1. *Continuité en un point, sur un intervalle*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : continue ou pas au point de jonction ?**

(a) $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 + 1 = 5$ (fonction polynôme, donc continue) ; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$. Les trois nombres sont égaux : f est continue en 2.

(b) $g(0) = 0 + 2 = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 2$, mais $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \mathrm{e}^0 = 1$. Comme $1 \neq 2$, g n'est pas continue en 0
(saut).

(c) $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x) = h(3) = 4$, mais $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x) = 1 \neq 4$. Les trois nombres ne sont pas égaux : h n'est pas continue en 3.

(d) Non : 2 n'appartient pas à l'ensemble de définition de k. On ne parle donc pas de continuité de k en 2, ni dans un sens ni dans l'autre.

(e) Non. Il manque la limite à droite : $\lim\limits_{x \to 1^+} u(x) = 2 \times 1 = 2 \neq 0 = u(1)$.
Donc u n'est pas continue en 1.

(f) Oui : w est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 1.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : le bon paramètre**

(a) $f(1) = 1 + 4 = 5 = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3 + k$. Continuité en 1 : $3 + k = 5$, donc $k = 2$.

(b) $g(2) = 4 + k = \lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ (fonction polynôme) et $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 2k + 1$. Continuité en 2 : $4 + k = 2k + 1$, donc $k = 3$.

(c) $h(0) = -3 = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \mathrm{e}^0 + k = 1 + k$. Continuité en 0 : $1 + k = -3$, donc $k = -4$.

(d) Pour $x \neq 3$, $p(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x + 2$, qui tend vers 5 quand $x \to 3$. Continuité en 3 : $p(3) = \lim\limits_{x \to 3} p(x)$, donc $k = 5$.

(e) $r(0) = \sqrt{4} = 2 = \lim\limits_{x \to 0^+} r(x)$ (fonction racine continue) et $\lim\limits_{x \to 0^-} r(x) = k \times 0 - 1 = -1$, quel que soit k. Comme $-1 \neq 2$, aucun réel k ne rend r continue en 0.

Ex. 3 ★★☆ **Vrai ou faux : continue, dérivable**

(a) Faux. Soit $f(x) = |x + 1|$: $\lim\limits_{x \to -1} |x + 1| = 0 = f(-1)$, donc f est continue en -1. Mais $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{|h|}{h}$ vaut -1 pour $h < 0$ et 1 pour $h > 0$: les limites diffèrent, donc f n'est pas dérivable en -1.

(b) Faux. Elle est continue en 0 ($\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$), mais pour $h > 0$, $\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$: la limite n'est pas finie, donc elle n'est pas dérivable en 0.

(c) Vrai. $g(1) = 1$ mais $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2 \neq 1$: g n'est pas continue en 1. Or dérivable implique continue ; par contraposée, g n'est pas dérivable en 1.

(d) Faux. L'image du crayon ne justifie rien. On écrit : c'est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 4 ★★☆ **La copie de Nadia**

(a) Il manque la limite à gauche : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 9 - 12 + 6 = 3$ (fonction polynôme, donc continue). On a $f(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$: f est continue en 3.

(b) Continue n'implique pas dérivable : c'est « dérivable $\Longrightarrow$ continue » qui est vrai. Par exemple, $|x - 2|$ est continue en 2 sans y être dérivable.

(c) Pour $h < 0$: $\frac{(3+h)^2-4(3+h)+6-3}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2 + h \to 2$.
Pour $h > 0$: $\frac{3(3+h)-6-3}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \to 3$. Les deux limites diffèrent : f n'est pas dérivable en 3.

(d) C'est faux : « non dérivable » n'entraîne pas « non continue ». On a montré que f est continue en 3 sans y être dérivable. La contraposée correcte est : non continue $\Longrightarrow$ non dérivable.

Ex. 5 ★★★ **Deux raccords à régler**

(a) Sur $]-\infty\,;1[$, $f(x) = ax + 1$ est une fonction affine. Sur $]1\,;3[$, $f(x) = x^2 + bx$ est un polynôme. Sur $]3\,;+\infty[$, $f(x) = 2x + 6$ est affine. Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur chacun de ces intervalles ouverts. Les points 1 et 3 s'étudient à part.

(b) $f(3) = 2 \times 3 + 6 = 12$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 12$. Pour $x < 3$ proche de 3, $f(x) = x^2 + bx$, donc $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 9 + 3b$. f est continue en 3 si $9 + 3b = 12$, c'est-à-dire $b = 1$.

Ex. 5 **(suite)**

(c) Avec $b = 1$: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, puis $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a + 1$. Il faut $a + 1 = 2$, donc $a = 1$. f est alors continue en 1 et en 3, et aussi sur les trois intervalles ouverts (question 1) : elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Pour $h > 0$ petit : $\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{h} = \frac{3h+h^2}{h} = 3 + h$, qui tend vers 3. Pour $h < 0$: $\frac{(1+h)+1-2}{h} = \frac{h}{h} = 1$. Les deux limites sont différentes ($1 \neq 3$) : f n'est pas dérivable en 1, alors qu'elle y est continue (la courbe fait un coin).

(e) Si f est dérivable en 1, elle y est continue, donc $a + 1 = 1 + b$, soit $a = b$. Le taux à gauche vaut alors $\frac{a(1+h)+1-(1+b)}{h} = a$, et le taux à droite vaut $\frac{2h+h^2+bh}{h} = 2 + b + h$, qui tend vers $2 + b$. Il faudrait $a = 2 + b$ et $a = b$ en même temps : c'est impossible. Pour aucun choix de a et b, f n'est dérivable en 1.

Ex. 6 ★★★ **Un trou à boucher**

(a) Il faut $x + 5 \geqslant 0$ et $x - 4 \neq 0$, donc $D = [-5\,;4[\cup]4\,;+\infty[$.

(b) Première erreur : g n'est pas définie en 4, donc on ne peut pas parler de continuité de g en 4. Seconde erreur : « sans lever le crayon » n'est pas une justification, et l'écran n'affiche pas le point manquant.

(c) On multiplie par la quantité conjuguée : $g(x) = \frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$. Quand $x \to 4$, $\sqrt{x+5} \to 3$, donc $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = \frac{1}{6}$.

(d) On prend $k = \frac{1}{6}$. Alors $G(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$ pour tout $x \geqslant -5$, y compris en 4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+5}$ est continue sur $[-5\,;+\infty[$ (composée d'une fonction affine et de la racine carrée). Le dénominateur $\sqrt{x+5} + 3$ est continu et ne s'annule pas (il est supérieur ou égal à 3). Par quotient, G est continue sur $[-5\,;+\infty[$. Pour toute autre valeur de k, $G(4) \neq \lim\limits_{x \to 4} G(x)$.

(e) $G(-5) = \frac{1}{3}$. Pour $h > 0$: $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{h}+3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{-\sqrt{h}}{3h(\sqrt{h}+3)} = \frac{-1}{3\sqrt{h}(\sqrt{h}+3)}$, qui tend vers $-\infty$.
Donc G est continue en -5 (question 4), mais pas dérivable en -5 : la limite du taux n'est pas finie. Continue n'implique pas dérivable.

Ex. 7 ★★★ **Le drone et la balise**

(a) Pour $t \leqslant 2$, on a $3t - 6 \leqslant 0$, donc $d(t) = 6 - 3t$. Pour $t \geqslant 2$, $d(t) = 3t - 6$. Alors $d(2) = 0$, $\lim\limits_{t \to 2^-} d(t) = 6 - 6 = 0$ et $\lim\limits_{t \to 2^+} d(t) = 6 - 6 = 0$. Les trois sont égales : d est continue en 2.

Ex. 7 **(suite)**

(b) Pour $h \neq 0$: $\frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \frac{|3h|}{h}$. Ce taux vaut 3 si $h > 0$ et -3 si $h < 0$. Les limites à droite et à gauche sont différentes, donc d n'est pas dérivable en 2, bien qu'elle y soit continue : continue n'implique pas dérivable (à $t = 2$, le drone passe à la balise, puis sa distance repart à la hausse).

(c) Le tableau donne $s(2) = 1$. À gauche, les valeurs 3,8 ; 3,98 ; 3,998 semblent tendre vers 4. À droite, 1,001 et 1,01 semblent tendre vers 1. On conjecture que $\lim\limits_{t \to 2^-} s(t) = 4$ et que $\lim\limits_{t \to 2^+} s(t) = 1$. On conjecture donc que s n'est pas continue en 2 (il y a un saut).

(d) $s(2) = 2 - 1 = 1$, puis $\lim\limits_{t \to 2^+} s(t) = 1$ et $\lim\limits_{t \to 2^-} s(t) = 2 \times 2 = 4$. Comme $4 \neq 1$, s n'est pas continue en 2. Or, si s était dérivable en 2, elle serait continue en 2 (dérivable implique continue). Par contraposée, s n'est pas dérivable en 2.

2. *Justifier la continuité, image d'une suite convergente*

Ex. 8 ★☆☆ **Nommer l'opération et donner l'intervalle**

(a) f est une fonction polynôme : c'est une somme des fonctions puissances $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ multipliées par des constantes, et d'une constante.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) $x \mapsto 6 - 2x$ est un polynôme continu sur $\mathbb{R}$, et $6 - 2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 3$. La racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$. Par composée, g est continue sur $]-\infty\,;3]$.

