Terminale spécialité / Continuité et TVI

benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Continuité en un point, sur un intervalle*

À retenir : f est continue en a si $f(a)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ sont égales. Dérivable $\Longrightarrow$ continue, la réciproque est fausse : $|x-2|$ est continue en 2 sans y être dérivable. « Sans lever le crayon » ne prouve rien.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : continue ou pas au point de jonction ?** — Pour chaque question, justifie ta réponse par un calcul ou en citant le cours.

(a) $f(x)=x^2+1$ si $x<2$ et $f(x)=3x-1$ si $x\geqslant 2$. La fonction f est-elle continue en 2 ?

(b) $g(x)=\mathrm{e}^x$ si $x<0$ et $g(x)=x+2$ si $x\geqslant 0$. La fonction g est-elle continue en 0 ?

(c) Pour une fonction h définie sur $\mathbb{R}$, on donne :

Nombre	$\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$	$h(3)$	$\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$
Valeur	4	4	1

La fonction h est-elle continue en 3 ?

(d) $k(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Peut-on dire que k n'est pas continue en 2 ? Justifie.

(e) $u(x)=x^2-1$ si $x\leqslant 1$ et $u(x)=2x$ si $x>1$. Lina écrit : « $u(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} u(x)=0$, donc u est continue en 1. » A-t-elle raison ? Justifie.

(f) La fonction $w : x\mapsto x^3-2x+5$ est-elle continue en 1 ? Justifie sans calculer de limite.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : le bon paramètre** — Dans chaque question, détermine, s'il existe, le réel k pour que la fonction soit continue au point indiqué.

(a) $f(x)=3x+k$ si $x<1$ et $f(x)=x^2+4$ si $x\geqslant 1$, au point 1.

(b) $g(x)=x^2+k$ si $x\leqslant 2$ et $g(x)=kx+1$ si $x>2$, au point 2.

(c) $h(x)=\mathrm{e}^x+k$ si $x<0$ et $h(x)=2x-3$ si $x\geqslant 0$, au point 0.

(d) $p(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ si $x\neq 3$ et $p(3)=k$, au point 3.

(e) $r(x)=kx^2-1$ si $x<0$ et $r(x)=\sqrt{x+4}$ si $x\geqslant 0$, au point 0.

Ex. 3 ★★☆ **Vrai ou faux : continue, dérivable** — Vrai ou faux ? Justifie par une démonstration ou un contre-exemple.

(a) « Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en -1 est dérivable en -1. »

(b) « La fonction racine carrée est continue en 0 et dérivable en 0. »

(c) $g(x)=x+1$ si $x<1$ et $g(x)=x^2$ si $x\geqslant 1$. « g n'est pas dérivable en 1. »

(d) « Pour prouver que $x\mapsto x^3-4x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de dire que sa courbe se trace sans lever le crayon. »

Ex. 4 ★★☆ **La copie de Nadia** — $f(x)=x^2-4x+6$ si $x\leqslant 3$ et $f(x)=3x-6$ si $x>3$. Nadia écrit : « $f(3)=3$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3$, donc f est continue en 3. Comme f est continue en 3, f est dérivable en 3. »

(a) Quel calcul manque dans la justification de la continuité ? Fais-le, puis conclus sur la continuité de f en 3.

(b) Explique pourquoi la deuxième phrase de Nadia n'est pas une justification valable.

(c) Calcule la limite de $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ quand $h\to 0$ avec $h<0$, puis avec $h>0$. Conclus.

(d) Corrigée, Nadia ajoute : « f n'est pas dérivable en 3, donc f n'est pas continue en 3. » Qu'en penses-tu ? Justifie.

Ex. 5 ★★★ **Deux raccords à régler** — Soit a et b deux réels. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x)=ax+1$ si $x<1$; $f(x)=x^2+bx$ si $1\leqslant x<3$; $f(x)=2x+6$ si $x\geqslant 3$.

(a) Justifie que f est continue sur $]-\infty\,;1[$, sur $]1\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$.

(b) Calcule $f(3)$, la limite à gauche et la limite à droite de f en 3, puis détermine b pour que f soit continue en 3.

(c) Tu prends cette valeur de b. Détermine a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Avec ces valeurs de a et b, calcule la limite à gauche et la limite à droite en 0 du taux $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifie.

(e) Tu oublies les valeurs trouvées. Existe-t-il des réels a et b pour lesquels f est dérivable en 1 ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Un trou à boucher** — Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

(a) Détermine l'ensemble de définition D de g.

(b) Inès écrit : « Sur la calculatrice, la courbe de g se trace sans lever le crayon, donc g est continue en 4. » Relève ses deux erreurs.

(c) Montre que pour tout x de D, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+5}+3}$, puis calcule $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$.

(d) On pose $G(x) = g(x)$ pour $x \in D$ et $G(4) = k$. Détermine k pour que G soit continue sur $[-5\,;+\infty[$. Justifie.

(e) Étudie la limite de $\dfrac{G(-5+h)-G(-5)}{h}$ quand $h \to 0^+$. Que peux-tu dire de G en -5 : continuité, dérivabilité ?

Ex. 7 ★★★ **Le drone et la balise** — Un drone se déplace en ligne droite. À l'instant t (en s), avec $t \in [0\,;5]$, sa distance (en m) à une balise est $d(t) = |3t - 6|$. Un capteur du drone affiche une mesure $s(t)$, relevée près de $t = 2$:

t	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01
s(t)	3,8	3,98	3,998	1	1,001	1,01

(a) Écris $d(t)$ sans valeur absolue sur $[0\,;2]$ puis sur $[2\,;5]$. Calcule $d(2)$, puis la limite à gauche et la limite à droite de d en 2.

