Terminale spécialité et maths complémentaires / Convexité — corrigé

benprof particulier.fr

1. Convexe ou concave : cordes et tangentes

Ex. 1 ★☆☆ Les fonctions de référence

(a) La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-3\,;\,1]$, qui est inclus dans $\mathbb{R}$: elle y est convexe.

(b) La fonction racine carrée est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

(c) La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,;\,0[$, et non convexe.

(d) Ni l'un ni l'autre : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. La fonction inverse est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;\,0[$. On ne dit pas « convexe sur $\mathbb{R}^*$ ».

(e) Ni l'un ni l'autre : la fonction cube est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

(f) $[1\,;\,5]$ est inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, où la fonction cube est convexe : elle est donc convexe sur $[1\,;\,5]$.

(g) Les deux : c'est une fonction affine. Sa droite est confondue avec ses cordes et ses tangentes.

(h) La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Ex. 2 ★☆☆ Tangente et position

(a) $f'(x)=\mathrm{e}^x$, donc $f(2)=f'(2)=\mathrm{e}^2$. $T : y=\mathrm{e}^2(x-2)+\mathrm{e}^2$, soit $y=\mathrm{e}^2x-\mathrm{e}^2$. Comme f est convexe, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T.

(b) $f'(x)=\frac{1}{x}$, donc $f'(\mathrm{e}^2)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ et $f(\mathrm{e}^2)=2$. $T : y=\frac{1}{\mathrm{e}^2}(x-\mathrm{e}^2)+2$, soit $y=\frac{x}{\mathrm{e}^2}+1$. Comme f est concave, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T.

(c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(9)=\frac{1}{6}$ et $f(9)=3$.
$T : y=\frac{1}{6}(x-9)+3$, soit $y=\frac{x}{6}+\frac{3}{2}$. Comme f est concave, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T.

(d) $f'(x)=2x-4$, donc $f'(3)=2$ et $f(3)=-3$.
$T : y=2(x-3)-3$, soit $y=2x-9$. Comme f est convexe, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T.

(e) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, donc $f'(-1)=-1$ et $f(-1)=-1$.
$T : y=-(x+1)-1$, soit $y=-x-2$. Comme f est concave sur $]-\infty\,;\,0[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T sur cet intervalle.

Ex. 3 ★★☆ Le test du point milieu

(a) $m=-2$ et $f(-2)=-8$; $\frac{f(-4)+f(0)}{2}=\frac{-64+0}{2}=-32$. On a $f(m)>-32$: le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse m est au-dessus de la corde.
Donc f n'est pas convexe sur $[-4\,;\,0]$.

(b) $m=10$ et $f(10)=\sqrt{10}\approx 3{,}16$; $\frac{f(4)+f(16)}{2}=\frac{2+4}{2}=3$. Le point d'abscisse m est au-dessus de la corde : f n'est pas convexe sur $[4\,;\,16]$.

(c) $m=1$ et $f(1)=\mathrm{e}\approx 2{,}72$; $\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}\approx 4{,}19$. Le point d'abscisse m est au-dessous de la corde. C'est compatible avec la convexité, mais cela ne la prouve pas.

(d) $m=\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}\approx 4{,}19$ et $f(m)\approx 1{,}43$; $\frac{0+2}{2}=1$. Le point d'abscisse m est au-dessus de la corde : f n'est pas convexe sur $[1\,;\,\mathrm{e}^2]$.

(e) $m=1$ et $f(1)=1$; $\frac{f(-1)+f(3)}{2}=\frac{-1+27}{2}=13$. Le point d'abscisse m est au-dessous de la corde, mais un seul point ne prouve rien. D'ailleurs, f n'est pas convexe sur $[-1\,;\,3]$: la fonction cube est concave sur $[-1\,;\,0]$.

Ex. 4 ★★☆ Vrai ou faux sur la convexité

(a) Faux. $f(x)=x^3$ est croissante. Sa tangente en -1 est $y=3(x+1)-1=3x+2$. Or $x^3-(3x+2)=(x+1)^2(x-2)\leqslant 0$ pour $x\leqslant 0$: la courbe est au-dessous d'une tangente.
Donc f n'est pas convexe sur $]-\infty\,;\,0]$.

(b) Faux. Soit $g(x)=(x-3)^2$. On a $g'(x)=2x-6$ et $g''(x)=2>0$, donc g est convexe sur $\mathbb{R}$. Pourtant $g'(x)<0$ sur $]-\infty\,;\,3[$: g y est décroissante, donc g n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Faux. Prends $A\left(-2\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2}\,;\,-2\right)$. La pente de (AB) vaut -1, donc $(AB) : y=-x-\frac{5}{2}$. En $x=-1$, la courbe vaut -1 et la corde vaut $-\frac{3}{2}$. La courbe est au-dessus de la corde : la fonction n'est pas convexe sur $]-\infty\,;\,0[$, donc pas sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

(d) Vrai. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente en 0 a pour équation $y=\mathrm{e}^0(x-0)+\mathrm{e}^0$, soit $y=x+1$. Une fonction convexe a sa courbe au-dessus de ses tangentes, donc $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$ pour tout réel x.

Ex. 4 **(suite)**

(e) Faux, c'est l'inverse. $\sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,4]$. La corde entre $(0\,;\,0)$ et $(4\,;\,2)$ a pour équation $y = \frac{x}{2}$. En $x = 1$: $\sqrt{1} = 1 > \frac{1}{2}$. La courbe est au-dessus de cette corde.

Ex. 5 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(4) = \frac{1}{4}$ et $f(4) = 2$. $T : y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 = \frac{x}{4} + 1$. L'équation de T est correcte.

(b) Pour $x = 0$: $\sqrt{0} = 0$ et $\frac{0}{4} + 1 = 1$. Or $0 < 1$: l'inégalité d'Inès est fausse.

(c) Première erreur : la fonction racine carrée est concave, pas convexe. Deuxième erreur : une fonction concave a sa courbe au-dessous de ses tangentes. L'inégalité correcte est donc $\sqrt{x} \leqslant \frac{x}{4} + 1$ pour tout $x \geqslant 0$.

(d) $\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{4} = \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{4} = \frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x}$. Un carré est positif, donc $\frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x} \geqslant 0$, soit $\sqrt{x} \leqslant \frac{x}{4} + 1$.

(e) Avec $x = 5$: $\sqrt{5} \leqslant \frac{5}{4} + 1 = 2{,}25$. La calculatrice donne $\sqrt{5} \approx 2{,}236$: le majorant est proche, car 5 est proche de 4.

Ex. 6 ★★☆ **Lire les variations de f'**

(a) f' est décroissante sur $[-3\,;\,1]$, donc f y est concave. f' est croissante sur $[1\,;\,5]$, donc f y est convexe.

(b) Les abscisses 2 et 4 sont dans $[1\,;\,5]$, où f est convexe. Entre A et B, $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessous de la corde $[AB]$.

(c) $T : y = 1 \times (x + 1) + 3$, soit $y = x + 4$. f est concave sur $[-3\,;\,1]$, qui contient -1 et 0, donc $\mathcal{C}_f$ y est au-dessous de T. D'où $f(0) \leqslant 0 + 4 = 4$.

(d) Non. La décroissance de f' donne la concavité de f, pas son sens de variation. Ici f' est décroissante sur $[-3\,;\,-1]$ et $f'(-1) = 1$, donc $f'(x) \geqslant 1 > 0$ sur $[-3\,;\,-1]$. Ainsi f est croissante sur $[-3\,;\,-1]$: elle n'est donc pas décroissante sur $[-3\,;\,1]$.

Ex. 7 ★★☆ **Les téléchargements de Pixelia**

(a) $N'(t) = \frac{30}{t+1}$. Quand t augmente, $t + 1$ augmente, donc N' est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
Donc N y est concave.

(b) $N(0) = 0$ et $N'(0) = 30$, donc la tangente est $y = 30(t - 0) + 0 = 30t$. N est concave, donc sa courbe est au-dessous de cette tangente : $N(t) \leqslant 30t$ pour $t \geqslant 0$.

(c) $4 = \frac{1+7}{2}$. N est concave, donc entre les points d'abscisses 1 et 7 sa courbe est au-dessus de la corde. Au milieu, cela donne $N(4) \geqslant \frac{N(1)+N(7)}{2}$. Vérification : $N(4) = 30\ln 5 \approx 48{,}28$ et $\frac{30\ln 2 + 30\ln 8}{2} \approx 41{,}59$.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Non. $N' > 0$, donc le nombre de téléchargements augmente. Mais N' est décroissante (N est concave) : chaque mois apporte de moins en moins de nouveaux téléchargements. La croissance ralentit, elle n'accélère pas.

Ex. 8 ★★★ **Comparer π^{e} et e^{π}**

(a) $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$, donc $f''(x) < 0$. Comme f'' est négative sur $]0\,;\,+\infty[$, f est concave sur cet intervalle.