(c) h est le quotient de deux polynômes. Le dénominateur $x + 3$ ne s'annule qu'en -3. Par quotient, h est continue sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]-3\,;+\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est pas définie en -3.

(d) $x \mapsto x^2 - 1$ est un polynôme continu sur $\mathbb{R}$ et l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Par composée, k est continue sur $\mathbb{R}$.

(e) Le numérateur e^x est continu sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur $x^2 + 4$ est un polynôme et $x^2 + 4 \geqslant 4 > 0$, donc il ne s'annule pas. Par quotient, m est continue sur $\mathbb{R}$.

(f) $x \mapsto x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. Par composée, $x \mapsto |x - 2|$ est continue sur $\mathbb{R}$. $3x^2$ est un polynôme. Par somme, p est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Limites par continuité**

(a) $-2+\frac{1}{n} \to -2$ et l'exponentielle est continue en -2, donc $\lim a_n = \mathrm{e}^{-2}$.

(b) $16-\frac{7}{n^2} \to 16$. Pour $n \geqslant 1$, on a $16-\frac{7}{n^2} \geqslant 9 \geqslant 0$, donc b_n est bien défini. La racine carrée est continue en 16, donc $\lim b_n = \sqrt{16} = 4$.

(c) $\frac{3}{n}-5 \to -5$ et la valeur absolue est continue en -5, donc $\lim c_n = |-5| = 5$.

(d) $\mathrm{e}^{-n} \to 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas en 0, donc elle est continue en 0. Ainsi $\lim d_n = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$.

(e) $2-\frac{3}{n} \to 2$ et la fonction cube, qui est un polynôme, est continue en 2.
Donc $\lim s_n = 2^3 = 8$.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur la continuité**

(a) Faux. Le dénominateur x^2-1 s'annule en -1 et en 1, donc g n'est pas définie en ces points. Par quotient, g est continue sur $]-\infty\,;-1[$, sur $]-1\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

(b) Faux. Il faut $x^2-9 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$. Par composée du polynôme x^2-9 suivi de la racine carrée, k est continue sur $]-\infty\,;-3]$ et sur $[3\,;+\infty[$.

(c) Vrai. h est le produit du polynôme x^3 et de l'exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $h'(x) = (x^3+3x^2)\,\mathrm{e}^x$. Or une fonction dérivable est continue : la justification est valable.

(d) Faux : il faut que f soit continue en 2. Contre-exemple : $f(x) = 0$ si $x < 2$ et $f(x) = 1$ si $x \geqslant 2$. Avec $u_n = 2-\frac{1}{n}$, on a $u_n \to 2$ mais $f(u_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, donc $f(u_n) \to 0$, alors que $f(2) = 1$.

Ex. 11 ★★☆ **Inès compose une suite et une racine**

(a) Il faut $2x+3 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant -1{,}5$.
Donc f est définie sur $[-1{,}5\,;+\infty[$. Le polynôme $2x+3$ est continu sur cet intervalle et prend ses valeurs dans $[0\,;+\infty[$, où la racine carrée est continue. Par composée, f est continue sur $[-1{,}5\,;+\infty[$.

(b) $3-\frac{7}{n+2} = \frac{3(n+2)-7}{n+2} = \frac{3n-1}{n+2} = u_n$. Comme $n+2 \geqslant 2$, on a $\frac{7}{n+2} \leqslant 3{,}5$, donc $u_n \geqslant 3-3{,}5 = -0{,}5$. Ainsi $u_n \geqslant -1{,}5$ et $f(u_n)$ est bien défini.

(c) $\frac{7}{n+2} \to 0$, donc $\lim u_n = 3$. Comme f est continue en 3, on a $\lim \sqrt{2u_n+3} = f(3) = \sqrt{9} = 3$.

(d) $-u_n \to -3$ et l'exponentielle est continue en -3, donc $\lim \mathrm{e}^{-u_n} = \mathrm{e}^{-3}$.

Ex. 12 ★★★ **Racine d'un trinôme et suite qui s'en approche**

(a) $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$: ce trinôme a pour racines 1 et 3. Il est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines.
Donc $x^2-4x+3 \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;1] \cup [3\,;+\infty[$. On en déduit $D =]-\infty\,;1] \cup [3\,;+\infty[$.

(b) La fonction $u : x \mapsto x^2-4x+3$ est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $]-\infty\,;1]$, elle prend ses valeurs dans $[0\,;+\infty[$, où la racine carrée est continue. Par composée (u suivie de la racine carrée), f est continue sur $]-\infty\,;1]$. Le raisonnement est le même sur $[3\,;+\infty[$.

(c) Le numérateur $x \mapsto x$ est continu sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur f est continu sur chacun des deux intervalles. Il ne s'annule qu'en 1 et en 3, car $f(x) = 0 \iff x^2-4x+3 = 0$. Par quotient à dénominateur non nul, k est continue sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]3\,;+\infty[$. Comme $f(3) = 0$, k n'est pas définie en 3. Elle ne peut donc pas être continue sur $[3\,;+\infty[$.

(d) $5-\frac{3}{n+1} = \frac{5n+5-3}{n+1} = \frac{5n+2}{n+1} = u_n$. Pour $n \geqslant 2$, on a $n+1 \geqslant 3$, donc $\frac{3}{n+1} \leqslant 1$, d'où $u_n \geqslant 4$. Ainsi $u_n \in]3\,;+\infty[$: $f(u_n)$ et $k(u_n)$ sont bien définis. Comme $\frac{3}{n+1} \to 0$, on obtient $\lim u_n = 5$.

(e) $u_n \to 5$ et f est continue en 5 (car $5 \in [3\,;+\infty[$), donc $f(u_n) \to f(5) = \sqrt{25-20+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. De plus, k est continue en 5 (car $5 \in]3\,;+\infty[$), donc $k(u_n) \to k(5) = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

Ex. 13 ★★★ **Le capteur de Noah**

(a) Le numérateur $t \mapsto 8t$ et le dénominateur $t \mapsto t^2+4$ sont des polynômes, donc ils sont continus. Pour tout t, $t^2+4 \geqslant 4 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais. Par quotient à dénominateur non nul, C est continue sur $[0\,;+\infty[$.

(b) C est un quotient de polynômes dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, donc C est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. On a $C'(t) = \frac{8(t^2+4)-8t\times 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{32-8t^2}{(t^2+4)^2}$. Lina a raison : une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

(c) Faux. La racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0. En effet, pour $h > 0$, $\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, qui tend vers $+\infty$ quand $h \to 0^+$. La réciproque de « dérivable implique continue » est fausse.

(d) $\frac{3}{n+1} \to 0$, donc $\lim t_n = 2$. Comme C est continue en 2, $C(t_n) \to C(2) = \frac{16}{8} = 2$.

Ex. 13 **(suite)**

(e) Pour tout n, $\frac{3}{n+1} > 0$, donc $t_n \neq 2$ et $d(t_n) = C(t_n) \to 2$. Or $d(2) = 0 \neq 2$: $(d(t_n))$ ne tend pas vers $d(2)$. L'hypothèse qui manque est la continuité de d en 2. En effet, $\lim\limits_{t\to 2} d(t) = 2 \neq d(2)$.

Ex. 14 ★★★ **Une fonction logistique et sa racine**

(a) $x \mapsto -x$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$. L'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par somme, $x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et elle ne s'annule pas car $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1 > 0$. Par quotient de la constante 3 par cette fonction, h est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) $3 - \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{3+3\mathrm{e}^{-x}-3}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{3\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, et ce nombre est strictement positif. Ainsi $x \mapsto 3 - h(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (différence), à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, où la racine carrée est continue.
Donc q est définie sur $\mathbb{R}$ et, par composée, continue sur $\mathbb{R}$.

(c) $a_n \to 0$. Comme h est continue en 0, $h(a_n) \to h(0) = \frac{3}{2}$. Comme q est continue en 0, $q(a_n) \to q(0) = \sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(d) $+\infty$ n'est pas un réel : $h(+\infty)$ n'a pas de sens. Le théorème s'applique à une suite qui converge vers un réel a où h est continue, et ce n'est pas le cas de n. On calcule donc une limite : $\mathrm{e}^{-n} \to 0$, d'où $1 + \mathrm{e}^{-n} \to 1$ et, par quotient, $h(n) \to 3$.

(e) h est continue en ℓ et $c_n \to \ell$, donc $h(c_n) \to h(\ell)$. Par unicité de la limite, $h(\ell) = 2$. On en déduit $1 + \mathrm{e}^{-\ell} = \frac{3}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-\ell} = \frac{1}{2}$, d'où $\ell = \ln 2$.

3. *Théorème des valeurs intermédiaires*

Ex. 15 ★☆☆ **Rédiger le théorème des valeurs intermédiaires**

(a) On pose $f(x) = x^3 - 3x + 1$. f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $[0\,;1]$. $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Comme 0 est compris entre -1 et 1, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

(b) On pose $f(x) = x^3 + 2x$. f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $[1\,;2]$. $f(1) = 3$ et $f(2) = 8 + 4 = 12$. Comme $3 \leqslant 7 \leqslant 12$, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 7$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.