(b) Étudie le taux de variation $\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h}$ selon le signe de h. La fonction d est-elle dérivable en 2 ? Justifie.

(c) À l'aide du tableau, conjecture $s(2)$, la limite à gauche et la limite à droite de s en 2. Que peux-tu conjecturer sur la continuité de s en 2 ?

(d) Le constructeur donne $s(t) = 2t$ si $t < 2$ et $s(t) = t - 1$ si $t \geqslant 2$. Démontre ta conjecture, puis justifie que s n'est pas dérivable en 2.

2. *Justifier la continuité, image d'une suite convergente*

À retenir : verif remplacées (voir bloc verif)

Ex. 8 ★★☆ **Nommer l'opération et donner l'intervalle** — Pour chaque fonction, nomme les fonctions de référence et l'opération utilisées, puis donne le ou les intervalles sur lesquels elle est continue.

(a) $f(x) = 4x^3 - x + 7$.

(b) $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$.

(c) $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$.

(d) $k(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$.

(e) $m(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+4}$.

(f) $p(x) = |x - 2| + 3x^2$.

Ex. 9 ★★☆ **Limites par continuité** — Pour chaque suite définie pour $n \geqslant 1$, calcule la limite. Nomme la fonction continue utilisée et le point où elle est continue.

(a) $a_n = \mathrm{e}^{-2+\frac{1}{n}}$.

(b) $b_n = \sqrt{16 - \dfrac{7}{n^2}}$.

(c) $c_n = \left|\dfrac{3}{n} - 5\right|$.

(d) $d_n = \dfrac{1}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.

(e) $s_n = \left(2 - \dfrac{3}{n}\right)^3$.

Ex. 10 ★★★ **Vrai ou faux sur la continuité** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie. Si elle est fausse, donne un contre-exemple ou la bonne conclusion.

(a) Léa affirme : « $g(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un quotient de polynômes. »

(b) « $k(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par composée de fonctions continues. »

(c) « $h(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc h est continue sur $\mathbb{R}$. » Cette justification est-elle valable ?

(d) « Si (u_n) converge vers 2, alors pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, $(f(u_n))$ converge vers $f(2)$. »

Ex. 11 ★★★ **Inès compose une suite et une racine** — Inès étudie la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ et la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

(a) Détermine l'ensemble de définition de f, puis justifie que f est continue sur cet ensemble.

(b) Montre que $u_n = 3 - \frac{7}{n+2}$, puis que $u_n \geqslant -0{,}5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Calcule $\lim u_n$, puis déduis-en la limite de la suite $\left(\sqrt{2u_n + 3}\right)$.

(d) Détermine la limite de la suite (e^{-u_n}).

Ex. 12 ★★★ **Racine d'un trinôme et suite qui s'en approche** — On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ et la fonction k définie par $k(x) = \frac{x}{f(x)}$. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{5n+2}{n+1}$.

(a) Étudie le signe de $x^2 - 4x + 3$, puis détermine l'ensemble de définition D de f.

(b) Justifie que f est continue sur $]-\infty\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$ en nommant l'opération utilisée.

(c) Détermine les intervalles sur lesquels k est continue. Pourquoi k n'est-elle pas continue sur $[3\,;+\infty[$?

(d) Vérifie que $u_n = 5 - \frac{3}{n+1}$, puis montre que $u_n \geqslant 4$ pour $n \geqslant 2$ et calcule $\lim u_n$.

(e) Déduis-en $\lim f(u_n)$ et $\lim k(u_n)$ en citant les hypothèses utilisées.

Ex. 13 ★★★ **Le capteur de Noah** — Noah modélise la concentration (en mg/L) d'un médicament dans le sang, t heures après la prise, par $C(t) = \frac{8t}{t^2+4}$ pour $t \geqslant 0$. Il fait des mesures aux instants $t_n = 2 + \frac{3}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Justifie que C est continue sur $[0\,;+\infty[$ en nommant les fonctions de référence et l'opération.

(b) Montre que C est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et calcule $C'(t)$. Lina dit que cela suffit pour prouver que C est continue. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Zoé affirme : « une fonction continue sur $[0\,;+\infty[$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ ». Vrai ou faux ? Justifie avec une fonction de référence.

(d) Calcule $\lim t_n$, puis déduis-en la limite de la suite $(C(t_n))$ en citant les hypothèses.

(e) Un capteur défaillant affiche $d(t) = C(t)$ si $t \neq 2$ et $d(2) = 0$. Compare $\lim d(t_n)$ et $d(2)$. Quelle hypothèse manque ?

Ex. 14 ★★★ **Une fonction logistique et sa racine** — On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ et la fonction q définie par $q(x) = \sqrt{3 - h(x)}$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \frac{2}{n}$.

(a) Justifie que h est continue sur $\mathbb{R}$: décompose-la en fonctions de référence et nomme chaque opération.

(b) Montre que $3 - h(x) = \frac{3\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. Déduis-en que q est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Calcule $\lim h(a_n)$ et $\lim q(a_n)$ en citant les hypothèses utilisées.

(d) Hugo écrit : « h est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim h(n) = h(+\infty)$ ». Explique son erreur, puis calcule correctement $\lim\limits_{n\to+\infty} h(n)$.

(e) Une suite (c_n) converge vers un réel ℓ et $\lim h(c_n) = 2$. Détermine ℓ en justifiant.