(b) $f(\mathrm{e}) = 1$ et $f'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$, donc $T : y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$, soit $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$. f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de chacune de ses tangentes. On en déduit que pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$.

(c) Avec $x = \pi$: $\ln \pi \leqslant \frac{\pi}{\mathrm{e}}$, donc $\mathrm{e}\ln\pi \leqslant \pi$ (car $\mathrm{e} > 0$), soit $\ln(\pi^{\mathrm{e}}) \leqslant \pi$. La fonction exponentielle est croissante, donc $\pi^{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{\pi}$. Vérification : $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22{,}46$ et $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}14$.

(d) Le coefficient directeur de (AB) vaut $\frac{1-0}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$, donc $(AB) : y = \frac{x-1}{\mathrm{e}-1}$. f est concave, donc entre A et B la courbe est au-dessus de la corde $[AB]$: pour $x \in [1\,;\,\mathrm{e}]$, $\ln x \geqslant \frac{x-1}{\mathrm{e}-1}$. Or $2 \in [1\,;\,\mathrm{e}]$, donc $\ln 2 \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0{,}58$.

(e) Faux. On a $\ln 4 \approx 1{,}39$ et $\frac{3}{\mathrm{e}-1} \approx 1{,}75$, donc $\ln 4 < \frac{3}{\mathrm{e}-1}$. La comparaison avec la corde ne vaut qu'entre A et B, et $4 \notin [1\,;\,\mathrm{e}]$. En dehors de $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la courbe d'une fonction concave passe au-dessous de la droite (AB).

Ex. 9 ★★★ **Une cubique et ses tangentes**

(a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.
Donc $f''(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,1]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$.
Ainsi f est concave sur $]-\infty\,;\,1]$ et convexe sur $[1\,;\,+\infty[$. Elle n'est donc ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}$: la convexité s'étudie sur un intervalle.

(b) $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$, donc $T : y = -3(x - 1) + 0$, soit $y = -3x + 3$.

(c) $f(x) - (-3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$.
Cette différence est négative sur $]-\infty\,;\,1]$ et positive sur $[1\,;\,+\infty[$.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T pour $x \leqslant 1$ et au-dessus pour $x \geqslant 1$: la courbe traverse sa tangente. Comme f'' s'annule en 1 en changeant de signe, le point $(1\,;\,0)$ est un point d'inflexion.

(d) $f(3) = 27 - 27 + 2 = 2$ et $f'(3) = 27 - 18 = 9$, donc $T' : y = 9(x - 3) + 2$, soit $y = 9x - 25$. f est convexe sur $[1\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente T'. Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, $x^3 - 3x^2 + 2 \geqslant 9x - 25$.

Ex. 9 (suite)

(e) Faux. $f(-4) = -64 - 48 + 2 = -110$ et $9 \times (-4) - 25 = -61$. Comme $-110 < -61$, la courbe est au-dessous de T' en $x = -4$. L'inégalité ne vaut que sur l'intervalle où f est convexe, pas sur $\mathbb{R}$.

Ex. 10 ★★★ **Le coût moyen de la verrerie Lumen**

(a) $C'(q) = 10 \times 0{,}2\,\mathrm{e}^{0,2q} = 2\mathrm{e}^{0,2q}$ et $C''(q) = 0{,}4\,\mathrm{e}^{0,2q}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $C''(q) > 0$ et C est convexe sur $[0\,;\,20]$. Ainsi C' est croissante : le coût marginal augmente avec la production.

(b) $C(10) = 10\mathrm{e}^2 \approx 73{,}89$ et $\frac{C(5)+C(15)}{2} = 5(\mathrm{e} + \mathrm{e}^3) \approx 114{,}02$. Comme C est convexe, sa courbe est au-dessous de la corde entre les points d'abscisses 5 et 15. En 10, milieu de ces deux abscisses, on a donc $C(10) \leqslant \frac{C(5)+C(15)}{2}$. Produire 10 t chaque jour coûte $2 \times 73{,}89 = 147{,}78$ milliers d'euros, contre 228,04 milliers d'euros pour 5 t puis 15 t. Il vaut donc mieux produire régulièrement.

(c) La tangente en a a pour équation $y = 2\mathrm{e}^{0,2a}(q - a) + 10\mathrm{e}^{0,2a}$. Elle passe par l'origine si et seulement si $-2a\,\mathrm{e}^{0,2a} + 10\mathrm{e}^{0,2a} = 0$, soit $\mathrm{e}^{0,2a}(10 - 2a) = 0$. Comme $\mathrm{e}^{0,2a} > 0$, on obtient $a = 5$. La tangente est alors $y = 2\mathrm{e}\,q$.

(d) C est convexe, donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 5 : pour tout $q \in [0\,;\,20]$, $C(q) \geqslant 2\mathrm{e}\,q$. Pour $q > 0$, on divise par q : $\frac{C(q)}{q} \geqslant 2\mathrm{e}$, avec égalité pour $q = 5$, car $\frac{C(5)}{5} = \frac{10\mathrm{e}}{5} = 2\mathrm{e}$. Le coût moyen minimal vaut donc $2\mathrm{e} \approx 5{,}437$ milliers d'euros, soit environ 5 437 € par tonne. Il est atteint pour une production de 5 t par jour.

2. *Dérivée seconde et convexité*

Ex. 11 ★☆☆ **Calculer des dérivées secondes**

(a) $f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 1$ et $f''(x) = 24x^2 - 30x = 6x(4x - 5)$.

(b) Avec $(\mathrm{e}^{ax+b})' = a\mathrm{e}^{ax+b}$: $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-2}$ et $f''(x) = 9\mathrm{e}^{3x-2}$ (facteur $3^2 = 9$).

(c) Produit : $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 2x\mathrm{e}^{-2x} = (1 - 2x)\mathrm{e}^{-2x}$. Puis $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} - 2(1 - 2x)\mathrm{e}^{-2x} = (4x - 4)\mathrm{e}^{-2x} = 4(x - 1)\mathrm{e}^{-2x}$.

(d) $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$ et $f''(x) = \frac{1}{x}$.

(e) $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ et $f''(x) = \frac{-3\times(-2)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{6}{(x-2)^3}$.

(f) Avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $u = 3 - x$: $f'(x) = \frac{-1}{3-x}$. Avec $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$: $f''(x) = -1 \times \frac{-(-1)}{(3-x)^2} = \frac{-1}{(3-x)^2}$.

Ex. 12 ★★☆ **Du signe de f″ à la convexité**

(a) $f''(x) = (x + 3)\mathrm{e}^x$ a le signe de $x + 3$ car $\mathrm{e}^x > 0$. f est concave sur $]-\infty\,;\,-3]$ et convexe sur $[-3\,;\,+\infty[$.

(b) Un carré est positif, donc $f''(x) \leqslant 0$ pour tout x : f est concave sur $\mathbb{R}$.

(c) $f''(x) = (x - 2)(x - 5)$ est un trinôme avec $a = 1 > 0$, positif à l'extérieur des racines. f est convexe sur $]-\infty\,;\,2]$ et sur $[5\,;\,+\infty[$, concave sur $[2\,;\,5]$.

(d) $3\mathrm{e}^{2x} - 3 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{2x} \geqslant 1 = \mathrm{e}^0 \iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$, car exp est strictement croissante. f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

(e) $f''(x) = 2x(x - 2)(x + 2)$. Tableau de signes : $-$ sur $]-\infty\,;\,-2[$, $+$ sur $]-2\,;\,0[$, $-$ sur $]0\,;\,2[$, $+$ sur $]2\,;\,+\infty[$. f est concave sur $]-\infty\,;\,-2]$ et sur $[0\,;\,2]$, convexe sur $[-2\,;\,0]$ et sur $[2\,;\,+\infty[$.

(f) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $\ln x + 2$. Or $\ln x + 2 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -2 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-2}$. f est concave sur $]0\,;\,\mathrm{e}^{-2}]$ et convexe sur $[\mathrm{e}^{-2}\,;\,+\infty[$.

Ex. 13 ★★☆ **Lire la convexité sur les variations de f′**

(a) f' est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et sur $[3\,;\,+\infty[$, donc f est convexe sur chacun de ces intervalles.

(b) f' est décroissante sur $[-1\,;\,3]$, donc f est concave sur $[-1\,;\,3]$.

(c) f' change de sens en -1 et en 3, donc f'' s'annule en changeant de signe : points d'inflexion d'abscisses -1 et 3.

(d) $0 \in [-1\,;\,3]$ où f' est décroissante, donc $f''(0) \leqslant 0$.

(e) Non. $f' > 0$ donne seulement f croissante sur $\mathbb{R}$. La convexité dépend du sens de variation de f' : f est concave sur $[-1\,;\,3]$.

