Terminale spécialité et maths complémentaires / Convexité

benprof particulier.fr

50 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Convexe ou concave : cordes et tangentes*

À retenir : Convexe : $\mathcal{C}_f$ au-dessous de ses cordes (seulement entre les deux points) et au-dessus de ses tangentes. Concave : l'inverse. Ex. : ln est concave, donc $\ln x \leqslant x-1$. Une fonction affine est convexe et concave. La convexité s'étudie toujours sur un intervalle.

Ex. 1 ★☆☆ **Les fonctions de référence** — Pour chaque fonction, dis si elle est convexe, concave, les deux ou ni l'un ni l'autre sur l'ensemble indiqué. Justifie à l'aide des fonctions de référence.

(a) $x \mapsto x^2$ sur $[-3\,;\,1]$.
(b) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
(c) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;\,0[$.
(d) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
(e) $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.
(f) $x \mapsto x^3$ sur $[1\,;\,5]$.
(g) $x \mapsto -2x+7$ sur $\mathbb{R}$.
(h) $x \mapsto \ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Ex. 2 ★☆☆ **Tangente et position** — Dans chaque cas, f a la convexité indiquée sur l'intervalle donné. Écris une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Donne ensuite la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur cet intervalle.

(a) $f(x)=\mathrm{e}^x$, convexe sur $\mathbb{R}$; $a=2$.
(b) $f(x)=\ln x$, concave sur $]0\,;\,+\infty[$; $a=\mathrm{e}^2$.
(c) $f(x)=\sqrt{x}$, concave sur $[0\,;\,+\infty[$; $a=9$.
(d) $f(x)=x^2-4x$, convexe sur $\mathbb{R}$; $a=3$.
(e) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, concave sur $]-\infty\,;\,0[$; $a=-1$.

Ex. 3 ★☆☆ **Le test du point milieu** — Pour chaque fonction et chaque intervalle $[a\,;\,b]$, pose $m=\frac{a+b}{2}$. Calcule $f(m)$ et $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ (valeurs approchées au centième si besoin) et compare-les. Que peux-tu en déduire pour la convexité de f sur $[a\,;\,b]$?

(a) $f(x)=x^3$ sur $[-4\,;\,0]$.
(b) $f(x)=\sqrt{x}$ sur $[4\,;\,16]$.
(c) $f(x)=\mathrm{e}^x$ sur $[0\,;\,2]$.
(d) $f(x)=\ln x$ sur $[1\,;\,\mathrm{e}^2]$.
(e) $f(x)=x^3$ sur $[-1\,;\,3]$.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur la convexité** — Vrai ou faux ? Justifie. Si c'est faux, donne un contre-exemple.

(a) « Si f est croissante sur $]-\infty\,;\,0]$, alors f est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$. » Indication : regarde $x \mapsto x^3$ et sa tangente en -1.
(b) « Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. »
(c) « La fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}^*$. » Indication : regarde la corde entre les points d'abscisses -2 et $-\frac{1}{2}$.
(d) « Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$. »
(e) « Si f est concave sur $[0\,;\,4]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de ses cordes. »

Ex. 5 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — Inès étudie $f(x)=\sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et sa tangente $T : y=\frac{x}{4}+1$ au point d'abscisse 4. Elle écrit : « $\sqrt{x}$ est convexe, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T : $\sqrt{x} \geqslant \frac{x}{4}+1$ pour tout $x \geqslant 0$. »

(a) Vérifie l'équation de T.
(b) Teste l'inégalité d'Inès pour $x=0$. Que conclus-tu ?
(c) Repère ses deux erreurs, puis écris l'inégalité correcte.
(d) Démontre l'inégalité correcte en développant $\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{4}$.
(e) Déduis-en un majorant de $\sqrt{5}$ et compare-le à la valeur de la calculatrice.

Ex. 6 ★★☆ **Lire les variations de f′** — f est dérivable sur $[-3\,;\,5]$, avec $f(-1)=3$ et $f'(-1)=1$. Voici les variations de f' :

x	$[-3\,;\,1]$	$[1\,;\,5]$
variations de f'	↘ de 4 à -2	↗ de -2 à 6

(a) Donne la convexité de f sur $[-3\,;\,1]$, puis sur $[1\,;\,5]$. Justifie.
(b) A et B sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses 2 et 4. Entre A et B, $\mathcal{C}_f$ est-elle au-dessus ou au-dessous de la corde $[AB]$? Justifie.
(c) Écris l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en -1, puis déduis-en une majoration de $f(0)$.
(d) Malo affirme : « f' est décroissante sur $[-3\,;\,1]$, donc f aussi. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★☆ **Les téléchargements de Pixelia** — La start-up Pixelia suit les téléchargements de son application. Le nombre cumulé de téléchargements, en milliers, t mois après le lancement, est $N(t) = 30\ln(t+1)$ pour $t \geqslant 0$.