3. *Théorème des valeurs intermédiaires*

À retenir : TVI : si f est continue sur $[a\,;b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a\,;b]$. Le TVI ne donne ni sa valeur ni leur nombre. Réciproque fausse : $x^2 = 0$ sur $[-1\,;1]$.

Ex. 15 ★☆☆ **Rédiger le théorème des valeurs intermédiaires** — Pour chaque question, donne les trois arguments du TVI : la continuité, les valeurs aux bornes, puis la position de k.

(a) Montre que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

(b) Montre que l'équation $x^3 + 2x = 7$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.

(c) Montre que l'équation $\mathrm{e}^x = 3 - x$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

Ex. 15 (suite)

(d) Trouve un entier n tel que l'équation $x^3 + 2x^2 = 20$ admette au moins une solution dans $[n\,;n+1]$. Justifie.

(e) Montre que l'équation $\frac{4}{x+1} = x$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.

(f) On sait seulement que h est continue sur $[-1\,;3]$, que $h(-1) = 4$ et que $h(3) = -2$. Que peut-on affirmer sur l'équation $h(x) = 1$? Justifie.

Ex. 16 ★☆☆ **Ce que dit le TVI, et ce qu'il ne dit pas** — Vrai ou faux ? Justifie par une preuve ou par un contre-exemple.

(a) Si f est continue sur $[0\,;2]$ avec $f(0) = -1$ et $f(2) = 3$, alors l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans $[0\,;2]$.

(b) $p(x) = x^3 - x$ est continue sur $[-2\,;2]$ et $p(-2) < 0 < p(2)$, donc l'équation $p(x) = 0$ a une unique solution dans $[-2\,;2]$.

(c) Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, alors f ne s'annule pas sur $[a\,;b]$.

(d) Soit g définie sur $[-1\,;1]$ par $g(x) = x - 1$ si $x < 0$ et $g(x) = x + 1$ si $x \geqslant 0$. Comme $g(-1) < 0 < g(1)$, g s'annule sur $[-1\,;1]$.

(e) Pour appliquer le TVI à f sur $[a\,;b]$, il faut que f soit monotone sur $[a\,;b]$.

Ex. 17 ★★☆ **La serre passe-t-elle par 20 °C ?** — Dans une serre, la température (en °C) t heures après 8 h est donnée par $T(t) = 12 + 5t - 0{,}6t^2$, pour $t \in [0\,;8]$.

(a) Justifie que T est continue sur $[0\,;8]$, puis calcule $T(0)$ et $T(8)$.

(b) Peut-on appliquer le TVI sur $[0\,;8]$ pour montrer que la température atteint 20 °C ? Justifie.

(c) Calcule $T(4)$, puis montre que la température vaut 20 °C au moins deux fois entre 8 h et 16 h.

(d) À l'aide de $T(2)$, $T(3)$, $T(6)$ et $T(7)$, montre que la température vaut 20 °C à un instant entre 10 h et 11 h, et à un instant entre 14 h et 15 h.

(e) Sami affirme : « Le TVI prouve que la température vaut 20 °C exactement deux fois. » Corrige son raisonnement.

Ex. 18 ★★☆ **L'erreur de Hugo sur une équation de degré 3** — On pose $f(x) = x^3 - 5x + 3$. Hugo écrit : « $f(0) = 3$ et $f(2) = 1$ sont de même signe, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[0\,;2]$. »

(a) Vérifie les valeurs données par Hugo, puis calcule $f(1)$.

(b) Explique l'erreur de Hugo.

(c) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins deux solutions dans $[0\,;2]$.

(d) Calcule $f(-3)$. Déduis-en que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions réelles.

Ex. 18 (suite)

(e) Soit b et c deux réels. À l'aide des limites de $x^3 + bx + c$ en $-\infty$ et en $+\infty$, justifie que l'équation $x^3 + bx + c = 0$ admet au moins une solution réelle.

Ex. 19 ★★★ **Inès et ses 10 km** — Inès court 10 km en 50 minutes. On note $d(t)$ la distance (en km) qu'elle a parcourue t minutes après le départ, pour $t \in [0\,;50]$. On admet que d est continue sur $[0\,;50]$, avec $d(0) = 0$ et $d(50) = 10$.

(a) Montre qu'Inès passe au moins une fois par la borne des 7 km.

(b) On pose $g(t) = d(t+25) - d(t)$ pour $t \in [0\,;25]$. Justifie que g est continue sur $[0\,;25]$, puis calcule $g(0) + g(25)$.

(c) Déduis-en qu'il existe une période de 25 minutes pendant laquelle Inès parcourt exactement 5 km.

(d) Dans cette question, Inès court à vitesse constante : $d(t) = \frac{t}{5}$. Combien d'instants t_0 conviennent à la question précédente ? Qu'est-ce que cela illustre ?

(e) Dans cette question, $d(t) = 0{,}004t^2$. Vérifie que $d(50) = 10$, puis détermine l'instant t_0 de $[0\,;25]$ tel que $g(t_0) = 5$.

Ex. 20 ★★★ **Une fonction en deux morceaux** — Soit m un réel. On définit f sur $[0\,;3]$ par $f(x) = x^2 - 2$ si $0 \leqslant x < 1$, et $f(x) = mx - 4$ si $1 \leqslant x \leqslant 3$.

(a) Dans cette question, $m = 6$. Calcule $f(0)$ et $f(3)$, puis résous l'équation $f(x) = 0$ sur chacun des deux morceaux.