(f) $5 \in [3\,;\,+\infty[$ où f est convexe : sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 5.

Ex. 14 ★★☆ **Corriger la copie de Hugo**

(a) $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = 2x - 1$ et $v = \mathrm{e}^{-x}$: $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - (2x - 1)\mathrm{e}^{-x} = (3 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$. Le calcul de Hugo est juste.

(b) Hugo a dérivé seulement le facteur $3 - 2x$. Or f' est un produit : $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x} - (3 - 2x)\mathrm{e}^{-x} = (2x - 5)\mathrm{e}^{-x}$.

(c) Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $2x - 5$. f est concave sur $]-\infty\,;\,2{,}5]$ et convexe sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$. f'' s'annule en changeant de signe en 2,5 et $f(2{,}5) = 4\mathrm{e}^{-2,5}$: le point d'inflexion est $(2{,}5\,;\,4\mathrm{e}^{-2,5})$.

Ex. 14 **(suite)**

(d) Le sens de variation de f vient du signe de f', la convexité du signe de f''. Ici f est croissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$, mais elle y est concave, car $]-\infty\,;1{,}5]\subset]-\infty\,;2{,}5]$.

Ex. 15 ★★☆ **Vrai ou faux sur la convexité**

(a) Faux. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ vérifie $f''(x)=\mathrm{e}^{-x}>0$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. Pourtant $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}<0$: f est décroissante.

(b) Vrai. f'' est la dérivée de f'. Si elle est positive sur I, alors f' est croissante sur I.

(c) Faux. $f(x)=4-x^2$ est positive sur $[-2\,;2]$, mais $f''(x)=-2<0$: f est concave.

(d) Faux. Pour $f(x)=x^4$, $f''(x)=12x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe : f est convexe sur $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas de point d'inflexion.

(e) Vrai. $f''(x)=4\mathrm{e}^{2x}+2>0$ pour tout x, donc la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$.

Ex. 16 ★★☆ **Placer le point d'inflexion**

(a) $f'(x)=\mathrm{e}^x+(x+a)\mathrm{e}^x=(x+a+1)\mathrm{e}^x$ et $f''(x)=\mathrm{e}^x+(x+a+1)\mathrm{e}^x=(x+a+2)\mathrm{e}^x$.

(b) $\mathrm{e}^x>0$, donc $f''(x)$ a le signe de $x+a+2$, qui s'annule en changeant de signe en $x=-a-2$. Il faut $-a-2=1$, soit $a=-3$.

(c) Pour $a=-3$, $f''(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$. f est concave sur $]-\infty\,;1]$ et convexe sur $[1\,;+\infty[$. $f(1)=-2\mathrm{e}$: le point d'inflexion est $(1\,;-2\mathrm{e})$.

(d) $f'(1)=(1-3+1)\mathrm{e}=-\mathrm{e}$, d'où $T : y=-\mathrm{e}(x-1)-2\mathrm{e}=-\mathrm{e}x-\mathrm{e}$. $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T sur $]-\infty\,;1]$ (concave) et au-dessus sur $[1\,;+\infty[$ (convexe) : la courbe traverse sa tangente.

Ex. 17 ★★☆ **Le coût marginal de l'atelier Lumanis**

(a) $C'(q)=1{,}5q^2-12q+30$ et $C''(q)=3q-12=3(q-4)$. Donc $C''(q)\leqslant 0$ sur $[0\,;4]$ et $C''(q)\geqslant 0$ sur $[4\,;10]$.

(b) C est concave sur $[0\,;4]$ et convexe sur $[4\,;10]$. C'' s'annule en changeant de signe en 4 et $C(4)=32-96+120+50=106$: le point d'inflexion est $(4\,;106)$.

(c) $\Delta=(-12)^2-4\times 1{,}5\times 30=-36<0$ et $1{,}5>0$, donc $C'(q)>0$: C est croissante sur $[0\,;10]$. Cela concerne les variations de C, pas sa convexité.

Ex. 17 **(suite)**

(d) C' est décroissante sur $[0\,;4]$ puis croissante sur $[4\,;10]$ (signe de C''). Le coût marginal augmente à partir de 400 lampes. Son minimum est $C'(4)=6$, soit 600 euros par centaine de lampes.

Ex. 18 ★★★ **Étude complète de la convexité de $(\ln x)^2$**

(a) $\ln x$ existe pour $x>0$: f est définie et deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Avec $(u^2)'=2u'u$: $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x=\frac{2\ln x}{x}$. Avec la dérivée d'un quotient : $f''(x)=\frac{2\times\frac{1}{x}\times x-2\ln x\times 1}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$.

(b) Comme $x^2>0$, $f''(x)$ a le signe de $1-\ln x$. Or $1-\ln x\geqslant 0\iff\ln x\leqslant 1\iff x\leqslant \mathrm{e}$.

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−

Conclusion : f est convexe sur $]0\,;\mathrm{e}]$ et concave sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

(c) f'' s'annule en e en changeant de signe, donc $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion A d'abscisse e. On a $f(\mathrm{e})=(\ln\mathrm{e})^2=1$, donc $A(\mathrm{e}\,;1)$. Ensuite $f'(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}$. $T : y=\frac{2}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+1$, soit $y=\frac{2}{\mathrm{e}}x-1$.

(d) Sur $]0\,;\mathrm{e}]$, f est convexe : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, donc au-dessus de T. Sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, f est concave : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T. La courbe traverse sa tangente en A.

(e) Non. Sur $[1\,;+\infty[$, $\ln x\geqslant 0$ et $x>0$, donc $f'(x)\geqslant 0$: f est bien croissante. Mais le signe de f' donne les variations, pas la convexité. D'après la question 2, $f''(x)<0$ sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$: f est concave sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$. Elle n'est donc pas convexe sur $[1\,;+\infty[$.

Ex. 19 ★★★ **Encadrer ln(1,2) grâce à la concavité**

(a) $\ln(2x+1)$ existe si $2x+1>0$, soit $x>-\frac{1}{2}$: $I=\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$ et $f''(x)=-\frac{2\times 2}{(2x+1)^2}=-\frac{4}{(2x+1)^2}$ (attention au facteur $2^2=4$). Comme $(2x+1)^2>0$, $f''(x)<0$ sur I : f est concave sur I.

(b) $f(0)=\ln 1=0$ et $f'(0)=2$. $T : y=2(x-0)+0$, soit $y=2x$. f est concave sur I, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses tangentes, en particulier de T. Donc, pour tout x de I, $\ln(2x+1)\leqslant 2x$.

(c) Les points sont $(0\,;0)$ et $(1\,;\ln 3)$. Le coefficient directeur vaut $\frac{\ln 3-0}{1-0}=\ln 3$: $D : y=x\ln 3$. f est concave, donc sur $[0\,;1]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa corde D. Donc $\ln(2x+1)\geqslant x\ln 3$ pour tout x de $[0\,;1]$.

Ex. 19 **(suite)**

(d) Avec $x = 0{,}1$, qui est dans $[0\,;\,1]$:
$0{,}1\ln 3 \leqslant \ln(1{,}2) \leqslant 0{,}2$. Or $0{,}1\ln 3 \approx 0{,}1099$.
Donc $0{,}109 \leqslant \ln(1{,}2) \leqslant 0{,}200$. (Valeur réelle :
$\ln(1{,}2) \approx 0{,}182$.)

(e) Non. L'inégalité de la question 3 n'est démontrée que sur $[0\,;\,1]$: la courbe n'est au-dessus de sa corde qu'entre les deux points. Or $3 \notin [0\,;\,1]$. D'ailleurs $3\ln 3 = \ln 27$ et $\ln 7 < \ln 27$ car ln est strictement croissante.
Donc $\ln 7 < 3\ln 3$: l'affirmation de Paul est fausse.

Ex. 20 ★★★ **Les téléchargements de l'appli Zéphyr**

(a) D est deux fois dérivable sur $[0\,;\,20]$. Avec $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\mathrm{e}^{-0{,}25t})' = -0{,}25\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$: $D'(t) = 5\mathrm{e}^{-0{,}25t} - 1{,}25t\,\mathrm{e}^{-0{,}25t} = 5(1 - 0{,}25t)\mathrm{e}^{-0{,}25t}$. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}25t} > 0$, $D'(t)$ a le signe de $1 - 0{,}25t$: positif sur $[0\,;\,4]$, négatif sur $[4\,;\,20]$. $D(0) = 0$, $D(4) = 20\mathrm{e}^{-1} \approx 7{,}36$, $D(20) = 100\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}67$.

t	0	4	20
$D(t)$	0 ↗	7,36	↘ 0,67

Le pic est atteint à 4 semaines, avec environ 736 téléchargements par jour.

