -\dfrac{12}{13}$.
Quatrième quadrant : le cosinus est positif.
Donc $\cos x = \dfrac{12}{13}$.

b) D'après $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\sin^2 x = 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$, donc $\sin x = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}$, avec $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Sur $[0\,;\,\pi]$, l'image est dans la moitié haute du cercle : le sinus est positif ou nul.
Donc $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) D'après $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$, donc $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
Deuxième quadrant : le cosinus est négatif.
Donc $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

d) D'après $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\sin^2 x = 1 - (-0{,}28)^2 = 1 - 0{,}0784 = 0{,}9216$, donc $\sin x = 0{,}96$ ou $\sin x = -0{,}96$ (car $0{,}96^2 = 0{,}9216$).
Sur $]-\pi\,;\,0[$, l'image est dans la moitié basse du cercle : le sinus est négatif.
Donc $\sin x = -0{,}96$.

e) D'après $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$, donc $\cos x = \dfrac{3}{4}$ ou $\cos x = -\dfrac{3}{4}$.
Premier quadrant : le cosinus est positif.
Donc $\cos x = \dfrac{3}{4}$.

f) Si c'était le cas, on aurait $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Or $0{,}6^2 + (-0{,}7)^2 = 0{,}36 + 0{,}49 = 0{,}85$, et $0{,}85 \neq 1$.
Aucun réel n'a ce cosinus et ce sinus.

Exercice 5 – Angles associés ★★

Écris le réel à l'aide d'une valeur remarquable ($\pi - a$, $\pi + a$, $-a\ldots$), puis donne la valeur exacte du cosinus et du sinus.

a) $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$ (deuxième quadrant).
$\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$ (troisième quadrant, symétrique de $\dfrac{\pi}{3}$ par rapport à O).
$\cos\dfrac{4\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.
$\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $-\dfrac{3\pi}{4} = -\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (on utilise d'abord $-x$, puis $\pi - x$).
$\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\dfrac{11\pi}{6} = 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$ (même image que $-\dfrac{\pi}{6}$, quatrième quadrant).
$\cos\dfrac{11\pi}{6} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$\sin\dfrac{11\pi}{6} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

e) $\dfrac{17\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2 \times 2\pi$ (deux tours de plus que $\dfrac{\pi}{4}$).
$\cos\dfrac{17\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\dfrac{17\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6 – Simplifier une expression ★★

Pour tout réel x, simplifie l'expression à l'aide des angles associés.

a) $\cos(\pi - x) + \cos(-x)$
$= -\cos x + \cos x$
$= 0$

b) $\sin(\pi - x) - \sin(-x)$
$= \sin x - (-\sin x)$
$= 2\sin x$

c) $\cos(x + \pi) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$
$= -\cos x + \cos x + \cos x$
$= \cos x$

d) $\cos^2(\pi - x) + \sin^2(-x)$
$= (-\cos x)^2 + (-\sin x)^2$
$= \cos^2 x + \sin^2 x$
$= 1$

e) $\sin(x+2\pi)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
$=\sin x-\sin x+\sin x$
$=\sin x$

Exercice 7 – Du point au réel ★★★

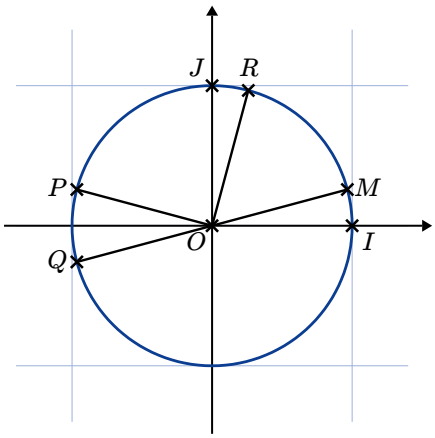
1. A : abscisse négative, ordonnée positive, deuxième quadrant.
Le sinus vaut $\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$: A est le symétrique de l'image de $\dfrac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des ordonnées, donc associé à $\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$.
B : quatrième quadrant, symétrique de l'image de $\dfrac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des abscisses : $-\dfrac{\pi}{4}$.
C : troisième quadrant.
Le cosinus vaut $-\dfrac{1}{2}=-\cos\dfrac{\pi}{3}$: C est symétrique de l'image de $\dfrac{\pi}{3}$ par rapport à O, associé à $\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$, de mesure principale $\dfrac{4\pi}{3}-2\pi=-\dfrac{2\pi}{3}$.