(b) Avec $m = 6$, Noé affirme : « 0 est compris entre $f(0)$ et $f(3)$, donc d'après le TVI, f s'annule sur $[0\,;3]$. » Explique précisément son erreur.

(c) Détermine la valeur de m pour laquelle f est continue sur $[0\,;3]$.

(d) Pour cette valeur de m, montre avec le TVI que $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;3]$, puis détermine toutes les solutions.

Ex. 21 ★★★ **Trois solutions sans monotonie** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

(a) Calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(4)$.

(b) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans $[0\,;4]$.

(c) Calcule $f(2)$. Déduis-en trois intervalles de la forme $[n\,;n+1]$, avec n entier, qui contiennent chacun au moins une solution de $f(x) = 0$.

(d) Montre que l'équation $x^3 - 6x^2 + 9x = 5$ admet au moins une solution dans $[3\,;5]$.

(e) On pose $g(x) = f(x) - 1$. Vrai ou faux : « si g s'annule sur $[0\,;2]$, alors $g(0)$ et $g(2)$ sont de signes contraires » ? Justifie.

4. *Corollaire : solution unique, nombre de solutions*

À retenir : Continue + STRICTEMENT monotone + k entre les valeurs (STRICTEMENT entre les limites si une borne est ouverte ou infinie) : une unique solution. Un morceau par flèche. Une limite n'est pas atteinte : $\frac{x}{x+1} = 1$ n'a aucune solution sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : compter les solutions sur un tableau** — La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et son tableau de variations est ci-dessous. Les flèches indiquent des variations strictes et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$. Justifie chaque réponse morceau par morceau.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f(x)	2	↗ 5	↘ -4	↗ $+\infty$

(a) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle sur $\mathbb{R}$?

(b) Combien de solutions l'équation $f(x) = 3$ a-t-elle sur $\mathbb{R}$?

(c) Yanis affirme que l'équation $f(x) = 2$ a trois solutions, une par flèche du tableau. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Vrai ou faux ? L'équation $f(x) = 5$ a trois solutions sur $\mathbb{R}$. Justifie.

(e) Vrai ou faux ? L'équation $f(x) = 6$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$, et elle est supérieure à 3. Justifie.

(f) Pour quelles valeurs de k l'équation $f(x) = k$ n'a-t-elle aucune solution ? Justifie.

(g) Pour quelles valeurs de k l'équation $f(x) = k$ a-t-elle exactement une solution ?

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : le corollaire s'applique-t-il ?** — Pour chaque cas, dis si le corollaire du TVI prouve que l'équation $f(x) = k$ a une unique solution sur l'ensemble donné. Justifie. Sinon, indique l'hypothèse qui manque et donne le nombre exact de solutions.

(a) $f(x) = x^2$ sur $[-2\,;3]$, avec $k = 1$.

(b) $f(x) = 2x^3 + x$ sur $[0\,;2]$, avec $k = 10$.

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$, avec $k = 0$.

(d) f vaut 1 sur $[0\,;1]$ et $f(x) = x$ sur $[1\,;3]$, avec $k = 1$: f est continue et croissante.

(e) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[-1\,;0[\cup]0\,;1]$, avec $k = 0$, qui est compris entre $f(-1)$ et $f(1)$.

(f) $f(x) = \sqrt{x} + x$ sur $[0\,;4]$, avec $k = 7$.

Ex. 24 ★★☆ **Rédiger le corollaire sur un intervalle ouvert** — On considère la fonction f définie sur $]-3\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

(a) Justifie que f est continue et strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

Ex. 24 (suite)

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

(c) Rédige la preuve complète du fait que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur $]-3\,;+\infty[$, puis calcule α.

(d) Kenza affirme que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution sur $]-3\,;+\infty[$, d'après le corollaire du TVI. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Combien de solutions l'équation $f(x)=-100$ a-t-elle sur $]-3\,;+\infty[$? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur de Malo** — Soit $g(x)=x^3-3x^2+4$ sur $[-2\,;4]$. Malo écrit : « g est continue, $g(-2)=-16<0$ et $g(4)=20>0$, donc d'après le corollaire du TVI, $g(x)=0$ a une unique solution sur $[-2\,;4]$. »

(a) Calcule $g'(x)$, étudie son signe et explique quelle hypothèse Malo a oubliée.

(b) Dresse le tableau de variations de g sur $[-2\,;4]$ avec les valeurs aux bornes de chaque morceau.

(c) Combien de solutions l'équation $g(x)=0$ a-t-elle sur $[-2\,;4]$? Justifie morceau par morceau.

(d) Combien de solutions l'équation $g(x)=2$ a-t-elle sur $[-2\,;4]$? Justifie.

(e) Trouve une racine évidente de g, factorise $g(x)$ et retrouve les solutions de $g(x)=0$.

Ex. 26 ★★★ **Problème : une fonction auxiliaire et son signe** — On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\mathrm{e}^x-2$, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-2x$. On rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x=0$.

(a) Calcule $g'(x)$, puis dresse le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, avec ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Montre que $g(x)=0$ n'a aucune solution sur $]-\infty\,;-1]$, puis qu'elle admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

(c) Par balayage à la calculatrice, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(d) Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis les variations de f (calcule $f'(x)$).

(e) Montre que $\mathrm{e}^{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}$, puis que $f(\alpha)=2-2\alpha-\dfrac{2}{\alpha}$.

Ex. 27 ★★★ **Discuter selon k le nombre de solutions** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}=0$.