Ex. 15 **(suite)**

(c) L'équation équivaut à $g(x) = 0$ avec $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 3$. g est une somme de fonctions continues, donc elle est continue sur $[0\,;1]$. $g(0) = 1 + 0 - 3 = -2 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}72 > 0$. Comme 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$, d'après le TVI, $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

(d) $n = 2$ convient. On pose $f(x) = x^3 + 2x^2$. f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $[2\,;3]$. $f(2) = 8 + 8 = 16$ et $f(3) = 27 + 18 = 45$. Comme $16 \leqslant 20 \leqslant 45$, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 20$ admet au moins une solution dans $[2\,;3]$.

(e) L'équation équivaut à $f(x) = 0$ avec $f(x) = \frac{4}{x+1} - x$. Sur $[1\,;2]$, on a $x + 1 \neq 0$, donc f est une fonction rationnelle définie sur $[1\,;2]$ et elle y est continue. $f(1) = 2 - 1 = 1$ et $f(2) = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$. Comme 0 est compris entre $-\frac{2}{3}$ et 1, d'après le TVI, l'équation admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.

(f) h est continue sur $[-1\,;3]$ et 1 est compris entre $h(3) = -2$ et $h(-1) = 4$. D'après le TVI, l'équation $h(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-1\,;3]$. On ne peut rien dire de plus : le TVI ne donne ni la valeur de la solution ni le nombre de solutions.

Ex. 16 ★☆☆ **Ce que dit le TVI, et ce qu'il ne dit pas**

(a) Vrai. On pose $g(x) = f(x) - x$. g est une différence de fonctions continues, donc elle est continue sur $[0\,;2]$. $g(0) = -1 - 0 = -1$ et $g(2) = 3 - 2 = 1$. Comme 0 est compris entre -1 et 1, d'après le TVI, $g(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\,;2]$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

(b) Faux. On a bien $p(-2) = -6$ et $p(2) = 6$. Mais $p(x) = x(x-1)(x+1)$ s'annule en -1, en 0 et en 1 : il y a trois solutions. Le TVI donne « au moins une » solution, jamais une unique.

(c) Faux. Soit $f(x) = (x-1)^2$ sur $[0\,;3]$: $f(0) = 1$ et $f(3) = 4$ sont de même signe, et pourtant $f(1) = 0$. Une fonction peut s'annuler sans changer de signe. Si $f(a)$ et $f(b)$ ont le même signe, le TVI ne permet simplement rien de conclure.

(d) Faux. $g(-1) = -2 < 0$ et $g(1) = 2 > 0$. Mais pour $x < 0$, $g(x) = x - 1 < -1$, et pour $x \geqslant 0$, $g(x) = x + 1 \geqslant 1$: g ne s'annule jamais. Le TVI ne s'applique pas, car $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1 \neq g(0) = 1$: g n'est pas continue en 0.

Ex. 16 (suite)

(e) Faux. Le TVI demande seulement la continuité. $q(x) = x^2 - 3$ est continue sur $[-1\,;2]$ mais pas monotone (décroissante sur $[-1\,;0]$, croissante sur $[0\,;2]$). Pourtant $q(-1) = -2$ et $q(2) = 1$, donc le TVI donne au moins une solution de $q(x) = 0$ (ici $\sqrt{3}$). La monotonie ne sert que pour l'unicité (corollaire).

Ex. 17 ★★☆ La serre passe-t-elle par 20 °C ?

(a) T est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $[0\,;8]$. $T(0) = 12$ et $T(8) = 12 + 40 - 38{,}4 = 13{,}6$.

(b) Non. 20 n'est pas compris entre $T(0) = 12$ et $T(8) = 13{,}6$. Sur $[0\,;8]$ tout entier, le TVI ne permet donc rien de conclure (ni oui, ni non).

(c) $T(4) = 12 + 20 - 9{,}6 = 22{,}4$. T est continue sur $[0\,;4]$ et 20 est compris entre $T(0) = 12$ et $T(4) = 22{,}4$: d'après le TVI, $T(t) = 20$ a au moins une solution dans $[0\,;4]$. De même, T est continue sur $[4\,;8]$ et 20 est compris entre $T(8) = 13{,}6$ et $T(4) = 22{,}4$: il y a au moins une solution dans $[4\,;8]$. Comme $T(4) \neq 20$, ces deux solutions sont distinctes.

(d) $T(2) = 19{,}6$, $T(3) = 21{,}6$, $T(6) = 20{,}4$ et $T(7) = 17{,}6$. T est continue sur $[2\,;3]$ et $19{,}6 \leqslant 20 \leqslant 21{,}6$: d'après le TVI, la température vaut 20 °C à un instant de $[2\,;3]$, donc entre 10 h et 11 h. T est continue sur $[6\,;7]$ et $17{,}6 \leqslant 20 \leqslant 20{,}4$: elle vaut aussi 20 °C à un instant de $[6\,;7]$, donc entre 14 h et 15 h.

(e) Le TVI donne « au moins une » solution sur chaque intervalle, jamais le nombre exact de solutions. Pour compter, on résout $T(t) = 20$, c'est-à-dire $0{,}6t^2 - 5t + 8 = 0$: $\Delta = 25 - 19{,}2 = 5{,}8 > 0$, donc cette équation a exactement deux solutions réelles. D'après la question 4, elles sont dans $[2\,;3]$ et dans $[6\,;7]$, donc dans $[0\,;8]$. Sami a la bonne conclusion, mais le TVI seul ne suffit pas à la prouver.

Ex. 18 ★★☆ L'erreur de Hugo sur une équation de degré 3

(a) $f(0) = 3$ et $f(2) = 8 - 10 + 3 = 1$: les valeurs de Hugo sont justes. $f(1) = 1 - 5 + 3 = -1$.

(b) Quand $f(0)$ et $f(2)$ ont le même signe, le TVI ne permet rien de conclure. Il ne prouve pas qu'il n'y a pas de solution : f peut changer de signe entre 0 et 2, et c'est le cas puisque $f(1) < 0$.

Ex. 18 (suite)

(c) f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $[0\,;1]$ et sur $[1\,;2]$. 0 est compris entre $f(1) = -1$ et $f(0) = 3$: d'après le TVI, $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\,;1]$. 0 est aussi compris entre $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$: au moins une solution dans $[1\,;2]$. Comme $f(1) \neq 0$, ces solutions sont distinctes.

(d) $f(-3) = -27 + 15 + 3 = -9$. f est continue sur $[-3\,;0]$ et 0 est compris entre $f(-3) = -9$ et $f(0) = 3$: d'après le TVI, il y a au moins une solution dans $[-3\,;0]$. Comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, les solutions trouvées dans $]-3\,;0[$, $]0\,;1[$ et $]1\,;2[$ sont distinctes : il y en a au moins trois.

(e) On pose $g(x) = x^3 + bx + c$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (limite du terme de plus haut degré). Il existe donc un réel A tel que $g(A) < 0$ et un réel $B > A$ tel que $g(B) > 0$. g est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $[A\,;B]$, et 0 est compris entre $g(A)$ et $g(B)$. D'après le TVI, $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[A\,;B]$.

Ex. 19 ★★★ Inès et ses 10 km

(a) d est continue sur $[0\,;50]$, $d(0) = 0$ et $d(50) = 10$. Comme 7 est compris entre 0 et 10, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $d(t) = 7$ admet au moins une solution dans $[0\,;50]$: Inès passe au moins une fois par la borne des 7 km.

(b) Pour $t \in [0\,;25]$, on a $t + 25 \in [25\,;50]$. La fonction $t \mapsto t + 25$ est continue et d est continue sur $[0\,;50]$, donc par composition $t \mapsto d(t + 25)$ est continue sur $[0\,;25]$. g est une différence de fonctions continues, donc elle est continue sur $[0\,;25]$. $g(0) = d(25) - d(0) = d(25)$ et $g(25) = d(50) - d(25) = 10 - d(25)$, donc $g(0) + g(25) = 10$.

(c) Si $d(25) \leqslant 5$, alors $g(0) \leqslant 5$ et $g(25) = 10 - d(25) \geqslant 5$. Sinon, $g(0) > 5$ et $g(25) < 5$. Dans les deux cas, 5 est compris entre $g(0)$ et $g(25)$. g est continue sur $[0\,;25]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0\,;25]$ tel que $g(t_0) = 5$, soit $d(t_0 + 25) - d(t_0) = 5$. Entre t_0 et $t_0 + 25$, Inès parcourt exactement 5 km.

(d) $g(t) = \frac{t+25}{5} - \frac{t}{5} = 5$ pour tout $t \in [0\,;25]$. Tous les instants de $[0\,;25]$ conviennent : il y en a une infinité. Le TVI garantit au moins une solution, mais il ne dit pas combien il y en a.