(b) $D''(t) = 5\left[-0{,}25\,\mathrm{e}^{-0{,}25t} - 0{,}25(1 - 0{,}25t)\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right] = 5(0{,}0625t - 0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}25t} = \frac{5}{16}(t - 8)\mathrm{e}^{-0{,}25t}$. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}25t} > 0$, $D''(t)$ a le signe de $t - 8$.

t	0	8	20
$D''(t)$	−	0	+

D est concave sur $[0\,;\,8]$ et convexe sur $[8\,;\,20]$. D'' s'annule en 8 en changeant de signe : le point d'inflexion est $(8\,;\,40\mathrm{e}^{-2})$, avec $40\mathrm{e}^{-2} \approx 5{,}41$.

(c) Non. D'après la question 2, D est concave sur $[0\,;\,8]$ et $2 \in [0\,;\,8]$. Sur cet intervalle, la courbe d'une fonction concave est en dessous de ses tangentes. Elle est donc en dessous de sa tangente au point d'abscisse 2, pas au-dessus.

(d) D'après la question 2, D est concave puis convexe : D' est décroissante sur $[0\,;\,8]$ et croissante sur $[8\,;\,20]$. Sur $[4\,;\,20]$, $D'(t) \leqslant 0$: les téléchargements baissent. La vitesse de baisse est maximale quand D' est minimale, c'est-à-dire en $t = 8$. Ensuite D' augmente vers 0 : la baisse ralentit à partir de la 8e semaine. $D'(8) = 5(1 - 2)\mathrm{e}^{-2} = -5\mathrm{e}^{-2} \approx -0{,}68$: à la 8e semaine, on perd environ 68 téléchargements quotidiens par semaine.

3. *Points d'inflexion*

Ex. 21 ★☆☆ **Chasse aux points d'inflexion**

(a) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 2$ et $f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2)$. f'' est négative sur $]-\infty\,;-2[$ et positive sur $]-2\,;+\infty[$: elle s'annule en changeant de signe en -2. Comme $f(-2) = -8 + 24 + 4 + 1 = 21$, le point d'inflexion est $A(-2\,;21)$.

(b) $g'(x) = -6x^2 + 18x$ et $g''(x) = -12x + 18 = -6(2x - 3)$. g'' est positive avant 1,5 et négative après : elle change de signe en 1,5. $g(1{,}5) = -6{,}75 + 20{,}25 - 5 = 8{,}5$, donc le point d'inflexion est $A(1{,}5\,;8{,}5)$.

(c) $h'(x) = 4x^3 - 12x$ et $h''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$. h'' est positive sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]1\,;+\infty[$, négative sur $]-1\,;1[$. Elle change de signe en -1 et en 1. Comme $h(-1) = h(1) = 1 - 6 + 3 = -2$, il y a deux points d'inflexion : $(-1\,;-2)$ et $(1\,;-2)$.

(d) $k'(x) = 4(x - 3)^3 + 2$ et $k''(x) = 12(x - 3)^2 \geqslant 0$. k'' s'annule en 3 mais sans changer de signe. k est donc convexe sur $\mathbb{R}$ et sa courbe n'a aucun point d'inflexion.

(e) $m'(x) = 2x + \mathrm{e}^x$ et $m''(x) = 2 + \mathrm{e}^x > 0$. m'' ne s'annule jamais. m est donc convexe sur $\mathbb{R}$ et sa courbe n'a aucun point d'inflexion.

(f) $q'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 16x$ et $q''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - 16 = 4(\mathrm{e}^{2x} - 4)$. Or $\mathrm{e}^{2x} > 4 \iff 2x > \ln 4 \iff x > \ln 2$. q'' est donc négative avant $\ln 2$ et positive après. $q(\ln 2) = \mathrm{e}^{2\ln 2} - 8(\ln 2)^2 = 4 - 8(\ln 2)^2$. Le point d'inflexion est $A(\ln 2\,;4 - 8(\ln 2)^2)$, soit environ $(0{,}693\,;0{,}156)$.

Ex. 22 ★☆☆ **Lire l'inflexion sur un tableau**

(a) $f'' \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-3]$ et $f'' \leqslant 0$ sur $[-3\,;+\infty[$. f est donc convexe sur $]-\infty\,;-3]$ et concave sur $[-3\,;+\infty[$. f'' s'annule en changeant de signe en -3, donc le point d'inflexion est $A(-3\,;5)$.

(b) Non. g'' s'annule en 2 mais reste positive des deux côtés : elle ne change pas de signe. g est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$ et sa courbe n'a aucun point d'inflexion.

(c) h' est décroissante sur $]-\infty\,;1]$, donc h y est concave. h' est croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc h y est convexe. La convexité change en 1 : le point d'inflexion est $(1\,;4)$. La tangente a pour équation $y = h'(1)(x - 1) + h(1) = -2(x - 1) + 4$, soit $y = -2x + 6$.

(d) Non. k' est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc k est convexe sur $\mathbb{R}$. La convexité ne change jamais : aucun point d'inflexion. La valeur 3 est seulement $k'(0)$, ce n'est pas un extremum.

Ex. 23 ★★☆ **Vrai ou faux sur l'inflexion**

(a) Faux. Prenons $f(x) = (x-5)^4$ et $a = 5$: $f'(x) = 4(x-5)^3$ et $f''(x) = 12(x-5)^2$. On a bien $f''(5) = 0$, mais $f'' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$: f'' ne change pas de signe. f est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_f$ n'a pas de point d'inflexion d'abscisse 5.

(b) Vrai. Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$. Alors $f''(x) = 6ax + 2b$ est affine, de coefficient $6a \neq 0$. Elle s'annule une seule fois, en $-\frac{b}{3a}$, en changeant de signe. Il y a donc exactement un point d'inflexion.

(c) Vrai. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0\,;+\infty[$. La dérivée seconde ne s'annule jamais : ln est concave et sa courbe n'a aucun point d'inflexion.

(d) Faux. Prenons $f(x) = x^3 + x$: $f''(x) = 6x$ change de signe en 0, donc $O(0\,;0)$ est un point d'inflexion. Or $f'(0) = 1$: la tangente $y = x$ n'est pas horizontale.

(e) Faux. Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. f'' change bien de signe de part et d'autre de 0, mais elle ne s'annule jamais. De plus, 0 n'est pas dans l'ensemble de définition : la courbe n'a aucun point d'abscisse 0. Elle n'a donc aucun point d'inflexion.

Ex. 24 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x$ et $f''(x) = 12x^2 - 48x + 48 = 12(x^2 - 4x + 4) = 12(x-2)^2$.

(b) Non. $f''(x) = 12(x-2)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$: f'' s'annule en 2 sans changer de signe. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$. Elle ne change pas de convexité en 2, et le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 n'est pas un point d'inflexion.

(c) $f(2) = 16 - 64 + 96 + 1 = 49$ et $f'(2) = 32 - 96 + 96 = 32$.
Donc $T : y = 32(x-2) + 49$, soit $y = 32x - 15$.

(d) $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. Or $f(x) - (32x - 15) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x-2)^4 \geqslant 0$. $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus de T des deux côtés de 2 : elle ne traverse pas T, ce qui confirme qu'il n'y a pas d'inflexion.

Ex. 25 ★★☆ **Régler un paramètre**

(a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 5$ et $f''(x) = 6x + 2a$. Il faut $f''(2) = 12 + 2a = 0$, soit $a = -6$. Alors $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$ est négative avant 2 et positive après : elle change bien de signe. La courbe a donc un point d'inflexion d'abscisse 2 pour $a = -6$.

Ex. 25 **(suite)**

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 2$ et $f(2) = 8 - 24 + 10 - 2 = -8$, donc $A(2\,;-8)$. f'' est affine et non constante : elle ne s'annule qu'en 2. C'est donc le seul point d'inflexion.

(c) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$, donc $f'(2) = 12 - 24 + 5 = -7$. $T : y = -7(x-2) - 8$, soit $y = -7x + 6$.

(d) f est concave sur $]-\infty\,;2]$: sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est sous sa tangente T. f est convexe sur $[2\,;+\infty[$: sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T. La courbe traverse donc T en A.

Ex. 26 ★★☆ **Les téléchargements de Zénito**

(a) $N'(t) = -3t^2 + 30t + 20$ et $N''(t) = -6t + 30 = -6(t-5)$.

(b) $N''(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;5]$ et $N''(t) \leqslant 0$ sur $[5\,;10]$. N est donc convexe sur $[0\,;5]$ et concave sur $[5\,;10]$. N'' s'annule en changeant de signe en 5. Comme $N(5) = -125 + 375 + 100 = 350$, le point d'inflexion est $(5\,;350)$.

(c) N' est croissante sur $[0\,;5]$ et décroissante sur $[5\,;10]$: elle admet un maximum en 5. $N'(5) = -75 + 150 + 20 = 95$. Le rythme est maximal au bout de 5 mois : 95 milliers de téléchargements par mois.