(a) Calcule $f'(x)$, étudie son signe et dresse le tableau de variations de f, avec ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Détermine, avec une rédaction complète, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Lina affirme que l'équation $f(x)=0$ a deux solutions sur $\mathbb{R}$. A-t-elle raison ? Justifie, puis résous $f(x)=0$.

Ex. 27 (suite)

(d) Selon les valeurs du réel k, donne le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 28 ★★★ **Durée d'efficacité d'un médicament** — Un médicament est injecté à l'instant $t=0$. Sa concentration dans le sang, en mg par litre, vaut $C(t)=10t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ pour $t\in[0\,;12]$ (t en heures). Il est efficace lorsque $C(t)\geqslant 4$. On utilise ce programme :

```
from math import exp
def C(t):
    return 10 * t * exp(-0.5 * t)
def dicho(a, b, p):
    while b - a > p:
        m = (a + b) / 2
        if (C(a) - 4) * (C(m) - 4) <= 0: b = m
        else: a = m
    return a, b
```

(a) Étudie les variations de C sur $[0\,;12]$; donne $C(2)$ et une valeur approchée de $C(12)$.

(b) Montre que l'équation $C(t)=4$ admet exactement deux solutions $t_1<t_2$ dans $[0\,;12]$.

(c) Explique pourquoi le test `(C(a) - 4) * (C(m) - 4) <= 0` convient, que C croisse ou décroisse sur $[a\,;b]$.

(d) Détaille les étapes de l'appel `dicho(0, 2, 0.1)` et donne ce qu'il renvoie.

(e) L'appel `dicho(2, 12, 0.01)` renvoie `(5.076171875, 5.0859375)`. Déduis-en un encadrement de la durée d'efficacité t_2-t_1.

5. *Encadrer une solution : balayage et dichotomie*

À retenir : Balayage : on suit le signe de $f(x)-k$, au pas de 0,1 puis 0,01. Dichotomie : on garde la moitié où le signe change. Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{b-a}{2^n}$. Attention : $1{,}42<\alpha<1{,}43$ ne donne pas l'arrondi de α au centième.

Ex. 29 ★☆☆ **Amplitude, défaut, excès, arrondi** — Les questions sont indépendantes.

(a) On sait que $2{,}36<\alpha<2{,}37$. Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

(b) Avec $2{,}36<\alpha<2{,}37$, donne une valeur approchée de α à 10^{-2} par défaut, puis une par excès.

(c) Avec $2{,}36<\alpha<2{,}37$, peut-on donner l'arrondi de α au centième ? Justifie.

(d) Lina sait que $3{,}126<\beta<3{,}135$. Elle affirme : « l'arrondi de β au centième est 3,13 ». A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Une dichotomie part de l'intervalle $[2\,;5]$. Quelle est l'amplitude de l'encadrement après 6 étapes ?

Ex. 29 **(suite)**

(f) Une dichotomie part de $[-1\,;1]$. Combien d'étapes faut-il au minimum pour obtenir une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2} ?

Ex. 30 ★☆☆ **Balayage : suivre le signe de f(x) − 4** — On pose $f(x) = x^3 + 2x$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. L'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α dans $[1\,;2]$.

x	1	1,1	1,2	1,3
f(x)	3	3,531	4,128	4,797

(a) Théo dit : « $f(x)$ reste positif dans le tableau, donc il n'y a pas de solution dans $[1\,;1{,}3]$. » A-t-il raison ? Justifie.

(b) Déduis du tableau un encadrement de α d'amplitude 0,1.

(c) Calcule $f(1{,}17)$ et $f(1{,}18)$, arrondis à 10^{-3}.

(d) Déduis-en un encadrement de α d'amplitude 0,01.

(e) Calcule $f(1{,}175)$ à 10^{-3} près, puis donne l'arrondi de α au centième.

Ex. 31 ★★☆ **Dichotomie à la main avec l'exponentielle** — On pose $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 3$ sur $[0\,;1]$. Les valeurs de g sont à arrondir à 10^{-3}.

Étape	1	2	3	4
m	0,5	…	…	…
signe de g(m)	−	…	…	…
intervalle gardé	[0,5 ; 1]	…	…	…

(a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$.

(b) Complète le tableau de dichotomie. Indique $g(m)$ à chaque étape.

(c) Donne l'encadrement de α obtenu après 4 étapes, puis son amplitude.

(d) Lou affirme : « $\alpha \approx 0{,}78$ au centième ». Calcule $g(0{,}785)$ et $g(0{,}795)$, puis dis si elle a raison.

Ex. 32 ★★☆ **Corriger un programme de dichotomie** — La fonction $h(x) = x^3 + x^2 - 5$ est continue et strictement croissante sur $[1\,;2]$, avec $h(1) < 0 < h(2)$. Noé écrit ce programme pour encadrer la solution α de $h(x) = 0$.

```
def h(x):
    return x**3 + x**2 - 5
def dicho(a, b, p):
    while b - a < p:
        m = (a + b) / 2
        if h(a) * h(m) <= 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a, b)
```

(a) Explique pourquoi `dicho(1, 2, 0.05)` renvoie `(1, 2)`, puis corrige la condition du `while`.

Ex. 32 **(suite)**

(b) Même avec la condition corrigée, le programme garde la mauvaise moitié. Explique pourquoi et corrige-le.

(c) Combien de passages dans la boucle fait `dicho(1, 2, 0.05)` une fois le programme corrigé ? Justifie.

(d) Donne le résultat de `dicho(1, 2, 0.05)` corrigé, en détaillant les étapes.