(a) Calcule $N'(t)$, puis justifie que N est concave sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Écris la tangente à la courbe de N en 0. Déduis-en que $N(t) \leqslant 30t$.

(c) Sans calculatrice, justifie que $N(4) \geqslant \frac{N(1)+N(7)}{2}$, puis vérifie-le avec des valeurs approchées.

(d) Le directeur dit : « Nos téléchargements accélèrent. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 8 ★★★ **Comparer π^{e} et e^{π}** — On note $f(x) = \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Les points $A(1\,;0)$ et $B(\mathrm{e}\,;1)$ sont sur $\mathcal{C}_f$.

(a) Calcule $f''(x)$, puis justifie que f est concave sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Écris une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e. Déduis-en une inégalité valable pour tout $x > 0$.

(c) Applique cette inégalité à $x = \pi$, puis déduis-en que $\pi^{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{\pi}$.

(d) Écris une équation de la droite (AB). Déduis-en, par la concavité de f, que $\ln 2 \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}-1}$.

(e) Lou en déduit de la même façon que $\ln 4 \geqslant \frac{3}{\mathrm{e}-1}$. Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 9 ★★★ **Une cubique et ses tangentes** — Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

(a) Calcule $f''(x)$ et étudie son signe. Déduis-en la convexité de f. f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifie.

(b) Écris une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(c) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $\mathbb{R}$ (développe $(x-1)^3$). Que représente le point d'abscisse 1 ?

(d) Écris une équation de la tangente T' au point d'abscisse 3. Déduis-en, sans étudier de signe, une inégalité valable sur $[1\,;+\infty[$.

(e) Noé affirme que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T' sur $\mathbb{R}$ tout entier. Vrai ou faux ? Justifie (essaie $x = -4$).

Ex. 10 ★★★ **Le coût moyen de la verrerie Lumen** — La verrerie Lumen produit q tonnes de verre par jour, avec $q \in [0\,;20]$. Le coût de production, en milliers d'euros, est $C(q) = 10\mathrm{e}^{0{,}2q}$.

(a) Calcule $C'(q)$ et $C''(q)$. Justifie que C est convexe sur $[0\,;20]$, puis interprète ce résultat en termes de coût marginal.

Ex. 10 (suite)

(b) Calcule $C(10)$ et $\frac{C(5)+C(15)}{2}$ au centième. Explique l'ordre obtenu par la convexité : vaut-il mieux produire 10 t deux jours de suite, ou 5 t puis 15 t ?

(c) Écris une équation de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse a, puis trouve a pour que cette tangente passe par l'origine.

(d) Déduis-en, par la convexité, le coût moyen minimal $\frac{C(q)}{q}$ sur $]0\,;20]$ et la production qui le réalise. Donne ce coût en euros par tonne.

2. *Dérivée seconde et convexité*

À retenir : f'' est la dérivée de f' : f est convexe où $f'' \geqslant 0$ et concave où $f'' \leqslant 0$. Factorise f'' et écarte $\mathrm{e}^u > 0$ et les carrés : $(x\mathrm{e}^x)'' = (x+2)\mathrm{e}^x$. Le signe de f' donne les variations, pas la convexité.

Ex. 11 ★★☆ **Calculer des dérivées secondes** — Dans chaque cas, calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$ sur l'intervalle indiqué. Donne $f''(x)$ sous forme factorisée.

(a) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{3x-2}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = x\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

(e) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ sur $]2\,;+\infty[$.

(f) $f(x) = \ln(3-x)$ sur $]-\infty\,;3[$.

Ex. 12 ★★☆ **Du signe de f″ à la convexité** — Dans chaque cas, on donne $f''(x)$. Étudie son signe (factorise si besoin), puis donne les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

(a) $f''(x) = x\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $f''(x) = -5(x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $f''(x) = x^2 - 7x + 10$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $f''(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 3$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $f''(x) = 2x^3 - 8x$ sur $\mathbb{R}$.