(d) Sur $[0\,;5]$, N est convexe : le rythme N' augmente, les téléchargements accélèrent. Sur $[5\,;10]$, N est concave : la croissance ralentit. N' est croissante puis décroissante sur $[0\,;10]$, donc son minimum est atteint en 0 ou en 10. Or $N'(0) = N'(10) = 20 > 0$: les téléchargements continuent donc d'augmenter.

Ex. 27 ★★☆ **Le carré du logarithme**

(a) $f = u^2$ avec $u(x) = \ln x$, donc $f' = 2u'u$ et $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$.

(b) On dérive le quotient : $f''(x) = \frac{\frac{2}{x}\times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$.

(c) $x^2 > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $1 - \ln x$. Or $1 - \ln x > 0 \iff x < \mathrm{e}$. f est donc convexe sur $]0\,;\mathrm{e}]$ et concave sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$. f'' s'annule en changeant de signe en e. Comme $f(\mathrm{e}) = 1$, le point d'inflexion est $A(\mathrm{e}\,;1)$.

(d) $f'(\mathrm{e}) = \frac{2}{\mathrm{e}}$, donc $T : y = \frac{2}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$, soit $y = \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1$. Sur $]0\,;\mathrm{e}]$, f est convexe et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T. Sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, f est concave et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T. La courbe traverse donc sa tangente en A.

Ex. 28 ★★★ **Une inflexion sous la loupe**

(a) f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-1)\mathrm{e}^x = (2x+1)\mathrm{e}^x$. De même, $f''(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x+1)\mathrm{e}^x = (2x+3)\mathrm{e}^x$.

(b) Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $2x+3$: $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-\frac{3}{2}[$ et $f''(x) > 0$ sur $]-\frac{3}{2}\,;+\infty[$.
Donc f est concave sur $]-\infty\,;-\frac{3}{2}]$ et convexe sur $[-\frac{3}{2}\,;+\infty[$. f'' ne s'annule qu'en $-\frac{3}{2}$ et y change de signe : c'est l'unique point d'inflexion. Son ordonnée est $f(-\frac{3}{2}) = (-3-1)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = -4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.
Donc $A(-\frac{3}{2}\,;-4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$, avec $-4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx -0{,}89$.

(c) $f'(-\frac{3}{2}) = (-3+1)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$. On a donc $T : y = -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right) - 4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$, soit $T : y = -\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}(2x+7)$.

(d) Sur $[-\frac{3}{2}\,;+\infty[$, f est convexe, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de T. Sur $]-\infty\,;-\frac{3}{2}]$, f est concave, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T. La courbe passe d'en dessous à au-dessus : elle traverse sa tangente en A, ce qui caractérise un point d'inflexion.

(e) f'' est la dérivée de f'. Elle est négative puis positive, donc f' est décroissante sur $]-\infty\,;-\frac{3}{2}]$ puis croissante sur $[-\frac{3}{2}\,;+\infty[$. f' admet donc un minimum en $-\frac{3}{2}$. Ce minimum vaut $f'(-\frac{3}{2}) = -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx -0{,}45$: c'est la plus petite valeur prise par f' sur $\mathbb{R}$.

Ex. 29 ★★★ **Une famille de fonctions de degré 4**

(a) $f_a'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 12x$, donc $f_a''(x) = 12x^2 + 6ax + 12 = 6(2x^2 + ax + 2)$.

(b) $f_5''(x) = 6(2x^2+5x+2) = 6(2x+1)(x+2)$. Ce trinôme a pour racines -2 et $-\frac{1}{2}$. Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. f_5'' s'annule donc en changeant de signe en -2 et en $-\frac{1}{2}$. On calcule $f_5(-2) = 16 - 40 + 24 + 1 = 1$ et $f_5(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} - \frac{10}{16} + \frac{24}{16} + \frac{16}{16} = \frac{31}{16}$. Les points d'inflexion sont $(-2\,;1)$ et $(-\frac{1}{2}\,;\frac{31}{16})$.

(c) $f_5'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 12x$, donc $f_5'(-2) = -32 + 60 - 24 = 4$. Avec $f_5(-2) = 1$, on obtient $T : y = 4(x+2) + 1$, soit $y = 4x + 9$. Alors $f_5(x) - (4x+9) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x+2)^3(x-1)$. Or $(x+2)^3$ a le signe de $x+2$. Cette différence est donc positive sur $]-\infty\,;-2[$, négative sur $]-2\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$. $\mathcal{C}_5$ est au-dessus de T sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[1\,;+\infty[$, en dessous sur $[-2\,;1]$. Elle traverse donc T au point d'inflexion $(-2\,;1)$, puis la recoupe en $(1\,;13)$.

Ex. 29 **(suite)**

(d) $f_4''(x) = 6(2x^2+4x+2) = 12(x+1)^2$. On a bien $f_4''(-1) = 0$, mais $f_4''(x) \geqslant 0$ pour tout réel x : f_4'' ne change pas de signe en -1. f_4 est donc convexe sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_4$ reste au-dessus de toutes ses tangentes. Le point d'abscisse -1 n'est pas un point d'inflexion.

(e) $f_a''(x)$ a le signe de $2x^2 + ax + 2$, dont le discriminant vaut $\Delta = a^2 - 16$. Si $-4 < a < 4$, alors $\Delta < 0$ et $f_a'' > 0$: f_a est convexe sur $\mathbb{R}$, sans point d'inflexion. Si $a = 4$ ou $a = -4$, alors $\Delta = 0$: f_a'' s'annule une fois sans changer de signe, donc il n'y a aucun point d'inflexion. Si $a < -4$ ou $a > 4$, alors $\Delta > 0$: f_a'' s'annule en changeant de signe en deux réels distincts, donc $\mathcal{C}_a$ a deux points d'inflexion.

Ex. 30 ★★★ **La grippe à Valmont**

(a) $N'(t) = 100\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 100t \times (-0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}2t} = (100 - 20t)\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Puis $N''(t) = -20\mathrm{e}^{-0{,}2t} - 0{,}2(100 - 20t)\mathrm{e}^{-0{,}2t} = (4t - 40)\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 4(t-10)\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

(b) Comme $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$, $N''(t)$ a le signe de $t - 10$: $N'' < 0$ sur $[0\,;10[$ et $N'' > 0$ sur $]10\,;40]$.
Donc N est concave sur $[0\,;10]$ et convexe sur $[10\,;40]$. N'' s'annule en changeant de signe en 10, et $N(10) = 1000\mathrm{e}^{-2} \approx 135$. Le point d'inflexion est $(10\,;1000\mathrm{e}^{-2})$, soit environ $(10\,;135)$.

(c) Lisa a tort. On a bien $N'(5) = 0$, donc la tangente est horizontale en $t = 5$. Mais $N''(5) = -20\mathrm{e}^{-1} < 0$: N'' ne s'annule pas en 5, et N y est concave. Une tangente horizontale ne suffit pas : il faut que N'' s'annule en changeant de signe. D'après la question précédente, le seul point d'inflexion est d'abscisse 10.

(d) N'' est la dérivée de N'. Elle est négative sur $[0\,;10]$ puis positive sur $[10\,;40]$, donc N' décroît puis croît : elle admet un minimum en 10, qui vaut $N'(10) = -100\mathrm{e}^{-2} \approx -13{,}5$. Interprétation : après le pic, le nombre de nouveaux cas diminue. C'est le jour 10 qu'il baisse le plus vite, d'environ 13,5 cas par jour.

(e) $T : y = N'(10)(t-10) + N(10) = -100\mathrm{e}^{-2}(t-10) + 1000\mathrm{e}^{-2}$, soit $y = \mathrm{e}^{-2}(2000 - 100t)$. On a $y = 0$ pour $2000 - 100t = 0$, soit $t = 20$. Interprétation : si la baisse gardait le rythme maximal du jour 10, il n'y aurait plus de nouveaux cas au jour 20. Comme N est convexe sur $[10\,;40]$, la courbe reste au-dessus de T : en réalité, la baisse ralentit et il reste des cas, puisque $N(20) = 2000\mathrm{e}^{-4} \approx 37$.

4. Position par rapport à une tangente : inégalités

Ex. 31 ★☆☆ **Équations de tangentes sans erreur de signe**

(a) $f'(x) = 3x^2 - 2$, donc $f'(1) = 1$, et $f(1) = -1$. Tangente : $y = 1 \times (x-1) - 1$, soit $y = x - 2$.

(b) $f'(x) = \frac{3}{3x-2}$, donc $f'(1) = 3$, et $f(1) = \ln 1 = 0$. Tangente : $y = 3(x-1) + 0$, soit $y = 3x - 3$.