Ex. 33 ★★★ **Balayage, arrondi et encadrement de e^α** — On pose $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ pour $x \geqslant 0$. On étudie l'équation $f(x) = 3$.

(a) Étudie les variations de f sur $[0\,;+\infty[$. Montre que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

(b) Par balayage au pas de 0,1, puis au pas de 0,01, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(c) Déduis-en une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut, puis une par excès.

(d) Léa affirme : « L'arrondi de α au centième est la borne de l'encadrement dont l'image est la plus proche de 3. » Son argument suffit-il ? Donne l'arrondi de α au centième en justifiant.

(e) Justifie que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{3}{\alpha}$. Déduis-en un encadrement de e^α d'amplitude inférieure à 0,02.

Ex. 34 ★★★ **Dichotomie avec une fonction décroissante : programme et erreurs** — On pose $\varphi(x) = 5 - x^3 - x$ sur $[1\,;2]$. Le programme ci-dessous doit encadrer la solution de $\varphi(x) = 0$ avec une amplitude inférieure ou égale à `p`.

```
def phi(x):
    return 5 - x**3 - x
def dicho(a, b, p):
    while b - a > p:
        m = (a + b) / 2
        if ... :
            b = m
        else:
            a = m
    return (a, b)
```

(a) Montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1\,;2]$.

(b) Complète la ligne du `if`, puis donne le couple renvoyé par `dicho(1, 2, 0.01)`.

(c) Inès écrit la condition `phi(m) > 0`. Quel couple renvoie alors `dicho(1, 2, 0.01)` ? Explique son erreur.

(d) Sacha place la ligne `m = (a + b) / 2` avant le `while`, et non dedans. Que se passe-t-il avec `dicho(1, 2, 0.01)` ?

(e) Malo remplace le `return` par `return (round(a, 2), round(b, 2))` pour obtenir un encadrement au centième. Qu'obtient-il ? Commente, puis donne un encadrement correct de α d'amplitude 10^{-2}.

Ex. 35 ★★★ **Durée d'efficacité d'un médicament** — Après la prise d'un médicament, sa concentration dans le sang (en mg/L) vaut $C(t) = 4t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, avec $t \geqslant 0$ en heures. Le médicament est efficace tant que $C(t) \geqslant 2$.

(a) Calcule $C'(t)$. Dresse le tableau de variations de C sur $[0\,;+\infty[$, avec la limite en $+\infty$.

(b) Montre que l'équation $C(t) = 2$ admet exactement deux solutions $t_1 < t_2$ dans $[0\,;+\infty[$.

(c) Par balayage au pas de 0,1, puis au pas de 0,01, encadre t_1 et t_2 avec une amplitude de 10^{-2}.

(d) Déduis-en un encadrement de la durée d'efficacité $D = t_2 - t_1$. Ambre en conclut que l'arrondi de D au centième est 3,59. Son raisonnement suffit-il ? Justifie.

(e) Yanis part de l'encadrement de t_2 d'amplitude 0,1 et applique la dichotomie. Combien d'étapes faut-il au minimum pour obtenir une amplitude inférieure ou égale à 10^{-4} ?

6. *Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et point fixe*

À retenir : Pour $u_{n+1} = f(u_n)$: 1) on prouve la convergence (récurrence, puis convergence monotone) ; 2) f continue en ℓ ; 3) $f(\ell) = \ell$ donne les candidats et l'encadrement choisit : $\ell \in [1\,;3]$ élimine -1.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : candidats et pièges** — Réponds à chaque question en citant le théorème utilisé.

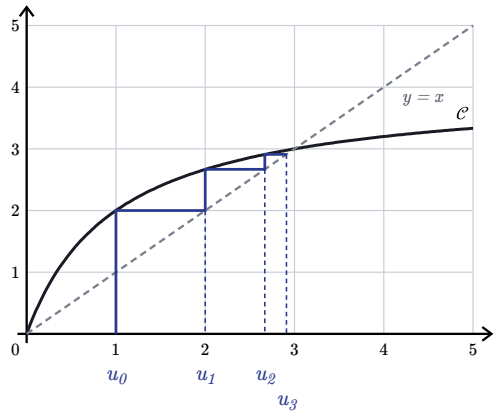
(a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 3$. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. Calcule ℓ en justifiant.

(b) $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2+6}{5}$. On admet que $0 \leqslant v_n \leqslant 2{,}5$ et que (v_n) converge. Détermine sa limite.

(c) $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 4 - w_n$. Inès dit : « $x \mapsto 4 - x$ a pour point fixe 2, donc (w_n) converge vers 2. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) $h(x) = 0{,}5x + 1$ si $x < 2$, $h(x) = x + 1$ si $x \geqslant 2$; $t_0 = 0$, $t_{n+1} = h(t_n)$ converge vers 2 (admis). Calcule $h(2)$. Pourquoi n'a-t-on pas $h(2) = 2$?

Ex. 37 ★★☆ **Conjecturer avec un escalier** — On pose $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$ sur $[0\,;+\infty[$, $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a tracé $\mathcal{C}$, la droite $y = x$ et l'escalier.



(a) Lis sur le graphique une valeur approchée de u_1, puis encadre u_2 et u_3 par deux entiers consécutifs.

(b) Calcule u_1 et u_2 en valeur exacte.

(c) Conjecture le sens de variation et la limite de (u_n).

(d) Résous l'équation $f(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$.

(e) Mila affirme : « Le graphique prouve que (u_n) converge vers 3. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Méthode complète et programme de seuil** — On pose $f(x) = \sqrt{2x+3}$ sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, $u_0 = 0$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Justifie que f est continue et croissante sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, puis calcule $f(3)$.