(f) $f''(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 13 ★★☆ **Lire la convexité sur les variations de f′** — Une fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau donne les variations de sa dérivée f'. On sait aussi que $f'(x) > 0$ pour tout réel x.

x	$]-\infty\,;-1]$	$[-1\,;3]$	$[3\,;+\infty[$
variations de f'	↗	↘	↗

(a) Sur quel(s) intervalle(s) f est-elle convexe ? Justifie.

(b) Sur quel intervalle f est-elle concave ? Justifie.

(c) Donne les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Quel est le signe de $f''(0)$? Justifie.

(e) Malik écrit : « $f'(x) > 0$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(f) Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 5 ? Justifie.

Ex. 14 ★★☆ **Corriger la copie de Hugo** — Hugo étudie la convexité de $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Il écrit : « $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{-x}$, donc $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x} < 0$: f est concave sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs f est croissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$, donc convexe sur cet intervalle. »

(a) Vérifie le calcul de $f'(x)$ fait par Hugo.

(b) Explique son erreur dans le calcul de $f''(x)$, puis calcule $f''(x)$ correctement, sous forme factorisée.

(c) Étudie la convexité de f et donne les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

(d) Pourquoi l'argument « croissante donc convexe » est-il faux ? Appuie-toi sur la question précédente.

Ex. 15 ★★☆ **Vrai ou faux sur la convexité** — Vrai ou faux ? Justifie par une preuve ou un contre-exemple.

(a) Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x de I, alors f' est croissante sur I.

(c) Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[-2\,;2]$, alors f est convexe sur $[-2\,;2]$.

(d) Si $f''(a) = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion d'abscisse a.

(e) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + x^2 - 3x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Ex. 16 ★★☆ **Placer le point d'inflexion** — a est un réel. On pose $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

(a) Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$ en fonction de a, sous forme factorisée.

(b) Détermine a pour que $\mathcal{C}_f$ ait un point d'inflexion d'abscisse 1. Justifie le changement de signe.

(c) Pour cette valeur de a, étudie la convexité de f et donne les coordonnées du point d'inflexion.

(d) Donne une équation de la tangente T en ce point. Précise la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Ex. 17 ★★☆ **Le coût marginal de l'atelier Lumanis** — L'atelier Lumanis fabrique q centaines de lampes par jour, avec $q \in [0\,;10]$. Le coût total, en centaines d'euros, est $C(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 + 30q + 50$. $C'(q)$ est le coût marginal.

(a) Calcule $C'(q)$ et $C''(q)$. Étudie le signe de $C''(q)$ sur $[0\,;10]$.

(b) Déduis-en la convexité de C et les coordonnées du point d'inflexion.

(c) Démontre que $C'(q) > 0$ sur $[0\,;10]$. Que t'apprend ce résultat sur C ?

Ex. 17 **(suite)**

(d) À partir de quelle production le coût marginal augmente-t-il ? Quelle est sa valeur minimale ?

Ex. 18 ★★★ **Étude complète de la convexité de $(\ln x)^2$** — On pose $f(x) = (\ln x)^2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

(a) Donne l'ensemble de définition de f. Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$ sous forme factorisée.

(b) Étudie le signe de $f''(x)$, puis donne les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

(c) Démontre que $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion A. Donne ses coordonnées et une équation de la tangente T en A.

(d) Déduis-en la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $]0\,;\mathrm{e}]$, puis sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

(e) Léa affirme : « f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc f est convexe sur $[1\,;+\infty[$. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Encadrer $\ln(1{,}2)$ grâce à la concavité** — On pose $f(x) = \ln(2x+1)$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On donne $\ln 3 \approx 1{,}0986$.

(a) Donne l'intervalle I sur lequel f est définie. Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$, puis déduis-en la convexité de f sur I.

(b) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Démontre que $\ln(2x+1) \leqslant 2x$ pour tout x de I.

(c) Détermine une équation de la droite D qui passe par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses 0 et 1. Démontre que $\ln(2x+1) \geqslant x\ln 3$ pour tout x de $[0\,;1]$.

(d) Déduis-en un encadrement de $\ln(1{,}2)$. Donne ses bornes à 10^{-3} près.

(e) Paul utilise l'inégalité de la question 3 avec $x = 3$ et écrit : « $\ln 7 \geqslant 3\ln 3$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Les téléchargements de l'appli Zéphyr** — On modélise le nombre de téléchargements quotidiens de l'appli Zéphyr, en centaines, t semaines après son lancement, par $D(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ pour $t \in [0\,;20]$.

(a) Calcule $D'(t)$ sous forme factorisée. Dresse le tableau de variations de D sur $[0\,;20]$, avec des valeurs à 0,01 près.