Ex. 19 **(suite)**

(e) $d(50) = 0{,}004 \times 2500 = 10$. $g(t) = 0{,}004\left((t+25)^2 - t^2\right) = 0{,}004(50t + 625) = 0{,}2t + 2{,}5$. On résout $0{,}2t + 2{,}5 = 5 : t_0 = 12{,}5$. Inès parcourt exactement 5 km entre $t = 12{,}5$ et $t = 37{,}5$ minutes.

Ex. 20 ★★★ **Une fonction en deux morceaux**

(a) $f(0) = -2$ et $f(3) = 6 \times 3 - 4 = 14$. Sur $[0\,;1[$: $x^2 - 2 = 0$ donne $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$, qui ne sont pas dans $[0\,;1[$ (car $\sqrt{2} > 1$). Sur $[1\,;3]$: $6x - 4 = 0$ donne $x = \frac{2}{3}$, qui n'est pas dans $[1\,;3]$. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc aucune solution dans $[0\,;3]$.

(b) Le TVI exige que f soit continue sur $[0\,;3]$. Or $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 - 2 = -1$ et $f(1) = 6 - 4 = 2$: la limite à gauche en 1 est différente de $f(1)$, donc f n'est pas continue en 1. Le TVI ne s'applique pas, et la question 1 montre d'ailleurs que f ne s'annule pas.

(c) Sur $[0\,;1[$ et sur $]1\,;3]$, f est polynomiale, donc continue. En 1 : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$ et $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = m - 4$. f est continue en 1 si et seulement si $m - 4 = -1$, c'est-à-dire $m = 3$.

(d) Avec $m = 3$, f est continue sur $[0\,;3]$, $f(0) = -2$ et $f(3) = 9 - 4 = 5$. Comme 0 est compris entre -2 et 5, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;3]$. Sur $[0\,;1[$, il n'y a pas de solution (voir question 1). Sur $[1\,;3]$, $3x - 4 = 0$ donne $x = \frac{4}{3}$, qui est bien dans $[1\,;3]$. La seule solution est $\frac{4}{3}$.

Ex. 21 ★★★ **Trois solutions sans monotonie**

(a) $f(0) = -3$, $f(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1$, $f(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$ et $f(4) = 64 - 96 + 36 - 3 = 1$.

(b) f est une fonction polynôme, donc continue sur $[0\,;1]$, sur $[1\,;3]$ et sur $[3\,;4]$. 0 est compris entre $f(0) = -3$ et $f(1) = 1$, entre $f(1) = 1$ et $f(3) = -3$, et entre $f(3) = -3$ et $f(4) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles $]0\,;1[$, $]1\,;3[$ et $]3\,;4[$ (les bornes ne sont pas des solutions). Ces intervalles sont disjoints, donc l'équation a au moins trois solutions dans $[0\,;4]$.

(c) $f(2) = 8 - 24 + 18 - 3 = -1$. f est continue sur $[1\,;2]$ et 0 est compris entre $f(2) = -1$ et $f(1) = 1$: d'après le TVI, $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$. Avec la question 2, les intervalles $[0\,;1]$, $[1\,;2]$ et $[3\,;4]$ conviennent. On n'a utilisé que la continuité de f : la monotonie n'est pas une hypothèse du TVI.

Ex. 21 **(suite)**

(d) On pose $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. h est une fonction polynôme, donc continue sur $[3\,;5]$. $h(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ et $h(5) = 125 - 150 + 45 = 20$. Comme 5 est compris entre 0 et 20, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 5$ admet au moins une solution dans $[3\,;5]$.

(e) Faux. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4)$, ce qu'on vérifie en développant.
Donc $g(1) = 0$: g s'annule sur $[0\,;2]$. Pourtant $g(0) = -4$ et $g(2) = 8 - 24 + 18 - 4 = -2$ sont de même signe. La réciproque du TVI est fausse : une fonction peut s'annuler sans changer de signe, comme x^2 en 0.

4. *Corollaire : solution unique, nombre de solutions*

Ex. 22 ★★★ **Automatismes : compter les solutions sur un tableau**

(a) Sur $]-\infty\,;-1]$, f prend ses valeurs dans $]2\,;5]$ et 0 n'y est pas : aucune solution. Sur $[-1\,;3]$, f est continue et strictement décroissante de 5 à -4, et 0 est compris entre -4 et 5 : une solution d'après le corollaire du TVI. Sur $[3\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de -4 à $+\infty$: une solution. Au total, 2 solutions.

(b) Sur $]-\infty\,;-1]$, f est continue et strictement croissante, et 3 est strictement compris entre la limite 2 et $f(-1) = 5$: une solution. Sur $[-1\,;3]$, 3 est compris entre -4 et 5 : une solution. Sur $[3\,;+\infty[$, 3 est compris entre -4 et $+\infty$: une solution. Au total, 3 solutions.

(c) Non. Sur $]-\infty\,;-1]$, f est strictement croissante et 2 est sa limite en $-\infty$, jamais atteinte : $f(x) > 2$, donc aucune solution. Sur $[-1\,;3]$, f est continue et strictement décroissante de 5 à -4, et 2 est compris entre -4 et 5 : une solution d'après le corollaire du TVI. Sur $[3\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de -4 à $+\infty$: une solution. Au total, 2 solutions.

(d) Faux. Sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[-1\,;3]$, la seule solution est $x = -1$ (car $f(-1) = 5$ et la monotonie est stricte) : on ne la compte qu'une fois. Sur $[3\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de -4 à $+\infty$, et 5 est compris entre les deux : une solution. Au total, 2 solutions.

(e) Vrai. Sur $]-\infty\,;3]$, $f(x) \leqslant 5 < 6$: aucune solution. Sur $[3\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de $f(3) = -4$ à $+\infty$, et 6 est compris entre les deux : d'après le corollaire du TVI, une unique solution, qui est supérieure à 3.

Ex. 22 **(suite)**

(f) Sur $]-\infty\,;-1]$, $f(x)>2$. Sur $[-1\,;+\infty[$, le minimum de f est $f(3)=-4$, donc $f(x)\geqslant -4$. Ainsi, pour $k<-4$, il n'y a aucune solution. Pour $k\geqslant -4$, k est compris entre -4 et $+\infty$, et f est continue et strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$: il y a au moins une solution. Réponse : $k<-4$.

(g) Exactement une solution pour $k=-4$ (seulement $x=3$, partagé par deux morceaux) et pour $k>5$ (seulement sur $[3\,;+\infty[$). Pour $k<-4$: aucune ; pour $-4<k\leqslant 2$: deux ; pour $2<k<5$: trois ; pour $k=5$: deux.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : le corollaire s'applique-t-il ?**

(a) Non : f est continue mais pas monotone sur $[-2\,;3]$ (décroissante sur $[-2\,;0]$, croissante sur $[0\,;3]$). En fait $x^2=1$ a deux solutions, -1 et 1.

(b) Oui. f est dérivable donc continue sur $[0\,;2]$, et $f'(x)=6x^2+1>0$: f est strictement croissante. $f(0)=0$, $f(2)=18$ et 10 est compris entre 0 et 18. D'après le corollaire du TVI, il y a une unique solution.

(c) Non : f est continue et strictement décroissante, avec $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Mais 0 n'est pas STRICTEMENT compris entre 0 et 1 : c'est une limite, jamais atteinte. Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$, il n'y a aucune solution.

(d) Non : f est croissante mais pas STRICTEMENT croissante, puisqu'elle est constante sur $[0\,;1]$. Tout x de $[0\,;1]$ est solution : il y a une infinité de solutions.

(e) Non : f n'est pas définie sur un intervalle (pas de valeur en 0). Pour $x\neq 0$, $\frac{1}{x}\neq 0$: aucune solution, même si 0 est compris entre $f(-1)=-1$ et $f(1)=1$.

(f) Non : f est continue et strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes), mais $f(0)=0$, $f(4)=6$ et 7 n'est pas compris entre 0 et 6. Comme $f(x)\leqslant 6$ sur $[0\,;4]$, il n'y a aucune solution.

Ex. 24 ★★☆ **Rédiger le corollaire sur un intervalle ouvert**

(a) f est une fonction rationnelle définie sur $]-3\,;+\infty[$, donc dérivable et continue sur cet intervalle. $f'(x)=\frac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2}=\frac{5}{(x+3)^2}>0$: f est strictement croissante.

(b) Quand $x\to -3^+$, $2x+1\to -5$ et $x+3\to 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-\infty$. Pour $x>0$, $f(x)=\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) f est continue et strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$, avec des limites $-\infty$ et 2 aux bornes. Comme 1 est strictement compris entre $-\infty$ et 2, d'après le corollaire du TVI, $f(x)=1$ admet une unique solution α. Avec $x+3>0$: $2x+1=x+3$, donc $\alpha=2$.

(d) Non. Le corollaire exige que k soit STRICTEMENT compris entre les limites $-\infty$ et 2. Or 2 est la limite en $+\infty$, jamais atteinte : $f(x)=2-\frac{5}{x+3}<2$ pour tout $x>-3$. L'équation $f(x)=2$ n'a aucune solution ($2x+1=2x+6$ est impossible).