(b) On admet que, pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. Déduis-en que la suite (u_n) converge.

(c) Détermine la limite ℓ de (u_n) en justifiant chaque étape.

(d) Complète la condition de la boucle pour que `seuil()` renvoie le premier rang n tel que $|u_n - 3| < 10^{-3}$, puis donne ce rang.

```
from math import sqrt

def seuil():
    n = 0
    u = 0
    while ..........:
        u = sqrt(2*u + 3)
        n = n + 1
    return n
```

Ex. 39 ★★☆ **Le bassin qui s'évapore** — Un bassin contient 10 m³ d'eau. Chaque semaine, la moitié de l'eau s'évapore, puis on ajoute 2 m³. On note u_n le volume (en m³) après n semaines, avec $u_0 = 10$.

(a) Justifie que $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$ et calcule u_1.

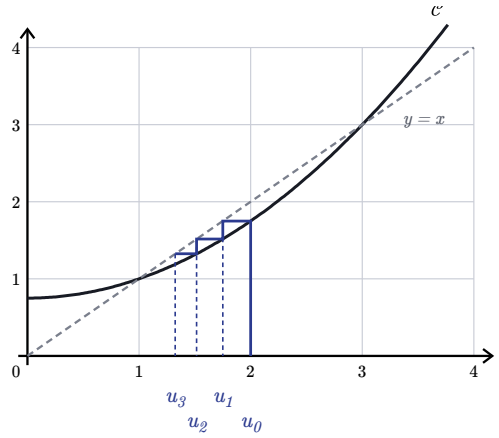
(b) On pose $f(x) = 0{,}5x + 2$. Montre que si $4 \leqslant x \leqslant 10$, alors $4 \leqslant f(x) \leqslant 10$. Déduis-en par récurrence que $4 \leqslant u_n \leqslant 10$ pour tout n.

(c) Montre que $u_{n+1} - u_n = -0{,}5(u_n - 4)$. Déduis-en que (u_n) converge, puis détermine sa limite.

Ex. 39 (suite)

(d) Noé dit : « La suite est décroissante et minorée par 0, donc le bassin finit par se vider. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Deux suites, une même fonction** — On pose $f(x) = \frac{x^2+3}{4}$ sur $[0\,;+\infty[$, $u_0 = 2$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On a tracé $\mathcal{C}$, la droite $y = x$ et l'escalier.



(a) À l'aide du graphique, conjecture le sens de variation et la limite de (u_n). Ce graphique prouve-t-il ta conjecture ? Justifie.

(b) Montre que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, puis résous l'équation $f(x) = x$.

(c) Montre par récurrence que, pour tout n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.

(d) Déduis-en que (u_n) converge, puis détermine sa limite.

(e) On pose $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. Lina affirme : « (v_n) converge vers 1 ou vers 3 ». Montre que $v_n \geqslant 4$ et $v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{3}{4}$ pour tout n, puis conclus.

Ex. 41 ★★★ **Croissante et majorée : vers quelle limite ?** — On pose $f(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = f(x) - x$ sur $[0\,;+\infty[$, $u_0 = 0$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Étudie les variations de g et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Montre que f est croissante et que $f(\alpha) = \alpha$, puis que $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ pour tout n. Déduis-en, avec le signe de g, que (u_n) est croissante.

(c) Hugo écrit : « (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers 2 ». Corrige son raisonnement et détermine $\lim u_n$.

(d) À la calculatrice, détermine par balayage un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(e) Explique pourquoi $u_n \geqslant 1{,}84$ entraîne $|u_n - \alpha| < 10^{-2}$. Complète le programme pour qu'il affiche le premier rang qui convient, et donne la valeur affichée.

```
from math import exp
u = 0
n = 0
while ..... :
    u = ......
    n = n + 1
print(n)
```

Ex. 42 ★★★ **Une suite et une fonction définie par morceaux** — On définit f sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \frac{x+1}{2}$ si $0 \leqslant x < 1$, et $f(1) = 0$. On pose $u_0 = 0$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Calcule u_1, u_2, u_3, puis montre par récurrence que, pour tout n, $u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(b) Déduis-en la limite ℓ de (u_n). Compare $f(\ell)$ et ℓ, puis montre que f n'a aucun point fixe sur $[0\,;1]$.

(c) Nina conclut : « le théorème du point fixe est faux ». A-t-elle raison ? Justifie en étudiant la continuité de f en 1.

(d) On remplace $f(1) = 0$ par $f(1) = a$, où a est un réel. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 1 ? Vérifie qu'alors ℓ est un point fixe.

7. *Problèmes type bac*

À retenir : Si f est continue et strictement monotone, ses limites aux bornes ne sont pas atteintes ; si k est strictement entre elles, $f(x) = k$ a une unique solution. Réutiliser α : si $\alpha^3 = 2 - \alpha$, alors $\alpha^3 + \alpha = 2$.

Ex. 43 ★★★ **Réutiliser α dans un calcul** — On admet que l'équation $\mathrm{e}^x + x - 4 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Simplifie chaque expression, sans valeur approchée de α.

(a) Exprime e^α en fonction de α.

(b) Simplifie $A = \mathrm{e}^\alpha + \alpha^2 - 3\alpha$, puis écris A sous la forme d'un carré.

(c) Simplifie $B = \mathrm{e}^{2\alpha} - \alpha^2 + 8\alpha$.