2. La symétrie de centre O change les signes des deux coordonnées : $A'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.
Elle correspond à un demi-tour : $\dfrac{5\pi}{6}-\pi=-\dfrac{\pi}{6}$, qui est dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
Vérification : $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

3. Les réels associés à B sont les $-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, k entier relatif.
$k=0$: $-\dfrac{\pi}{4}$.
$k=1$: $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{8\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4}$.
$k=-1$: $-\dfrac{9\pi}{4}<-2\pi$, et $k=2$: $\dfrac{15\pi}{4}>2\pi$: ils sont hors de l'intervalle.
Les réels cherchés sont $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

4. E est sur le cercle : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$, donc $y^2=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.
Quatrième quadrant : $y<0$, donc $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
E est le symétrique de l'image de $\dfrac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe des abscisses : il est associé à $-\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 8 – Le cosinus de pi sur douze ★★★



1. $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\dfrac{\pi}{12}$, avec $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{16}$ (car $\sqrt{6}\times\sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$).
   $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{16}{16} - \dfrac{8+4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.
2. $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6-2\sqrt{12}+2}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.
   Les deux nombres $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ont le même carré, donc ils sont égaux ou opposés.
   $\dfrac{\pi}{12}$ est dans le premier quadrant : $\sin\dfrac{\pi}{12} > 0$; et $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} > 0$ car $\sqrt{6} > \sqrt{2}$.
   Donc $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
3. $\dfrac{11\pi}{12} = \pi - \dfrac{\pi}{12}$.
   $\cos\dfrac{11\pi}{12} = -\cos\dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   $\sin\dfrac{11\pi}{12} = \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
4. $\dfrac{13\pi}{12} = \pi + \dfrac{\pi}{12}$: symétrique de M par rapport à O.
   $\cos\dfrac{13\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{13\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{6\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}$: symétrique de M par rapport à la droite $y = x$.
   $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   Sur la figure : P, Q et R sont les images de $\dfrac{11\pi}{12}$, $\dfrac{13\pi}{12}$ et $\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Les valeurs de $\dfrac{\pi}{3}$ sont échangées.*

L'image de $\dfrac{\pi}{3}$ est proche de J : son abscisse est petite, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

b) *Dans le deuxième quadrant, c'est le cosinus qui est négatif ; le sinus est positif.*

$\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos(-x) = \cos x$ *: le cosinus ne change pas.*

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) *Le signe n'a pas été choisi avec l'intervalle.*

$\sin^2 x = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$.

Sur $]-\pi\,;\,0[$, le sinus est négatif : $\sin x = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

e) *La relation porte sur les carrés :* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$\cos^2 x = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$; premier quadrant, cosinus positif : $\cos x = 0{,}8$.

f) $\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$; *d'ailleurs* $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$, *impossible pour un cosinus.*
$\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$, donc le cosinus vaut $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ est égal à :

Réponse C : $-\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$, donc $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

2. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ est égal à :

Réponse A : $-\dfrac{1}{2}$
$\sin(-x) = -\sin x$, et $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

3. $\sin x = 0{,}8$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. Alors $\cos x$ vaut :

Réponse B : $-0{,}6$
$\cos^2 x = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$; deuxième quadrant, cosinus négatif : $-0{,}6$.

4. Pour tout réel x, $\cos(\pi - x)$ est égal à :

Réponse D : $-\cos x$
L'image de $\pi - x$ est la symétrique de celle de x par rapport à l'axe des ordonnées : l'abscisse change de signe.

5. Si $x \in \left]\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, alors :

Réponse B : $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$
L'image est dans le troisième quadrant : abscisse et ordonnée négatives.

6. $\cos\dfrac{7\pi}{6}$ est égal à :

Réponse A : $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$, donc $\cos\dfrac{7\pi}{6} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).