(e) -100 est strictement compris entre $-\infty$ et 2. f est continue et strictement croissante, donc d'après le corollaire du TVI il y a une unique solution. Elle vaut $x=-\frac{301}{102}\approx -2{,}95$.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur de Malo**

(a) $g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$: positif sur $[-2\,;0]$, négatif sur $[0\,;2]$, positif sur $[2\,;4]$. g n'est pas strictement monotone sur $[-2\,;4]$: le corollaire ne s'applique pas. Le TVI donne seulement au moins une solution.

(b) $g(-2)=-16$, $g(0)=4$, $g(2)=0$, $g(4)=20$.

x	−2	0	2	4
g(x)	−16	↗ 4	↘ 0	↗ 20

(c) Sur $[-2\,;0]$, g est continue et strictement croissante de -16 à 4, et 0 est entre les deux : une solution. Sur $[0\,;2]$ et sur $[2\,;4]$, la seule solution est $x=2$ (car $g(2)=0$ et la monotonie est stricte) : on la compte une fois. Au total, 2 solutions.

(d) Sur $[-2\,;0]$, 2 est entre -16 et 4 ; sur $[0\,;2]$, entre 0 et 4 ; sur $[2\,;4]$, entre 0 et 20. g est continue et strictement monotone sur chaque morceau, et 2 n'est atteint en aucune borne : une solution par morceau, 3 solutions au total.

(e) $g(2)=0$ (vu dans le tableau), donc $g(x)=(x-2)(x^2+bx+c)$. Par identification, $g(x)=(x-2)(x^2-x-2)$. Or $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, donc $g(x)=(x+1)(x-2)^2$. Ainsi $g(x)=0$ si et seulement si $x=-1$ ou $x=2$: on retrouve 2 solutions.

Ex. 26 ★★★ **Problème : une fonction auxiliaire et son signe**

(a) $g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ a le signe de $x+1$: g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ et strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.
$g(-1) = -\mathrm{e}^{-1} - 2 \approx -2{,}37$. En $-\infty$: $x\mathrm{e}^x \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$. En $+\infty$: $x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^x \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g(x)	-2	$\searrow -2-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow +\infty$

(b) Sur $]-\infty\,;-1]$, g décroît strictement de la limite -2 (jamais atteinte) jusqu'à $g(-1) = -2-\mathrm{e}^{-1}$: pour tout x de ce morceau, $-2-\mathrm{e}^{-1} \leqslant g(x) < -2 < 0$.
Donc $g(x) = 0$ n'y a aucune solution. Sur $[-1\,;+\infty[$, g est continue (dérivable), strictement croissante, $g(-1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. 0 est compris entre $g(-1)$ et $+\infty$, donc, d'après le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $[-1\,;+\infty[$. Au total, il y a une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

(c) $g(0{,}8) \approx -0{,}22 < 0$ et $g(0{,}9) \approx 0{,}21 > 0$. Puis $g(0{,}85) \approx -0{,}011 < 0$ et $g(0{,}86) \approx 0{,}032 > 0$. Comme g est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$, on obtient $0{,}85 < \alpha < 0{,}86$.

(d) g est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$ et $g(\alpha) = 0$, et $g < 0$ sur $]-\infty\,;-1]$:
Donc $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$. $f'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x - 2 = x\mathrm{e}^x - 2 = g(x)$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$: f atteint son minimum en α.

(e) $g(\alpha) = 0$ donne $\alpha\mathrm{e}^\alpha = 2$. Comme $g(0) = -2 \neq 0$, on a $\alpha \neq 0$, donc $\mathrm{e}^\alpha = \frac{2}{\alpha}$. Alors $f(\alpha) = (\alpha-1)\times\frac{2}{\alpha} - 2\alpha = 2 - \frac{2}{\alpha} - 2\alpha$, c'est-à-dire $f(\alpha) = 2 - 2\alpha - \frac{2}{\alpha}$.

Ex. 27 ★★★ **Discuter selon k le nombre de solutions**

(a) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)\mathrm{e}^{-x} = (1-2x)\mathrm{e}^{-x}$, du signe de $1-2x$. f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$, avec $f(\frac{1}{2}) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 1{,}21$. En $-\infty$: $2x+1 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. En $+\infty$: $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \to 0$. Tableau : $-\infty \nearrow \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \searrow 0$.

Ex. 27 (suite)

(b) Sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$: f est continue (dérivable), strictement croissante, de $-\infty$ à $\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 1{,}21$; 1 est compris entre les deux, donc d'après le corollaire du TVI, il y a une unique solution (c'est $x = 0$, car $f(0) = 1$). Sur $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$: f est continue, strictement décroissante, de $\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ à la limite 0 ; 1 est strictement compris entre 0 et $\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, donc une unique solution. L'équation $f(x) = 1$ a exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

(c) Non. Sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$, f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, et 0 est compris entre les deux : une unique solution d'après le corollaire du TVI. Sur $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$, 0 est la limite en $+\infty$, jamais atteinte : $2x+1 > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f(x) > 0$. Il n'y a aucune solution sur ce morceau. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f(x) = 0 \iff 2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$: une seule solution.

(d) Sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$, f prend chaque valeur de $]-\infty\,;\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}]$ exactement une fois. Sur $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$, elle prend chaque valeur de $]0\,;\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}]$ exactement une fois (corollaire du TVI, 0 n'est pas atteint). Si $k \leqslant 0$: une solution. Si $0 < k < \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$: deux solutions. Si $k = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$: une solution ($x = \frac{1}{2}$). Si $k > \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$: aucune solution.

Ex. 28 ★★★ **Durée d'efficacité d'un médicament**

(a) $C'(t) = 10\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 5t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 10\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1-0{,}5t)$, du signe de $1-0{,}5t$. C est strictement croissante sur $[0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;12]$. $C(0) = 0$, $C(2) = 20\mathrm{e}^{-1} = \frac{20}{\mathrm{e}} \approx 7{,}36$ et $C(12) = 120\mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}30$.

(b) Sur $[0\,;2]$: C est continue (dérivable), strictement croissante, $C(0) = 0$ et $C(2) \approx 7{,}36$; 4 est compris entre ces valeurs, donc d'après le corollaire du TVI, $C(t) = 4$ a une unique solution t_1 dans $[0\,;2]$. Sur $[2\,;12]$: C est continue, strictement décroissante, $C(2) \approx 7{,}36$ et $C(12) \approx 0{,}30$; 4 est compris entre les deux, donc une unique solution t_2. En tout : exactement deux solutions, et $C(t) \geqslant 4$ sur $[t_1\,;t_2]$.

(c) Au départ, $C(a) - 4$ et $C(b) - 4$ sont de signes contraires. Si $C(a) - 4$ et $C(m) - 4$ sont de signes contraires (ou si l'un est nul), C étant continue, le TVI donne une solution dans $[a\,;m]$: on garde $[a\,;m]$. Sinon, ce sont $C(m) - 4$ et $C(b) - 4$ qui sont de signes contraires : la solution est dans $[m\,;b]$. Le test n'utilise que des signes, pas le sens de variation. La stricte monotonie assure que c'est toujours la même solution qu'on encadre.

Ex. 28 **(suite)**

(d) $[0\,;2]$, $m=1$: $C(1)\approx 6{,}07>4$ et $C(0)-4<0$, donc $b=1$. $m=0{,}5$: $C(0{,}5)\approx 3{,}89<4$, même signe que $C(0)-4$, donc $a=0{,}5$. $m=0{,}75$: $C(0{,}75)\approx 5{,}15>4$, donc $b=0{,}75$. $m=0{,}625$: $C(0{,}625)\approx 4{,}57>4$, donc $b=0{,}625$. La longueur vaut $0{,}125>0{,}1$. $m=0{,}5625$: $C(0{,}5625)\approx 4{,}25>4$, donc $b=0{,}5625$. La longueur vaut $0{,}0625\leqslant 0{,}1$: l'appel renvoie `(0.5, 0.5625)`, donc $0{,}5\leqslant t_1\leqslant 0{,}5625$.

(e) $0{,}5\leqslant t_1\leqslant 0{,}5625$ et $5{,}076171875\leqslant t_2\leqslant 5{,}0859375$. Donc $5{,}076171875-0{,}5625\leqslant t_2-t_1\leqslant 5{,}0859375-0{,}5$, soit $4{,}513671875\leqslant t_2-t_1\leqslant 4{,}5859375$. Le médicament est efficace pendant environ 4,5 heures, entre 4,51 h et 4,59 h.

5. *Encadrer une solution : balayage et dichotomie*

Ex. 29 ★☆☆ **Amplitude, défaut, excès, arrondi**

(a) L'amplitude vaut $2{,}37-2{,}36=0{,}01$.

(b) Par défaut : 2,36. Par excès : 2,37.

(c) Non. Si $\alpha=2{,}361$, l'arrondi est 2,36. Si $\alpha=2{,}368$, l'arrondi est 2,37. Il faudrait savoir si α est avant ou après 2,365.

(d) Oui. On a $3{,}125\leqslant 3{,}126<\beta<3{,}135$. Tous les nombres de $[3{,}125\,;3{,}135[$ ont pour arrondi au centième 3,13.

(e) L'amplitude vaut $\frac{5-2}{2^6}=\frac{3}{64}=0{,}046\,875$.