(d) Justifie que $\alpha \neq 0$, puis simplifie $C = \frac{\mathrm{e}^\alpha - 4}{\alpha}$.

(e) Montre que $\mathrm{e}^{-\alpha} = \dfrac{1}{4-\alpha}$.

(f) Simplifie $D = \alpha\,\mathrm{e}^\alpha + \alpha^2$.

Ex. 44 ★★★ **Compter les solutions sur un tableau** — f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone sur chaque intervalle portant une flèche. Ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ valent 1.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f(x)	1	↗ 5	↘ -3	↗ 1

(a) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle sur $\mathbb{R}$? Justifie morceau par morceau.

(b) Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ admet-elle sur $\mathbb{R}$? Justifie.

(c) Vrai ou faux : pour tout k de $]-3\,;5[$, l'équation $f(x) = k$ a exactement deux solutions. Justifie.

(d) Pour quelles valeurs de k l'équation $f(x) = k$ n'a-t-elle aucune solution ?

(e) On note β la plus petite solution de $f(x) = 0$. Donne le signe de $f(x)$ sur $]-\infty\,;3]$.

Ex. 45 ★★☆ **Étude complète d'un polynôme** — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

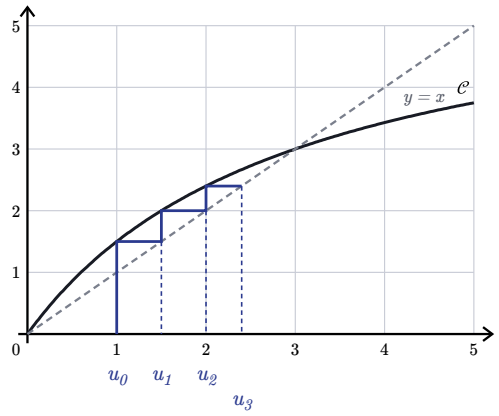
(a) Calcule $g'(x)$, puis dresse le tableau de variations de g, limites en $-\infty$ et $+\infty$ comprises.

(b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

(c) À la calculatrice, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(d) Déduis-en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Ex. 46 ★★☆ **Les truites de l'étang** — Le nombre de truites d'un étang au 1er janvier de l'année $2026 + n$ est u_n, en milliers. On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{6x}{x+3}$ sur $[0\,;+\infty[$.



(a) À l'aide du graphique, conjecture le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

(b) Calcule u_1 et u_2, puis interprète u_2 dans le contexte.

(c) Montre que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, puis démontre par récurrence que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ pour tout entier naturel n.

(d) Déduis-en que (u_n) converge, détermine sa limite et interprète-la.

Ex. 47 ★★★ **Le minimum caché d'une fonction** — Partie A : g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)\mathrm{e}^x - 3$. Partie B : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,(\mathrm{e}^x - 3)$. On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

(a) Calcule $g'(x)$, puis dresse le tableau de variations de g avec ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

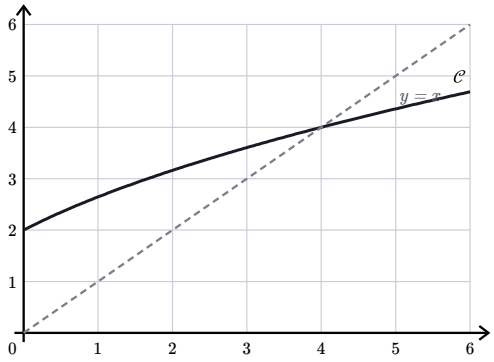
(b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Justifie aussi qu'elle n'a aucune solution sur $]-\infty\,;-2]$.

(c) À la calculatrice, par balayage, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(d) Déduis-en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x. Vérifie ensuite que $f'(x) = g(x)$ et donne les variations de f.

(e) Démontre que le minimum de f vaut $-\dfrac{3\alpha^2}{\alpha+1}$, puis donnes-en une valeur approchée à 10^{-1} près.

Ex. 48 ★★★ **Une racine qui se stabilise** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a tracé $\mathcal{C}$, la courbe de f, et la droite d'équation $y = x$.



(a) Sans calcul, place u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses, puis conjecture le sens de variation et la limite de (u_n).

(b) Calcule $f'(x)$ et déduis-en le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

(d) Lina affirme : « (u_n) est croissante et majorée par 5, donc elle converge vers 5. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Démontre que (u_n) converge, puis détermine sa limite ℓ en justifiant chaque étape.

Ex. 49 ★★★ **Un médicament efficace combien de temps ?** — La concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, t heures après la prise, est $C(t) = 4t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ pour $t \in [0\,;+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0$. Le médicament est efficace quand $C(t) \geqslant 1$. Ben écrit ce programme :

```
from math import exp
def dicho(a, b, p):
    while b - a > p:
        m = (a + b) / 2
        if 4*m*exp(-0.5*m) > 1:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

(a) Calcule $C'(t)$, puis dresse le tableau de variations de C sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Montre que l'équation $C(t) = 1$ admet exactement deux solutions t_1 et t_2, avec $t_1 < 2 < t_2$.

(c) Explique pourquoi, sur $[2\,;10]$, le test `4*m*exp(-0.5*m) > 1` conduit à remplacer `a` par `m`.

(d) Pour approcher t_1 avec `dicho(0, 2, 0.01)`, le programme est faux. Corrige une seule ligne et justifie.

(e) `dicho(2, 10, 0.01)` renvoie `(6.515625, 6.5234375)` et on admet $0{,}28 < t_1 < 0{,}29$. Encadre t_2 à 10^{-2}, puis donne la durée d'efficacité.