(c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(-2) = -\frac{1}{4}$, et $f(-2) = -\frac{1}{2}$. Tangente : $y = -\frac{1}{4}(x-(-2)) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2}$, soit $y = -\frac{x}{4} - 1$. Pour $x = 0$, on obtient $y = -1 \neq 0$: la tangente ne passe pas par l'origine.

(d) $f'(x) = 2x - 5$, donc $f'(2) = -1$, et $f(2) = 4 - 10 = -6$. Tangente : $y = -1 \times (x-2) - 6$, soit $y = -x - 4$. Zoé a tort : elle a écrit $x + 2$ au lieu de $x - 2$, ce qui donne $-(x+2) - 6 = -x - 8$.

(e) $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$, donc $f'(-1) = 0$, et $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1}$. La tangente est horizontale, d'équation $y = -\mathrm{e}^{-1}$.

Ex. 32 ★☆☆ **Lire la position sur un tableau de variations de f′**

(a) f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$, donc f y est concave. f' est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, donc f y est convexe.

(b) $f'(1) = -2$ et $f(1) = 3$. $T : y = -2(x-1) + 3$, soit $y = -2x + 5$.

(c) f est concave sur $]-\infty\,;\,1]$ et 1 appartient à cet intervalle : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T. f est convexe sur $[1\,;\,+\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T. La courbe traverse sa tangente : $A(1\,;\,3)$ est un point d'inflexion.

(d) Pour $x \leqslant 1$, on a $f(x) \leqslant -2x + 5$, donc $f(0) \leqslant 5$. Pour $x \geqslant 1$, on a $f(x) \geqslant -2x + 5$, donc $f(3) \geqslant -1$.

(e) Non. La propriété ne vaut que sur l'intervalle de convexité : on peut seulement conclure que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 2 sur $[1\,;\,+\infty[$. Sur $]-\infty\,;\,1]$, f est concave : rien ne garantit la position.

Ex. 33 ★☆☆ **Signe de f″ et position par rapport aux tangentes**

(a) $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, puis $f''(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

(b) $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $x - 4$: $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,4[$, $f''(4) = 0$ et $f''(x) > 0$ sur $]4\,;\,+\infty[$.

(c) $f'' \geqslant 0$ sur $[4\,;\,+\infty[$, donc f y est convexe : sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Ex. 33 (suite)

(d) f'' s'annule en 4 en changeant de signe, donc $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion d'abscisse 4. Comme $f(4) = 4\mathrm{e}^{-2}$, c'est le point $(4\,;\,4\mathrm{e}^{-2})$.

(e) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc $T : y = x$. f est concave sur $]-\infty\,;\,4]$ et 0 appartient à cet intervalle : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T, donc $x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \leqslant x$ pour $x \leqslant 4$.

Ex. 34 ★★☆ **Démontrer ln x ⩽ x − 1, puis encadrer un logarithme**

(a) $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Pour $x > 0$, $f''(x) < 0$, donc f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

(b) $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$. Tangente : $y = 1 \times (x-1) + 0$, soit $y = x - 1$.

(c) f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$, donc sa courbe est en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, en particulier de celle en 1, qui appartient à l'intervalle. Donc, pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

(d) Si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$, donc $\ln \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x} - 1$, soit $-\ln x \leqslant \frac{1}{x} - 1$. En multipliant par -1, on obtient $\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$.

(e) Avec $x = 1{,}03$: $1 - \frac{1}{1{,}03} \leqslant \ln(1{,}03) \leqslant 0{,}03$. Comme $1 - \frac{1}{1{,}03} \approx 0{,}029126$, on obtient $0{,}0291 \leqslant \ln(1{,}03) \leqslant 0{,}03$ (en réalité $\ln(1{,}03) \approx 0{,}0296$).

Ex. 35 ★★☆ **La copie de Malik : une tangente mal écrite**

(a) La formule est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$: avec $a = 1$, il faut $x - 1$ et non $x + 1$. On a $f'(1) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f(1) = 1$, donc $y = (x-1) + 1$, soit $y = x$.

(b) Pour $x = 1$: $\mathrm{e}^0 = 1$ et $1 + 2 = 3$. Or $1 < 3$, donc l'inégalité $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x + 2$ est fausse.

(c) f est convexe sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 1 : pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x$. Comme $\mathrm{e} > 0$, en multipliant par e : $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} \times x$.

(d) Sarah a tort. En $x = 1$, $f(1) = \mathrm{e}^0 = 1$ et la tangente $y = x$ vaut aussi 1 : la courbe touche sa tangente en ce point. Elle est au-dessus au sens large seulement : $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x$, avec égalité en 1.

(e) Avec $x = 0{,}96$ dans $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x$: $\mathrm{e}^{-0{,}04} \geqslant 0{,}96$ (en réalité, $\mathrm{e}^{-0{,}04} \approx 0{,}9608$).

Ex. 36 ★★☆ **Étudier l'écart g, et voir où l'inégalité tombe**

(a) $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Sur $[0\,;+\infty[$, $x+1>0$, donc $g'(x)$ a le signe de $x-1$: g est décroissante sur $[0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$. Son minimum vaut $g(1)=0$, donc $g(x)\geqslant 0$, c'est-à-dire $x^3 \geqslant 3x-2$ pour $x\geqslant 0$.

(b) $f'(x)=3x^2$, donc $f'(1)=3$, et $f(1)=1$. Tangente : $y=3(x-1)+1=3x-2$.

(c) $g(-3)=-27+9+2=-16<0$, donc $(-3)^3 < 3\times(-3)-2$: l'inégalité est fausse sur $\mathbb{R}$. On a d'ailleurs $g(x)=(x-1)^2(x+2)$: elle ne vaut que pour $x\geqslant -2$.

(d) $f''(x)=6x$, qui est positive seulement sur $[0\,;+\infty[$. f est convexe sur cet intervalle et concave sur $]-\infty\,;0]$: la propriété « courbe au-dessus de ses tangentes » ne s'applique que sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 37 ★★☆ **Brasserie Houblonne : coût marginal et point d'inflexion**

(a) $C'(q)=3q^2-24q+60$ et $C''(q)=6q-24=6(q-4)$. $C''(q)\leqslant 0$ sur $[0\,;4]$ et $C''(q)\geqslant 0$ sur $[4\,;10]$: C est concave sur $[0\,;4]$ et convexe sur $[4\,;10]$.

(b) Le coût marginal C' décroît sur $[0\,;4]$ (rendements croissants), puis croît sur $[4\,;10]$: au-delà de 4 hectolitres, chaque hectolitre supplémentaire coûte de plus en plus cher.

(c) $C(4)=64-192+240+20=132$ et $C'(4)=48-96+60=12$. $T : y=12(q-4)+132$, soit $y=12q+84$.

(d) $C(q)-(12q+84)=q^3-12q^2+48q-64=(q-4)^3$. C'est négatif sur $[0\,;4[$ et positif sur $]4\,;10]$: la courbe est en dessous de T, puis au-dessus. Elle traverse sa tangente : le point $(4\,;132)$ est un point d'inflexion.

(e) $12\times 4{,}5+84=138$, soit environ 13 800 €. Comme $4{,}5>4$, la courbe est au-dessus de T : l'estimation est inférieure à la valeur exacte. En effet, $C(4{,}5)=138{,}125$.

Ex. 38 ★★★ **Une exponentielle au-dessus d'une droite, puis un encadrement**

(a) $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x-1}$ et $f''(x)=4\mathrm{e}^{2x-1}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $f''(x)>0$ pour tout réel x : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) $f\left(\frac12\right)=\mathrm{e}^0=1$ et $f'\left(\frac12\right)=2\mathrm{e}^0=2$. On obtient $T : y=2\left(x-\frac12\right)+1$, soit $y=2x$.

Ex. 38 (suite)

(c) f est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de T : pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x-1}\geqslant 2x$. Soit t un réel. On pose $x=\frac{t+1}{2}$, de sorte que $2x-1=t$ et $2x=t+1$. On obtient $\mathrm{e}^t\geqslant 1+t$ pour tout réel t.

(d) Avec $t=-0{,}4$: $\mathrm{e}^{-0{,}4}\geqslant 0{,}6$. Avec $t=0{,}4$: $\mathrm{e}^{0{,}4}\geqslant 1{,}4>0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\mathrm{e}^{-0{,}4}=\frac{1}{\mathrm{e}^{0{,}4}}\leqslant\frac{1}{1{,}4}=\frac57$. Ainsi $0{,}6\leqslant \mathrm{e}^{-0{,}4}\leqslant\frac57\approx 0{,}714$. L'amplitude vaut $\frac57-0{,}6\approx 0{,}114<0{,}12$ (en réalité, $\mathrm{e}^{-0{,}4}\approx 0{,}670$).