(f) Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{1-(-1)}{2^n}=\frac{2}{2^n}$. On veut $\frac{2}{2^n}\leqslant 0{,}01$, soit $2^n\geqslant 200$. Or $2^7=128<200$ et $2^8=256\geqslant 200$. Il faut donc au minimum 8 étapes.

Ex. 30 ★☆☆ **Balayage : suivre le signe de f(x) − 4**

(a) Non. On résout $f(x)=4$: il faut suivre le signe de $f(x)-4$, pas celui de $f(x)$. Or $f(1{,}1)-4<0$ et $f(1{,}2)-4>0$: le signe change.

(b) $f(1{,}1)\approx 3{,}531<4$ et $f(1{,}2)\approx 4{,}128>4$. Comme f est strictement croissante, $1{,}1<\alpha<1{,}2$.

(c) $f(1{,}17)\approx 3{,}942$ et $f(1{,}18)\approx 4{,}003$.

(d) $f(1{,}17)<4<f(1{,}18)$. Comme f est strictement croissante, $1{,}17<\alpha<1{,}18$.

(e) $f(1{,}175)\approx 3{,}972<4$. Comme f est strictement croissante, $1{,}175<\alpha<1{,}18$. L'arrondi de α au centième est donc 1,18.

Ex. 31 ★★☆ **Dichotomie à la main avec l'exponentielle**

(a) g est continue sur $[0\,;1]$ (somme de fonctions continues). $g'(x)=\mathrm{e}^x+1>0$, donc g est strictement croissante. $g(0)=-2<0$ et $g(1)=\mathrm{e}-2\approx 0{,}718>0$. 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$. D'après le corollaire du TVI, $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$.

(b) Étape 1 : $g(0{,}5)\approx -0{,}851<0$, on garde $[0{,}5\,;1]$. Étape 2 : $m=0{,}75$, $g(0{,}75)\approx -0{,}133<0$, donc $g(0{,}5)\times g(0{,}75)>0$ et on garde $[0{,}75\,;1]$. Étape 3 : $m=0{,}875$, $g(0{,}875)\approx 0{,}274>0$, on garde $[0{,}75\,;0{,}875]$. Étape 4 : $m=0{,}812\,5$, $g(0{,}812\,5)\approx 0{,}066>0$, on garde $[0{,}75\,;0{,}812\,5]$.

(c) $0{,}75<\alpha<0{,}812\,5$. Amplitude : $\frac{1-0}{2^4}=\frac{1}{16}=0{,}062\,5$.

(d) $g(0{,}785)\approx -0{,}023<0$ et $g(0{,}795)\approx 0{,}009>0$. Comme g est strictement croissante, $0{,}785<\alpha<0{,}795$. L'arrondi au centième est donc 0,79 : Lou a tort. L'encadrement d'amplitude 0,062 5 ne suffisait pas pour conclure.

Ex. 32 ★★☆ **Corriger un programme de dichotomie**

(a) Au départ, $b-a=1$ et $1<0{,}05$ est faux : la boucle ne s'exécute jamais. On doit continuer tant que l'amplitude est trop grande : `while b - a > p:`.

(b) Si $h(a)\times h(m)\leqslant 0$, le signe change entre a et m : on doit garder $[a\,;m]$, donc écrire `b = m`. Sinon, on garde $[m\,;b]$ avec `a = m`. Il faut donc échanger les deux lignes.

(c) Après n passages, l'amplitude vaut $\frac{1}{2^n}$. Or $\frac{1}{2^4}=0{,}062\,5>0{,}05$ et $\frac{1}{2^5}=0{,}031\,25\leqslant 0{,}05$. La boucle fait donc 5 passages.

(d) $h(1{,}5)=0{,}625>0$: on garde $[1\,;1{,}5]$. $h(1{,}25)\approx -1{,}484<0$: on garde $[1{,}25\,;1{,}5]$. $h(1{,}375)\approx -0{,}510<0$: on garde $[1{,}375\,;1{,}5]$. $h(1{,}437\,5)\approx 0{,}037>0$: on garde $[1{,}375\,;1{,}437\,5]$. $h(1{,}406\,25)\approx -0{,}242<0$: on garde $[1{,}406\,25\,;1{,}437\,5]$. Le programme renvoie `(1.40625, 1.4375)`.

Ex. 33 ★★★ **Balayage, arrondi et encadrement de e^α**

(a) f est dérivable (donc continue) sur $[0\,;+\infty[$, comme produit de fonctions dérivables. $f'(x)=\mathrm{e}^x+x\,\mathrm{e}^x=(1+x)\,\mathrm{e}^x>0$: f est strictement croissante. $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (produit de limites). f est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, et 3 est compris entre $f(0)=0$ et $+\infty$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

Ex. 33 (suite)

(b) On suit le signe de $f(x) - 3$. Au pas de 0,1 : $f(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718$, donc $f(1) - 3 < 0$, et $f(1{,}1) \approx 3{,}305$, donc $f(1{,}1) - 3 > 0$. Ainsi $1 < \alpha < 1{,}1$. Au pas de 0,01 : $f(1{,}04) \approx 2{,}942 < 3$ et $f(1{,}05) \approx 3{,}000\,5 > 3$. Donc $1{,}04 < \alpha < 1{,}05$.

(c) Valeur approchée par défaut à 10^{-2} près : 1,04. Valeur approchée par excès : 1,05.

(d) Non. f n'est pas affine : la valeur de f aux bornes ne dit pas de quel côté de 1,045 se trouve α. Il faut le signe de $f(1{,}045) - 3$. Or $f(1{,}045) \approx 2{,}971 < 3$ et f est strictement croissante, donc $\alpha > 1{,}045$. Ainsi $1{,}045 < \alpha < 1{,}05$: l'arrondi de α au centième est 1,05.

(e) $\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha} = 3$ et $\alpha \neq 0$ (car $f(0) = 0 \neq 3$), donc $\mathrm{e}^{\alpha} = \frac{3}{\alpha}$. On a $1{,}045 < \alpha < 1{,}05$ et la fonction $x \mapsto \frac{3}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{3}{1{,}05} < \mathrm{e}^{\alpha} < \frac{3}{1{,}045}$, soit $2{,}857 < \mathrm{e}^{\alpha} < 2{,}871$. L'amplitude vaut $0{,}014 < 0{,}02$. Avec l'encadrement $1{,}04 < \alpha < 1{,}05$ seul, on aurait obtenu une borne supérieure $\frac{3}{1{,}04} \approx 2{,}885$, soit une amplitude trop grande.

Ex. 34 ★★★ Dichotomie avec une fonction décroissante : programme et erreurs

(a) φ est un polynôme, donc elle est continue et dérivable sur $[1\,;2]$. $\varphi'(x) = -3x^2 - 1 < 0$: φ est strictement décroissante. $\varphi(1) = 3 > 0$ et $\varphi(2) = -5 < 0$: 0 est compris entre $\varphi(2)$ et $\varphi(1)$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1\,;2]$.

(b) La condition est `phi(a) * phi(m) <= 0` : le signe de φ change dans $[a\,;m]$, donc α est dans $[a\,;m]$. Ce test convient aussi pour une fonction décroissante.
$\varphi(1{,}5) = 0{,}125 > 0$, donc $[1{,}5\,;2]$; $\varphi(1{,}75) \approx -2{,}109$, donc $[1{,}5\,;1{,}75]$; $\varphi(1{,}625) \approx -0{,}916$, donc $[1{,}5\,;1{,}625]$; $\varphi(1{,}562\,5) \approx -0{,}377$, donc $[1{,}5\,;1{,}562\,5]$; $\varphi(1{,}531\,25) \approx -0{,}122$, donc $[1{,}5\,;1{,}531\,25]$; $\varphi(1{,}515\,625) \approx 0{,}003 > 0$, donc $[1{,}515\,625\,;1{,}531\,25]$; $\varphi(1{,}523\,437\,5) \approx -0{,}059$, donc $[1{,}515\,625\,;1{,}523\,437\,5]$. L'appel renvoie `(1.515625, 1.5234375)`.

(c) Comme $\varphi(m) > 0$ à chaque milieu, b prend les valeurs $1{,}5\,;1{,}25\,;\ldots\,;1 + \frac{1}{128}$, et l'appel renvoie `(1, 1.0078125)`. Ce test ne convient qu'à une fonction croissante. Ici, φ est décroissante : si $\varphi(m) > 0$, alors $\alpha > m$ et il faudrait garder $[m\,;b]$. Inès garde la moitié où le signe ne change pas : $\varphi(1) > 0$ et $\varphi(1{,}007\,812\,5) > 0$, donc α n'est pas dans l'intervalle renvoyé.

Ex. 34 (suite)

(d) m vaut 1,5 une fois pour toutes. Au premier passage, $\varphi(1) \times \varphi(1{,}5) > 0$, donc $a = 1{,}5$. Ensuite, a reçoit toujours 1,5 et b reste égal à 2. L'amplitude reste égale à $0{,}5 > 0{,}01$: la boucle ne s'arrête jamais (boucle infinie).