(b) Calcule $D''(t)$ et factorise-la. Étudie la convexité de D et donne le point d'inflexion de sa courbe.

(c) Nora affirme : « Sur $[0\,;8]$, la courbe de D est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 2. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) À partir de quelle semaine la baisse des téléchargements ralentit-elle ? Justifie avec les variations de D', puis calcule $D'(8)$ et interprète.

3. Points d'inflexion

À retenir : $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion si f'' s'annule en a en changeant de signe. La courbe traverse alors sa tangente et f' a un extremum en a. Piège : pour x^6, $f''(0)=0$ sans changement de signe, donc pas d'inflexion.

Ex. 21 ★☆☆ **Chasse aux points d'inflexion** — Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$, calcule la dérivée seconde et étudie son signe. Donne ensuite les coordonnées des éventuels points d'inflexion de sa courbe.

(a) $f(x)=x^3+6x^2-2x+1$

(b) $g(x)=-2x^3+9x^2-5$

(c) $h(x)=x^4-6x^2+3$

(d) $k(x)=(x-3)^4+2x$

(e) $m(x)=x^2+\mathrm{e}^x$

(f) $q(x)=\mathrm{e}^{2x}-8x^2$

Ex. 22 ★☆☆ **Lire l'inflexion sur un tableau** — Pour chaque fonction, lis le tableau puis réponds à la question.

(a)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

Voici le signe de f'' sur $\mathbb{R}$, avec $f(-3)=5$. Donne la convexité de f et les coordonnées de son point d'inflexion.

(b)

x	0	2	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$+$

Voici le signe de g'' sur $[0\,;+\infty[$. La courbe de g a-t-elle un point d'inflexion ? Justifie.

(c)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

Voici les variations de h', avec $h(1)=4$. Donne la convexité de h, son point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point.

(d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	$\nearrow$	3	$\nearrow$

Voici les variations de k' sur $\mathbb{R}$. La courbe de k a-t-elle un point d'inflexion ? Justifie.

Ex. 23 ★★☆ **Vrai ou faux sur l'inflexion** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

(a) Si $f''(a)=0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse a.

(b) La courbe de toute fonction polynôme de degré 3 a exactement un point d'inflexion.

(c) La courbe de la fonction ln n'a aucun point d'inflexion sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 23 (suite)

(d) En un point d'inflexion, la tangente à la courbe est toujours horizontale.

(e) La fonction inverse $x\mapsto\frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$, donc sa courbe admet un point d'inflexion.

Ex. 24 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — Inès étudie $f(x)=x^4-8x^3+24x^2+1$ sur $\mathbb{R}$. Elle écrit : « $f''(2)=0$, donc le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion. »

(a) Calcule $f''(x)$ et factorise-la.

(b) Inès a-t-elle raison ? Justifie.

(c) Détermine l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

(d) Développe $(x-2)^4$, puis étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T. La courbe traverse-t-elle T ? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Régler un paramètre** — Pour un réel a, on pose $f(x)=x^3+ax^2+5x-2$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

(a) Exprime $f''(x)$ en fonction de a. Trouve a pour que $\mathcal{C}_f$ ait un point d'inflexion d'abscisse 2, en justifiant le changement de signe.

(b) Pour cette valeur de a, donne les coordonnées du point d'inflexion A. Justifie que c'est le seul.

(c) Détermine l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A.

(d) Sans calcul, justifie que $\mathcal{C}_f$ traverse T en A.

Ex. 26 ★★☆ **Les téléchargements de Zénito** — Zénito, une application de méditation, est sortie il y a 10 mois. Le nombre cumulé de téléchargements, en milliers, t mois après le lancement, est $N(t)=-t^3+15t^2+20t$ pour $t\in[0\,;10]$. $N'(t)$ mesure le rythme des téléchargements.

(a) Calcule $N'(t)$, puis $N''(t)$.

(b) Étudie la convexité de N sur $[0\,;10]$ et donne les coordonnées du point d'inflexion.

(c) Déduis-en le moment où le rythme des téléchargements est maximal, puis donne ce rythme.

(d) Interprète : sur quelle période les téléchargements accélèrent-ils ? Que se passe-t-il ensuite ?

Ex. 27 ★★☆ **Le carré du logarithme** — On considère $f(x)=(\ln x)^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

(a) Calcule $f'(x)$.

(b) Calcule $f''(x)$ et écris-la sous la forme d'un quotient factorisé.