(e) $g'(x)=2\mathrm{e}^{2x-1}-2=2\left(\mathrm{e}^{2x-1}-1\right)$. Or $\mathrm{e}^{2x-1}\geqslant 1 \iff 2x-1\geqslant 0 \iff x\geqslant\frac12$.
Donc g est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac12\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac12\,;+\infty\right[$. Elle admet un minimum en $\frac12$, qui vaut $g\left(\frac12\right)=1-1=0$.
Donc $g(x)\geqslant 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{2x-1}\geqslant 2x$ pour tout réel x. L'égalité n'a lieu que pour $x=\frac12$.

Ex. 39 ★★★ **Autour d'un point d'inflexion : où l'inégalité tient, où elle tombe**

(a) $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x+1)\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}$, puis $f''(x)=-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=(x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$, $f''(x)$ a le signe de $x-1$.
Donc f est concave sur $]-\infty\,;1]$ et convexe sur $[1\,;+\infty[$. f'' s'annule en 1 en changeant de signe : le point $I\left(1\,;\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$ est le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

(b) $f(1)=2\mathrm{e}^{-1}$ et $f'(1)=-\mathrm{e}^{-1}$, d'où $T_1 : y=-\frac{1}{\mathrm{e}}(x-1)+\frac{2}{\mathrm{e}}$, soit $y=\frac{3-x}{\mathrm{e}}$. Sur $]-\infty\,;1]$, f est concave et 1 appartient à cet intervalle : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T_1. Sur $[1\,;+\infty[$, f est convexe : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_1. La courbe traverse donc sa tangente en I.

(c) $f(2)=3\mathrm{e}^{-2}$ et $f'(2)=-2\mathrm{e}^{-2}$, d'où $T_2 : y=-2\mathrm{e}^{-2}(x-2)+3\mathrm{e}^{-2}$, soit $y=\mathrm{e}^{-2}(7-2x)$. Comme $2\in[1\,;+\infty[$ et que f est convexe sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ y est au-dessus de T_2. Donc, pour tout $x\geqslant 1$, $(x+1)\mathrm{e}^{-x}\geqslant \mathrm{e}^{-2}(7-2x)$.

(d) Noah a tort. Pour $x=-1$: $f(-1)=0$, alors que $\mathrm{e}^{-2}(7+2)=9\mathrm{e}^{-2}\approx 1{,}22$. On a $0<9\mathrm{e}^{-2}$, donc l'inégalité est fausse en -1. La propriété ne vaut que sur l'intervalle de convexité $[1\,;+\infty[$. Or f est concave sur $]-\infty\,;1]$.

Ex. 40 ★★★ **Application Sentier+ : téléchargements encadrés par tangentes et corde**

(a) $N'(t) = 10 \times \frac{2}{2t+1} = \frac{20}{2t+1}$ et $N''(t) = -\frac{40}{(2t+1)^2}$. Pour $t \geqslant 0$, $(2t+1)^2 > 0$, donc $N''(t) < 0$: N est concave sur $[0\,;+\infty[$. Ainsi N' est décroissante : les téléchargements augmentent toujours, mais de moins en moins vite (rendements décroissants).

(b) $N(0) = 10\ln 1 = 0$ et $N'(0) = 20$, d'où la tangente $y = 20(t-0)+0$, soit $y = 20t$. N est concave sur $[0\,;+\infty[$ et 0 appartient à cet intervalle, donc $\mathcal{C}_N$ est en dessous de cette tangente : pour tout $t \geqslant 0$, $N(t) \leqslant 20t$.

(c) $N(2) = 10\ln 5$ et $N'(2) = \frac{20}{5} = 4$, d'où $T : y = 4(t-2) + 10\ln 5$, soit $y = 4t - 8 + 10\ln 5$. N est concave sur $[0\,;+\infty[$, donc $\mathcal{C}_N$ est en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, en particulier de T. Pour $t = 2{,}5$: $N(2{,}5) \leqslant 2 + 10\ln 5 \approx 18{,}094$, d'où le majorant 18,10. En réalité, $N(2{,}5) = 10\ln 6 \approx 17{,}92$: on a environ 17 920 téléchargements.

(d) La corde joint les points $(0\,;0)$ et $(2\,;10\ln 5)$. Son coefficient directeur vaut $\frac{10\ln 5 - 0}{2-0} = 5\ln 5$. Elle est donc portée par la droite d'équation $y = 5\ln 5 \times t$. Comme N est concave sur $[0\,;2]$, pour tout $t \in [0\,;2]$, $N(t) \geqslant 5\ln 5 \times t$.

(e) $1 \in [0\,;2]$. La corde donne $N(1) \geqslant 5\ln 5 \approx 8{,}047$ et la tangente T donne $N(1) \leqslant 4 - 8 + 10\ln 5 \approx 12{,}094$. On arrondit la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès : $8{,}04 \leqslant N(1) \leqslant 12{,}10$. En réalité, $N(1) = 10\ln 3 \approx 10{,}99$, qui est bien dans l'encadrement.

5. *Lire la convexité sur f, f′ ou f″ et l'interpréter*

Ex. 41 ★☆☆ **Une information, une conclusion**

(a) f' est croissante sur $[-2\,;4]$, donc f est convexe sur $[-2\,;4]$. Cette information ne donne pas les variations de f.

(b) $f' > 0$ sur $[1\,;6]$, donc f est strictement croissante sur $[1\,;6]$. On ne peut rien dire de la convexité : il faudrait connaître le sens de variation de f'.

(c) $(x-5)^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f''(x) \geqslant 0$: f est convexe sur $\mathbb{R}$. f'' s'annule en 5 sans changer de signe : il n'y a pas de point d'inflexion.

Ex. 41 (suite)

(d) f' est croissante sur $]-\infty\,;-1]$ puis décroissante sur $[-1\,;+\infty[$: f est convexe puis concave. $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion d'abscisse -1, où la tangente a pour coefficient directeur $f'(-1) = 7$.

(e) $4 - 2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$: f est convexe sur $]-\infty\,;2]$ et concave sur $[2\,;+\infty[$. f'' s'annule en 2 en changeant de signe : point d'inflexion d'abscisse 2.

(f) Une courbe située au-dessus de toutes ses tangentes est celle d'une fonction convexe : f est convexe sur $[0\,;8]$.

Ex. 42 ★★☆ **Calculer f″ et lire la convexité**

(a) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 4$, $f''(x) = 12x - 18$. $f''(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{3}{2}$: f est convexe sur $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

(b) $g'(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$, $g''(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, g'' a le signe de $x+3$: g est convexe sur $[-3\,;+\infty[$.

(c) $h'(x) = \ln x + 1 - 3 = \ln x - 2$, $h''(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$: h est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $k'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+1} + 2x$, $k''(x) = 4\mathrm{e}^{-2x+1} + 2 > 0$: k est convexe sur $\mathbb{R}$.

(e) $m'(x) = -4x^3 + 12x$, $m''(x) = -12x^2 + 12 = 12(1-x)(1+x)$. Ce polynôme du second degré est positif entre ses racines : m est convexe sur $[-1\,;1]$.

Ex. 43 ★★☆ **Coût marginal et rendements**

(a) C' est croissante sur $[30\,;80]$, donc C y est convexe. C' est décroissante sur $[0\,;30]$, donc C y est concave.

(b) Au-delà de 3 000 lampes, le coût marginal augmente : chaque lampe supplémentaire coûte de plus en plus cher à produire.

(c) C' change de sens de variation en 30, où elle atteint son minimum : la courbe de C a un point d'inflexion d'abscisse 30.

(d) Le minimum de C' sur $[0\,;80]$ est $14 > 0$, donc $C'(q) > 0$ pour tout q : C est strictement croissante sur $[0\,;80]$.

(e) $P'' < 0$, donc P' est décroissante : chaque heure supplémentaire rapporte de moins en moins. P est concave : les rendements sont décroissants.

Ex. 44 ★★☆ **Trois tableaux à ne pas confondre**

(a) D'après B, f' est croissante sur $[1\,;5]$. D'après C, $f'' \geqslant 0$ sur $[1\,;5]$.
Donc f est convexe sur $[1\,;5]$, et concave sur $[0\,;1]$.

Ex. 44 (suite)

(b) En 3, c'est f qui a un minimum : cela ne concerne pas la convexité. Le point d'inflexion se lit sur B ou C : f' a un minimum en 1 et f'' s'annule en 1 en changeant de signe. L'abscisse du point d'inflexion est donc 1.

(c) Le coefficient directeur vaut $f'(1) = -12$ (tableau B). Comme $f'(1) < 0$, f est décroissante en ce point, ce que confirme le tableau A (f décroît sur $[0\,;\,3]$).

(d) Tableau A : f est croissante sur $[3\,;\,5]$. Tableau B : f' est croissante sur $[1\,;\,5]$, qui contient $[3\,;\,5]$, donc f est aussi convexe sur $[3\,;\,5]$.