(e) Il obtient `(1.52, 1.52)` : ce n'est plus un encadrement. Pire, $\varphi(1{,}52) \approx -0{,}032 < 0$ et φ est décroissante, donc $\alpha < 1{,}52$: la borne de gauche arrondie dépasse α. Il faut arrondir a par défaut et b par excès. On teste 1,51 : $\varphi(1{,}51) \approx 0{,}047 > 0$ et $\varphi(1{,}52) < 0$, donc $1{,}51 < \alpha < 1{,}52$.

Ex. 35 ★★★ Durée d'efficacité d'un médicament

(a) C est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (produit et composée). $C'(t) = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 2t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = (4 - 2t)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, qui a le signe de $4 - 2t$.
Donc C est strictement croissante sur $[0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$. $C(0) = 0$ et $C(2) = 8\,\mathrm{e}^{-1} \approx 2{,}94$. On écrit $C(t) = 8 \times X\,\mathrm{e}^{-X}$ avec $X = 0{,}5t \to +\infty$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0$. Tableau : $0 \nearrow 8\,\mathrm{e}^{-1} \searrow 0$.

(b) Sur $[0\,;2]$, C est continue et strictement croissante, et 2 est compris entre $C(0) = 0$ et $C(2) \approx 2{,}94$. D'après le corollaire du TVI, il existe une unique solution t_1, et elle est dans $]0\,;2[$. Sur $[2\,;+\infty[$, C est continue et strictement décroissante, avec $C(2) > 2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0 < 2$. D'après le corollaire, il existe une unique solution t_2 dans $]2\,;+\infty[$. L'équation a donc exactement deux solutions.

(c) On suit le signe de $C(t) - 2$. Pour t_1 : $C(0{,}7) \approx 1{,}973 < 2$ et $C(0{,}8) \approx 2{,}145 > 2$, puis $C(0{,}71) \approx 1{,}991 < 2$ et $C(0{,}72) \approx 2{,}009 > 2$.
Donc $0{,}71 < t_1 < 0{,}72$. Pour t_2 : $C(4{,}3) \approx 2{,}004 > 2$ et $C(4{,}4) \approx 1{,}950 < 2$, puis $C(4{,}30) > 2$ et $C(4{,}31) \approx 1{,}998 < 2$.
Donc $4{,}30 < t_2 < 4{,}31$.

(d) On combine les bornes : $4{,}30 - 0{,}72 < t_2 - t_1 < 4{,}31 - 0{,}71$, soit $3{,}58 < D < 3{,}60$. Les amplitudes s'ajoutent : cet encadrement a une amplitude de 0,02. Le raisonnement ne suffit pas : on sait seulement que 3,59 est une valeur approchée de D à 10^{-2} près. Si $D < 3{,}585$, l'arrondi est 3,58 ; si $D \geqslant 3{,}595$, c'est 3,60. Pour conclure, il faut encadrer t_1 et t_2 plus finement.

Ex. 35 **(suite)**

(e) Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{0{,}1}{2^n}$. On veut $\frac{0{,}1}{2^n} \leqslant 10^{-4}$, c'est-à-dire $2^n \geqslant 1\,000$. Or $2^9 = 512 < 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 \geqslant 1\,000$. Il faut donc au minimum 10 étapes.

6. *Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et point fixe*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : candidats et pièges**

(a) $f(x) = 0{,}8x + 3$ est affine, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en ℓ. D'après le théorème du point fixe, $\ell = 0{,}8\ell + 3$, soit $0{,}2\ell = 3 : \ell = 15$.

(b) $g(x) = \frac{x^2+6}{5}$ est un polynôme, donc g est continue en ℓ. D'après le théorème du point fixe, $\ell = \frac{\ell^2+6}{5}$, soit $\ell^2 - 5\ell + 6 = 0$, donc $\ell = 2$ ou $\ell = 3$. Comme $0 \leqslant v_n \leqslant 2{,}5$, on a $0 \leqslant \ell \leqslant 2{,}5$: on élimine 3, donc $\lim v_n = 2$.

(c) Non. $w_1 = 3$, $w_2 = 1$, $w_3 = 3\ldots$ La suite alterne entre 1 et 3 : elle ne converge pas. Un point fixe donne seulement un candidat, une fois la convergence prouvée.

(d) $h(2) = 2 + 1 = 3$. Pour tout n, $t_n < 2$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 0{,}5 \times 2 + 1 = 2 \neq h(2)$: h n'est pas continue en 2, donc le théorème du point fixe ne s'applique pas.

Ex. 37 ★☆☆ **Conjecturer avec un escalier**

(a) $u_1 \approx 2$. Sur l'axe des abscisses, u_2 et u_3 sont entre 2 et 3 : $2 < u_2 < 3$ et $2 < u_3 < 3$, avec $u_2 < u_3$.

(b) $u_1 = \frac{4\times1}{1+1} = 2$ et $u_2 = \frac{4\times2}{2+1} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.

(c) La suite semble croissante et semble tendre vers 3, l'abscisse du point d'intersection non nul de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$.

(d) Pour $x \geqslant 0$, $\frac{4x}{x+1} = x \iff 4x = x(x+1) \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0 : x = 0$ ou $x = 3$.

(e) Non. L'escalier sert seulement à conjecturer. Il faut d'abord prouver la convergence (récurrence, puis convergence monotone). Ensuite, f continue en ℓ donne $\ell = 0$ ou $\ell = 3$, et c'est l'encadrement des termes qui permet de choisir.

Ex. 38 ★★☆ **Méthode complète et programme de seuil**

(a) $x \mapsto 2x + 3$ est affine, donc continue et croissante, et $2x + 3 \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. La fonction racine carrée est continue et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Par composition, f est continue et croissante sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. Enfin, $f(3) = \sqrt{9} = 3$.

Ex. 38 **(suite)**

(b) (u_n) est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant 3$.

(c) f est continue sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, donc en ℓ : $\ell = \sqrt{2\ell+3}$. En élevant au carré, $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, donc $\ell = -1$ ou $\ell = 3$. Comme $\ell \geqslant 0$, on élimine -1 : $\lim u_n = 3$.

(d) Comme $u_n \leqslant 3$, $|u_n - 3| = 3 - u_n$. La condition est `3 - u >= 0.001`. Le programme renvoie 8 ($3 - u_7 \approx 0{,}0020$ et $3 - u_8 \approx 0{,}00065$).

Ex. 39 ★★☆ **Le bassin qui s'évapore**

(a) Après évaporation, il reste $0{,}5u_n$, puis on ajoute 2 : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$.
Donc $u_1 = 0{,}5 \times 10 + 2 = 7$.

(b) f est affine de coefficient $0{,}5 > 0$, donc croissante. Si $4 \leqslant x \leqslant 10$, alors $f(4) \leqslant f(x) \leqslant f(10)$, soit $4 \leqslant f(x) \leqslant 7 \leqslant 10$. Récurrence : $u_0 = 10$, donc $4 \leqslant u_0 \leqslant 10$. Si $4 \leqslant u_k \leqslant 10$, alors $u_{k+1} = f(u_k)$ vérifie $4 \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$ d'après ce qui précède. Conclusion : $4 \leqslant u_n \leqslant 10$ pour tout n.

(c) $u_{n+1} - u_n = 0{,}5u_n + 2 - u_n = -0{,}5u_n + 2 = -0{,}5(u_n - 4)$. Comme $u_n \geqslant 4$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 4. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 4$. f est affine, donc continue en ℓ : $\ell = 0{,}5\ell + 2$, d'où $\ell = 4$.

(d) Non. Une suite décroissante et minorée converge, mais pas forcément vers ce minorant. Ici, $\lim u_n = 4$: le volume se stabilise vers 4 m³ et le bassin ne se vide pas.

Ex. 40 ★★★ **Deux suites, une même fonction**

(a) Les marches de l'escalier vont vers la gauche : (u_n) semble décroissante. Elle semble tendre vers 1, l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$ le plus proche. Le graphique sert seulement à conjecturer, il ne prouve rien : il faut une récurrence.

(b) $f'(x) = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$, donc f y est croissante. $f(x) = x \iff x^2 + 3 = 4x \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0$, donc $x = 1$ ou $x = 3$.

(c) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$ ». Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$, et $1 \leqslant \frac{7}{4} \leqslant 2 \leqslant 2$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(2)$, soit $1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{7}{4} \leqslant 2$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Ex. 40 **(suite)**

(d) (u_n) est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant 2$. f est un polynôme, donc elle est continue en ℓ, et $f(\ell) = \ell$. On a donc $\ell = 1$ ou $\ell = 3$. Comme $3 \notin [1\,;2]$, $\lim u_n = 1$.

(e) Récurrence : $v_0 = 4 \geqslant 4$. Si $v_k \geqslant 4$, comme f est croissante, $v_{k+1} \geqslant f(4) = \frac{19}{4} \geqslant 4$. Ensuite, $v_{n+1} - v_n = \frac{v_n^2 - 4v_n + 3}{4} = \frac{(v_n - 1)(v_n - 3)}{4}$. Or $v_n - 1 \geqslant 3$ et $v_n - 3 \geqslant 1$, donc $v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4}$. On en déduit $v_n \geqslant 4 + \frac{3}{4}n$, qui tend vers $+\infty$: par comparaison, $\lim v_n = +\infty$. Lina a tort : les points fixes sont seulement les limites possibles, et seulement si la suite converge.