(c) Étudie la convexité de f et donne les coordonnées du point d'inflexion A.

(d) Détermine l'équation de la tangente T en A, puis donne la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Ex. 28 ★★★ **Une inflexion sous la loupe** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

(a) Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$, sous forme factorisée.

(b) Étudie la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Justifie que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A et donne ses coordonnées.

(c) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A.

(d) Déduis-en la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T de part et d'autre de A. Que fait la courbe en A ?

(e) Justifie que f' admet un extremum en l'abscisse de A. Précise sa nature, puis déduis-en la plus petite valeur prise par f' sur $\mathbb{R}$.

Ex. 29 ★★★ **Une famille de fonctions de degré 4** — Pour un réel a, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = x^4 + ax^3 + 6x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_a$ sa courbe. On admet que, pour tout réel x, $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x+2)^3(x-1)$.

(a) Calcule $f_a''(x)$ en fonction de a.

(b) Dans cette question, $a = 5$. Étudie le signe de $f_5''(x)$, puis donne les coordonnées des points d'inflexion de $\mathcal{C}_5$.

(c) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_5$ au point d'abscisse -2, puis étudie la position de $\mathcal{C}_5$ par rapport à T sur $\mathbb{R}$.

(d) Dans cette question, $a = 4$. Le point de $\mathcal{C}_4$ d'abscisse -1 est-il un point d'inflexion ? Justifie.

(e) Détermine le nombre de points d'inflexion de $\mathcal{C}_a$ selon les valeurs de a.

Ex. 30 ★★★ **La grippe à Valmont** — Pendant une épidémie de grippe à Valmont, le nombre de nouveaux cas déclarés le jour t est modélisé par $N(t) = 100t\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, pour $t \in [0\,;\,40]$.

(a) Calcule $N'(t)$ puis $N''(t)$, sous forme factorisée.

(b) Étudie la convexité de N sur $[0\,;\,40]$. Donne les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe, avec l'ordonnée arrondie à l'unité.

(c) Lisa affirme : « Le pic de l'épidémie a lieu en $t = 5$, où la tangente est horizontale. C'est donc le point d'inflexion. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Justifie que N' admet un minimum en 10. Interprète ce résultat pour l'évolution de l'épidémie.

(e) Détermine une équation de la tangente T au point d'inflexion. En quel jour T coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Interprète.

4. *Position par rapport à une tangente : inégalités*

À retenir : Si $f'' \geqslant 0$ sur I, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes en tout $a \in I$, mais seulement sur I. Si $f'' \leqslant 0$ sur I, elle est en dessous. En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

Ex. 31 ★★☆ **Équations de tangentes sans erreur de signe** — Dans chaque cas, utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

(a) Donne une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3 - 2x$ au point d'abscisse $a = 1$.

(b) Donne une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \ln(3x-2)$ au point d'abscisse $a = 1$.

(c) La tangente à la courbe de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au point d'abscisse $a = -2$ passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifie.

(d) Pour $f(x) = x^2 - 5x$, Zoé affirme que la tangente en $a = 2$ a pour équation $y = -x - 8$. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Pour $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$, quelle particularité a la tangente au point d'abscisse $a = -1$? Donne son équation.

Ex. 32 ★★☆ **Lire la position sur un tableau de variations de f′** — f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f(1) = 3$. Voici le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

(a) Sur quel intervalle f est-elle convexe ? Sur quel intervalle est-elle concave ? Justifie.

(b) Donne une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(c) Précise la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $]-\infty\,;\,1]$, puis sur $[1\,;\,+\infty[$.

(d) Déduis-en un majorant de $f(0)$ et un minorant de $f(3)$.

(e) Tom affirme : « f est convexe sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 2 pour tout réel x. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 33 ★★☆ **Signe de f″ et position par rapport aux tangentes** — Soit $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

(a) Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$, et écris $f''(x)$ sous forme factorisée.

(b) Étudie le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Sur quel intervalle $\mathcal{C}_f$ est-elle au-dessus de toutes ses tangentes ?

(d) Justifie que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion et donne ses coordonnées.

(e) Donne une équation de la tangente T en 0, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $]-\infty\,;\,4]$.

Ex. 34 ★★☆ **Démontrer ln x ⩽ x − 1, puis encadrer un logarithme** — Soit $f(x) = \ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

(a) Calcule $f''(x)$ et déduis-en la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Donne une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(c) Déduis-en une inégalité vérifiée par $\ln x$ pour tout $x > 0$. Justifie.