Ex. 45 ★★☆ Vrai ou faux sur un tableau de signe de f″

(a) Vrai. $g''(x) \leqslant 0$ sur $[-4\,;\,3]$, donc g est concave sur cet intervalle.

(b) Faux. En 0, g'' s'annule sans changer de signe : ce n'est pas un point d'inflexion. Il n'y en a qu'un, d'abscisse 3.

(c) Vrai. $g'' \leqslant 0$ sur $[-4\,;\,3]$ puis $g'' \geqslant 0$ sur $[3\,;\,5]$: g' est décroissante puis croissante, donc elle a un minimum en 3.

(d) Faux. Le signe de g'' donne la convexité, pas le signe de g'. Contre-exemple : pour $g(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{4} - 40x$, on a $g'(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 40$ et $g''(x) = x^2(x-3)$, qui a bien le tableau donné. g' est croissante sur $[3\,;\,5]$ et $g'(5) = -8{,}75$, donc $g' < 0$ sur $[3\,;\,5]$: cette g est décroissante sur $[3\,;\,5]$.

Ex. 46 ★★☆ Téléchargements de l'application Bloomy

(a) $V'(t) = -25\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}5(50+25t)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 12{,}5t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Sur $[0\,;\,12]$, $t \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$, donc $V'(t) \geqslant 0$: V est croissante.

(b) $V''(t) = 12{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 6{,}25t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 6{,}25(2-t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Elle a le signe de $2-t$: positive sur $[0\,;\,2]$, négative sur $[2\,;\,12]$.

(c) V est convexe sur $[0\,;\,2]$ et concave sur $[2\,;\,12]$. V'' s'annule en 2 en changeant de signe : point d'inflexion de coordonnées $(2\,;\,50 - 100\mathrm{e}^{-1})$, soit environ $(2\,;\,13{,}21)$.

(d) Mehdi confond « concave » et « décroissante ». V reste croissante après la semaine 2 : les téléchargements augmentent toujours. Comme V est concave, cette croissance ralentit. Jusqu'à la semaine 2, elle accélère (convexe).

Ex. 47 ★★☆ Placer le point d'inflexion

(a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 30$ et $f''(x) = 6x + 2a$.

(b) f'' est affine, de coefficient $6 \neq 0$: elle change de signe là où elle s'annule. Il faut $f''(3) = 0$, soit $18 + 2a = 0$, donc $a = -9$.

(c) Avec $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x - 1$: $f(3) = 27 - 81 + 90 - 1 = 35$ et $f'(3) = 27 - 54 + 30 = 3$.
$T : y = 3(x-3) + 35$, soit $y = 3x + 26$.

(d) $f''(x) = 6x - 18$: f est concave sur $]-\infty\,;\,3]$, donc $\mathcal{C}_f$ est sous T. f est convexe sur $[3\,;\,+\infty[$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T. La courbe traverse sa tangente au point d'inflexion. (Contrôle : $f(x) - (3x+26) = (x-3)^3$.)

Ex. 48 ★★★ Grippe à Montclar : accélération puis ralentissement

(a) $N'(t) = -3t^2 + 36t = 3t(12-t)$. Sur $[0\,;\,12]$, $3t \geqslant 0$ et $12 - t \geqslant 0$, donc $N'(t) \geqslant 0$. N est donc croissante sur $[0\,;\,12]$.

(b) $N''(t) = -6t + 36 = 6(6-t)$. On a $N''(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,6]$ et $N''(t) \leqslant 0$ sur $[6\,;\,12]$.
Donc N est convexe sur $[0\,;\,6]$ et concave sur $[6\,;\,12]$.
N'' s'annule en 6 en changeant de signe, et $N(6) = -216 + 648 + 10 = 442$: $\mathcal{C}_N$ a un point d'inflexion $I(6\,;\,442)$.

(c) Léa confond le signe de N' et son sens de variation. $N' \geqslant 0$ veut dire que N est croissante : le nombre total de cas augmente. La convexité, elle, se lit sur les variations de N' (ou le signe de N''). L'épidémie accélère jusqu'au jour 6 (N convexe). Ensuite elle progresse encore mais ralentit (N croissante et concave).

(d) N'' est positive sur $[0\,;\,6]$ puis négative sur $[6\,;\,12]$, donc N' est croissante puis décroissante : elle atteint son maximum en $t = 6$. $N'(6) = 3 \times 6 \times 6 = 108$ dizaines. Le nombre de nouveaux cas est maximal le jour 6 : 1 080 cas par jour. C'est l'abscisse du point d'inflexion.

(e) $T : y = N'(6)(t-6) + N(6) = 108(t-6) + 442$, soit $y = 108t - 206$. On calcule $N(t) - (108t - 206) = -t^3 + 18t^2 - 108t + 216 = -(t-6)^3$. Sur $[0\,;\,6]$, cette différence est $\geqslant 0$: $\mathcal{C}_N$ est au-dessus de T. Sur $[6\,;\,12]$, elle est $\leqslant 0$: $\mathcal{C}_N$ est au-dessous de T. La courbe traverse sa tangente en I.

Ex. 49 ★★★ **Du tableau de f′ aux trois lectures**

(a) Sur $[-3\,;\,1]$, f' est strictement croissante et $f'(-2)=0$. Donc $f'(x)<0$ sur $[-3\,;\,-2[$ et $f'(x)>0$ sur $]-2\,;\,1]$. Sur $[1\,;\,5]$, f' est strictement décroissante et $f'(4)=0$. Donc $f'(x)>0$ sur $[1\,;\,4[$ et $f'(x)<0$ sur $]4\,;\,5]$. Conclusion : f est décroissante sur $[-3\,;\,-2]$, croissante sur $[-2\,;\,4]$ et décroissante sur $[4\,;\,5]$.

(b) f' est croissante sur $[-3\,;\,1]$, donc f est convexe sur $[-3\,;\,1]$. f' est décroissante sur $[1\,;\,5]$, donc f est concave sur $[1\,;\,5]$. La convexité change en 1, où f' atteint son maximum : $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion d'abscisse 1.

(c) Faux. $f'\geqslant 0$ sur $[-2\,;\,4]$ prouve seulement que f est croissante sur cet intervalle. Sur $[1\,;\,4]$, f' est décroissante, donc f y est concave et pas convexe.

(d) f' est croissante sur $[-3\,;\,1]$, donc $f''(x)\geqslant 0$ sur cet intervalle. f' est décroissante sur $[1\,;\,5]$, donc $f''(x)\leqslant 0$ sur cet intervalle. f' est dérivable et admet un maximum en 1, à l'intérieur de l'intervalle, donc $f''(1)=0$.

(e) $f'(x)=-3x^2+6x+24$ et $f''(x)=-6x+6=6(1-x)$. $f''(x)\geqslant 0$ sur $[-3\,;\,1]$ et $f''(x)\leqslant 0$ sur $[1\,;\,5]$: c'est le signe trouvé à la question 4, et $f''(1)=0$. f'' s'annule en 1 en changeant de signe, donc f est convexe sur $[-3\,;\,1]$, concave sur $[1\,;\,5]$, et $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion d'abscisse 1 : on retrouve la question 2.

Ex. 50 ★★★ **Encadrer ln(1,2) grâce à la concavité**

(a) $h'(x)=\frac{2}{2x+1}$ et $h''(x)=-\frac{4}{(2x+1)^2}$. Pour tout x de I, $(2x+1)^2>0$, donc $h''(x)<0$: h est concave sur I.

(b) $h(0)=0$ et $h'(0)=2$, donc $T : y=2(x-0)+0$, soit $y=2x$. h est concave sur I, donc $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier de T.
Donc pour tout $x\in I$, $\ln(2x+1)\leqslant 2x$.

(c) La droite (AB) passe par l'origine et a pour coefficient directeur $\frac{\ln 2-0}{\frac{1}{2}-0}=2\ln 2$, d'où $(AB) : y=2x\ln 2$. h est concave, donc entre A et B, $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de sa corde $[AB]$. Ainsi, pour tout $x\in\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, $\ln(2x+1)\geqslant 2x\ln 2$.

(d) Pour $x=0{,}1$, qui est dans $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, on a $2x+1=1{,}2$. Donc $0{,}2\ln 2\leqslant \ln(1{,}2)\leqslant 0{,}2$, soit environ $0{,}138\leqslant\ln(1{,}2)\leqslant 0{,}2$. L'amplitude vaut environ $0{,}2-0{,}1386\approx 0{,}061$ (et $\ln(1{,}2)\approx 0{,}182$).

Ex. 50 **(suite)**

(e) Faux. Contre-exemple : $x=1$. On a $\ln 3\approx 1{,}099$ et $2\ln 2\approx 1{,}386$, donc $\ln 3<2\ln 2$. La courbe n'est au-dessus de sa corde qu'entre A et B : en dehors de $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, elle repasse au-dessous de la droite (AB).