Ex. 34 **(suite)**

(d) En remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans cette inégalité, démontre que $\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

(e) Déduis-en un encadrement de $\ln(1{,}03)$, avec une borne inférieure arrondie par défaut à 10^{-4}.

Ex. 35 ★★☆ **La copie de Malik : une tangente mal écrite** — Malik écrit : « Soit $f(x) = \mathrm{e}^{x-1}$. $f''(x) = \mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. Tangente en 1 : $y = f'(1)(x+1) + f(1) = x + 2$. Donc $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x + 2$ pour tout réel x. »

(a) Repère l'erreur de Malik et donne l'équation correcte de la tangente en 1.

(b) Avec une valeur de x bien choisie, montre que l'inégalité de Malik est fausse.

(c) Écris la conclusion correcte de Malik, puis déduis-en une minoration de e^{x} valable pour tout réel x.

(d) Sarah affirme : « La courbe de f est strictement au-dessus de sa tangente en 1 sur $\mathbb{R}$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) À l'aide de la conclusion correcte, donne un minorant de $\mathrm{e}^{-0{,}04}$.

Ex. 36 ★★☆ **Étudier l'écart g, et voir où l'inégalité tombe** — Soit $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = x^3 - 3x + 2$.

(a) Calcule $g'(x)$, étudie les variations de g sur $[0\,;+\infty[$ et déduis-en que $x^3 \geqslant 3x - 2$ pour tout $x \geqslant 0$.

(b) Démontre que la droite d'équation $y = 3x - 2$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(c) Calcule $g(-3)$. L'inégalité $x^3 \geqslant 3x - 2$ est-elle vraie pour tout réel x ? Justifie.

(d) Calcule $f''(x)$ et explique pourquoi la convexité ne permettait de conclure que sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 37 ★★☆ **Brasserie Houblonne : coût marginal et point d'inflexion** — La brasserie Houblonne produit q hectolitres de bière par semaine, avec $q \in [0\,;10]$. Le coût total, en centaines d'euros, est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 20$.

(a) Calcule $C'(q)$ et $C''(q)$, puis étudie la convexité de C sur $[0\,;10]$.

(b) Interprète ce résultat en termes de coût marginal $C'(q)$.

(c) Donne une équation de la tangente T à la courbe de C au point d'abscisse 4.

(d) Calcule la différence entre $C(q)$ et l'expression de T, et reconnais un cube. Déduis-en la position de la courbe par rapport à T. Que représente le point d'abscisse 4 ?

(e) Estime $C(4{,}5)$ avec T. Cette estimation est-elle inférieure ou supérieure à la valeur exacte ? Justifie.

Ex. 38 ★★★ **Une exponentielle au-dessus d'une droite, puis un encadrement** — Soit $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ définie sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

(a) Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$, et déduis-en la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

(c) Déduis-en une inégalité vérifiée par e^{2x-1} pour tout réel x. En posant $t = 2x - 1$, démontre que $\mathrm{e}^{t} \geqslant 1 + t$ pour tout réel t.

(d) Applique l'inégalité $\mathrm{e}^{t} \geqslant 1 + t$ à $t = -0{,}4$, puis à $t = 0{,}4$. Déduis-en un encadrement de $\mathrm{e}^{-0{,}4}$ d'amplitude inférieure à 0,12.

(e) Retrouve l'inégalité de la question 3 sans la convexité, en étudiant les variations de la différence g entre f et l'expression de T. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?

Ex. 39 ★★★ **Autour d'un point d'inflexion : où l'inégalité tient, où elle tombe** — Soit $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

(a) Calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$ sous forme factorisée. Étudie la convexité de f et donne les coordonnées de son point d'inflexion I.

(b) Détermine une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ en I. Justifie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_1 de part et d'autre de I.

(c) Détermine une équation de la tangente T_2 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Déduis-en une inégalité vérifiée par $f(x)$, en précisant l'intervalle où elle est garantie.

(d) Noah affirme : « L'inégalité de la question 3 est vraie pour tout réel x. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Application Sentier+ : téléchargements encadrés par tangentes et corde** — L'application de randonnée Sentier+ est lancée à $t = 0$. Le nombre de téléchargements, en milliers, t mois après le lancement, est $N(t) = 10\ln(2t+1)$ pour $t \in [0\,;+\infty[$. On note $\mathcal{C}_N$ sa courbe.

(a) Calcule $N'(t)$ et $N''(t)$, puis étudie la convexité de N sur $[0\,;+\infty[$. Interprète en termes de rythme des téléchargements.

(b) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}_N$ en 0. Déduis-en une inégalité vérifiée par $N(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

(c) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_N$ au point d'abscisse 2. Déduis-en un majorant de $N(2{,}5)$ au centième par excès, puis compare-le à $N(2{,}5)$.

(d) Sur $[a\,;b]$, la courbe d'une fonction concave est au-dessus de ses cordes. Donne une équation de la corde de $\mathcal{C}_N$ entre les abscisses 0 et 2.

Ex. 40 (suite)

(e) À l'aide des questions 3 et 4, encadre $N(1)$ (bornes au centième), puis compare avec la valeur de $N(1)$ arrondie au centième.

5. *Lire la convexité sur f, f' ou f'' et l'interpréter*

À retenir : f convexe $\Leftrightarrow$ f' croissante $\Leftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$. Point d'inflexion : f'' s'annule en changeant de signe, et f' y a un extremum. $f' > 0$ veut dire f croissante, pas f convexe. Exemple : $f''(x) = x - 1$ donne concave puis convexe, inflexion en 1.

Ex. 41 ★☆☆ **Une information, une conclusion** — Une fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour chaque information, dis ce que tu peux en déduire sur f (variations, convexité, point d'inflexion).

(a) On sait que f' est strictement croissante sur $[-2\,;\,4]$.

(b) On sait que $f'(x) > 0$ pour tout x de $[1\,;\,6]$.

(c) On sait que $f''(x) = (x-5)^2\,\mathrm{e}^x$ pour tout réel x.

(d) On sait que f' est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$, décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$, et que $f'(-1) = 7$.

(e) On sait que $f''(x) = 4 - 2x$ pour tout réel x.

(f) Sur $[0\,;\,8]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Ex. 42 ★☆☆ **Calculer f″ et lire la convexité** — Pour chaque fonction, calcule la dérivée seconde, puis donne le plus grand intervalle sur lequel la fonction est convexe.

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $h(x) = x\ln x - 3x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

(d) $k(x) = \mathrm{e}^{-2x+1} + x^2$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $m(x) = -x^4 + 6x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 43 ★☆☆ **Coût marginal et rendements** — La fabrique de lampes Lumio produit q centaines de lampes, $q \in [0\,;\,80]$. Son coût total C est deux fois dérivable. Voici le tableau de variations du coût marginal C' :

q	0	30	80
$C'(q)$	↘	14	↗

(a) Sur quel intervalle le coût total C est-il convexe ? Concave ?

(b) Que signifie, pour le coût d'une lampe supplémentaire, la convexité de C sur cet intervalle ?

(c) Donne l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de C.

(d) À l'aide du minimum de C', justifie que le coût total C est croissant sur $[0\,;\,80]$.

Ex. 43 (suite)

(e) Dans un autre atelier, la production $P(x)$ pour x heures de travail vérifie $P''(x) < 0$ sur $[0\,;\,40]$. Les rendements sont-ils croissants ou décroissants ? Justifie.

Ex. 44 ★★☆ **Trois tableaux à ne pas confondre** — Une fonction f est deux fois dérivable sur $[0\,;\,5]$. Tableau A : variations de f ; tableau B : variations de f' ; tableau C : signe de f''.

A :

x	0	3	5
f	↘	-27	↗

B :

x	0	1	5
f'	↘	-12	↗

C :

x	0	1	5
$f''(x)$	$-$	0	$+$

(a) Sur quel intervalle f est-elle convexe ? Justifie à l'aide de deux tableaux.

(b) Inès affirme : « $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion d'abscisse 3, car f change de sens de variation en 3. » Corrige son erreur.

(c) Donne le coefficient directeur de la tangente au point d'inflexion. f est-elle croissante ou décroissante en ce point ?

(d) Sur $[3\,;\,5]$, f est-elle croissante ? Convexe ? Indique à chaque fois le tableau utilisé.

Ex. 45 ★★☆ **Vrai ou faux sur un tableau de signe de f″** — Une fonction g est deux fois dérivable sur $[-4\,;\,5]$, et g'' ne s'annule qu'en 0 et en 3 :

x	-4		0		3		5
$g''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie.

(a) « g est concave sur $[-4\,;\,3]$. »

(b) « La courbe de g a deux points d'inflexion. »

(c) « g' admet un minimum en 3. »

(d) « On peut affirmer que g est croissante sur $[3\,;\,5]$. » (Pour un contre-exemple, pense à $x \mapsto \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{4} - 40x$.)

Ex. 46 ★★☆ **Téléchargements de l'application Bloomy** — Le nombre de téléchargements cumulés de l'application Bloomy, en milliers, t semaines après sa sortie, est $V(t) = 50 - (50 + 25t)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ pour $t \in [0\,;\,12]$.

(a) Calcule $V'(t)$ et justifie que V est croissante sur $[0\,;\,12]$.

(b) Calcule $V''(t)$, factorise-la et étudie son signe.

Ex. 46 **(suite)**

(c) Déduis-en la convexité de V et les coordonnées du point d'inflexion (ordonnée arrondie au centième).

(d) Mehdi affirme : « Après la semaine 2, les téléchargements diminuent. » Corrige-le et décris l'évolution des téléchargements.

Ex. 47 ★★☆ **Placer le point d'inflexion** — Soit a un réel et $f(x) = x^3 + ax^2 + 30x - 1$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

(a) Calcule $f''(x)$ en fonction de a.

(b) Détermine a pour que $\mathcal{C}_f$ ait un point d'inflexion d'abscisse 3.

(c) Avec cette valeur de a, détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'inflexion.

(d) Déduis-en, sans calcul, la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $]-\infty\,;\,3]$ et sur $[3\,;\,+\infty[$.

Ex. 48 ★★★ **Grippe à Montclar : accélération puis ralentissement** — Une épidémie de grippe touche la ville de Montclar. Le nombre total de cas, en dizaines, t jours après le premier signalement, est $N(t) = -t^3 + 18t^2 + 10$ pour $t \in [0\,;\,12]$. On note $\mathcal{C}_N$ sa courbe. $N'(t)$ est le nombre de nouveaux cas par jour, en dizaines.

(a) Calcule $N'(t)$, factorise-le, puis justifie que N est croissante sur $[0\,;\,12]$.

(b) Calcule $N''(t)$ et étudie son signe. Déduis-en la convexité de N et le point d'inflexion de $\mathcal{C}_N$.

(c) Léa affirme : « $N'(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,12]$, donc N est convexe : l'épidémie accélère pendant les 12 jours. » Explique son erreur et décris ce qui se passe vraiment.

(d) Déduis de la question 2 le jour où le nombre de nouveaux cas par jour est maximal, puis donne ce maximum en nombre de cas.

(e) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_N$ au point d'inflexion. Étudie la position de $\mathcal{C}_N$ par rapport à T (tu peux développer $(t-6)^3$).

Ex. 49 ★★★ **Du tableau de f′ aux trois lectures** — Une fonction f est deux fois dérivable sur $[-3\,;\,5]$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Voici le tableau de variations de f' :

x	-3	1	5
f'	$\nearrow$	27	$\searrow$

On sait aussi que $f'(-3) = f'(5) = -21$ et que f' ne s'annule qu'en -2 et en 4.

(a) Détermine le signe de $f'(x)$ sur $[-3\,;\,5]$, puis déduis-en les variations de f.

(b) Détermine sur quels intervalles f est convexe et concave, et l'abscisse du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. Justifie.

(c) Hugo affirme : « f est convexe sur $[-2\,;\,4]$ car f' y est positive. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 49 **(suite)**

(d) Sans calcul, donne le signe de $f''(x)$ sur $[-3\,;\,1]$ et sur $[1\,;\,5]$, ainsi que la valeur de $f''(1)$. Justifie.

(e) On admet que $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 5$. Calcule $f''(x)$ et retrouve les résultats des questions 2 et 4.

Ex. 50 ★★★ **Encadrer ln(1,2) grâce à la concavité** — Soit $h(x) = \ln(2x+1)$ sur $I = \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ et $\mathcal{C}_h$ sa courbe. On note $A(0\,;\,0)$ et $B\left(\frac{1}{2}\,;\,\ln 2\right)$, deux points de $\mathcal{C}_h$. On prendra $\ln 2 \approx 0{,}693$.

(a) Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$, puis étudie la convexité de h sur I.

(b) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_h$ en 0. Déduis-en une inégalité vraie pour tout x de I. Justifie.

(c) Détermine une équation de la droite (AB). Démontre que pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, $\ln(2x+1) \geqslant 2x\ln 2$.

(d) Déduis des questions 2 et 3 un encadrement de $\ln(1{,}2)$, et donne son amplitude.

(e) Vrai ou faux : « Pour tout x de I, $\ln(2x+1) \geqslant 2x\ln 2$. » Justifie.