Ex. 41 ★★★ **Croissante et majorée : vers quelle limite ?**

(a) $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$ pour $x > 0$, donc g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. $g(0) = 2 - 1 - 0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ car $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ et $2 - x \to -\infty$. g est continue (exponentielle et polynôme) et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, et 0 est compris entre $-\infty$ et 1. D'après le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

(b) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0$, donc f est croissante. $g(\alpha) = 0$ donne $f(\alpha) = \alpha$. Récurrence : $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 \leqslant \alpha$. Si $0 \leqslant u_k \leqslant \alpha$, alors, comme f est croissante, $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(\alpha)$, soit $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha$, donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha$. Conclusion : $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ pour tout n. Enfin, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Comme g est décroissante et $u_n \leqslant \alpha$, $g(u_n) \geqslant g(\alpha) = 0$: (u_n) est croissante.

(c) Une suite croissante et majorée converge, mais pas forcément vers son majorant. Ici, (u_n) est croissante et majorée par α. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [0\,;\alpha]$. f est continue en ℓ (exponentielle et opérations), donc $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$ avec $\ell \geqslant 0$. Par unicité, $\ell = \alpha$. De plus, $g(2) = -\mathrm{e}^{-2} \neq 0$, donc la limite n'est pas 2.

(d) $g(1{,}84) \approx 0{,}0012 > 0$ et $g(1{,}85) \approx -0{,}0072 < 0$. Comme g est strictement décroissante, $1{,}84 < \alpha < 1{,}85$ (et $\alpha \approx 1{,}8414$).

(e) (u_n) est croissante et converge vers α, donc $u_n \leqslant \alpha < 1{,}85$ pour tout n. Si $u_n \geqslant 1{,}84$, alors $0 \leqslant \alpha - u_n < 1{,}85 - 1{,}84 = 10^{-2}$. On complète avec `while u < 1.84 :` et `u = 2 - exp(-u)`. Le programme affiche 5 (on a $u_5 \approx 1{,}8405$).

Ex. 42 ★★★ **Une suite et une fonction définie par morceaux**

(a) $u_1 = f(0) = \frac{1}{2}$, $u_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $u_3 = \frac{7}{8}$. Initialisation : $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 = u_0$. Hérédité : si $u_k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$, alors $u_k < 1$, donc on utilise la première formule : $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. Conclusion : la formule est vraie pour tout n.

(b) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, donc $\ell = 1$. Mais $f(1) = 0 \neq 1$. Sur $[0\,;1[$, $\frac{x+1}{2} = x \iff x = 1$, ce qui est exclu, et $f(1) \neq 1$: f n'a aucun point fixe. Pourtant, (u_n) converge.

(c) Nina a tort. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1+1}{2} = 1 \neq f(1) = 0$, donc f n'est pas continue en 1. L'hypothèse « f continue en ℓ » du théorème n'est pas vérifiée : le théorème ne s'applique pas, il n'est donc pas contredit.

(d) f est continue en 1 si et seulement si $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, soit $a = 1$. Les termes u_n sont tous dans $[0\,;1[$, donc la suite ne change pas et converge toujours vers $\ell = 1$. Alors $f(\ell) = f(1) = 1 = \ell$: ℓ est bien un point fixe, comme le prévoit le théorème, puisque f est maintenant continue en ℓ.

7. *Problèmes type bac*

Ex. 43 ★☆☆ **Réutiliser α dans un calcul**

(a) α est solution, donc $\mathrm{e}^\alpha + \alpha - 4 = 0$, d'où $\mathrm{e}^\alpha = 4 - \alpha$.

(b) $A = (4 - \alpha) + \alpha^2 - 3\alpha = \alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha - 2)^2$.

(c) $\mathrm{e}^{2\alpha} = (\mathrm{e}^\alpha)^2 = (4 - \alpha)^2 = 16 - 8\alpha + \alpha^2$, donc $B = 16 - 8\alpha + \alpha^2 - \alpha^2 + 8\alpha = 16$.

(d) Pour $x = 0$: $\mathrm{e}^0 + 0 - 4 = -3 \neq 0$, donc $\alpha \neq 0$. Alors $C = \frac{(4 - \alpha) - 4}{\alpha} = \frac{-\alpha}{\alpha} = -1$.

(e) $\mathrm{e}^{-\alpha} = \frac{1}{\mathrm{e}^\alpha}$ et $\mathrm{e}^\alpha = 4 - \alpha > 0$, donc $\mathrm{e}^{-\alpha} = \frac{1}{4 - \alpha}$.

(f) $D = \alpha(4 - \alpha) + \alpha^2 = 4\alpha - \alpha^2 + \alpha^2 = 4\alpha$.

Ex. 44 ★☆☆ **Compter les solutions sur un tableau**

(a) Sur $]-\infty\,;-1]$, f prend ses valeurs dans $]1\,;5]$ (la limite 1 n'est pas atteinte) : aucune solution. Sur $[-1\,;3]$, f est continue et strictement décroissante de 5 à -3, et 0 est compris entre -3 et 5 : une unique solution d'après le corollaire du TVI. Sur $[3\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de -3 vers la limite 1, et $0 \in [-3\,;1[$: une unique solution. Total : 2 solutions.

Ex. 44 (suite)

(b) Sur $]-\infty\,;-1]$, $f(x)>1$: aucune solution. Sur $[-1\,;3]$, 1 est compris entre -3 et 5 : une solution (corollaire du TVI). Sur $[3\,;+\infty[$, $f(x)<1$ car la limite 1 n'est pas atteinte : aucune. Total : 1 solution.

(c) Faux. Contre-exemple : $k=1$ est dans $]-3\,;5[$ mais $f(x)=1$ n'a qu'une solution (question précédente).

(d) f prend toutes ses valeurs dans $[-3\,;5]$ (minimum -3 en 3, maximum 5 en -1) et y atteint chaque valeur. Aucune solution si et seulement si $k<-3$ ou $k>5$.

(e) Sur $]-\infty\,;-1]$, $f(x)>1>0$. Sur $[-1\,;3]$, f est strictement décroissante et $f(\beta)=0$: $f(x)>0$ sur $[-1\,;\beta[$ et $f(x)<0$ sur $]\beta\,;3]$. Bilan : $f(x)>0$ sur $]-\infty\,;\beta[$, $f(\beta)=0$, $f(x)<0$ sur $]\beta\,;3]$.

Ex. 45 ★★☆ Étude complète d'un polynôme

(a) $g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$: positive sur $]-\infty\,;0]$ et $[2\,;+\infty[$, négative sur $[0\,;2]$. $g(0)=-2$, $g(2)=8-12-2=-6$. Pour $x\neq 0$, $g(x)=x^3\left(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}\right)$ et la parenthèse tend vers 1 : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. Tableau : $-\infty\nearrow -2\searrow -6\nearrow+\infty$.

(b) Sur $]-\infty\,;2]$, le maximum de g est $g(0)=-2<0$: aucune solution. Sur $[2\,;+\infty[$, g est continue (polynôme) et strictement croissante, $g(2)=-6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$; 0 est compris entre -6 et $+\infty$, donc d'après le corollaire du TVI, $g(x)=0$ a une unique solution sur cet intervalle. Au total, une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et $\alpha>2$.

(c) $g(3{,}19)\approx -0{,}067<0$ et $g(3{,}2)=0{,}048>0$, donc $3{,}19<\alpha<3{,}2$ (en fait $\alpha\approx 3{,}196$).

(d) Sur $]-\infty\,;2]$, $g(x)\leqslant -2<0$. Sur $[2\,;+\infty[$, g est strictement croissante et $g(\alpha)=0$.
Donc $g(x)<0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$, $g(\alpha)=0$ et $g(x)>0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Ex. 46 ★★☆ Les truites de l'étang

(a) L'escalier monte vers le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y=x$, d'abscisse 3 : (u_n) semble croissante et tendre vers 3.

(b) $u_1=f(1)=\frac{6}{4}=1{,}5$ et $u_2=f(1{,}5)=\frac{9}{4{,}5}=2$. Au 1er janvier 2028, l'étang compte 2 000 truites.

Ex. 46 (suite)

(c) $f'(x)=\frac{6(x+3)-6x}{(x+3)^2}=\frac{18}{(x+3)^2}>0$: f est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Initialisation : $u_0=1$, $u_1=1{,}5$ et $1\leqslant 1\leqslant 1{,}5\leqslant 3$. Hérédité : si $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$, comme f est croissante, $f(1)\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant f(3)$, soit $1{,}5\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 3$, d'où $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 3$. Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

(d) (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge vers une limite $\ell\in[1\,;3]$. f est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc $f(\ell)=\ell$: $6\ell=\ell(\ell+3)$, soit $\ell(\ell-3)=0$. Comme $\ell\geqslant 1$, $\ell=3$. À long terme, la population se stabilise vers 3 000 truites.

Ex. 47 ★★★ Le minimum caché d'une fonction

(a) $g'(x)=\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x=(x+2)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x>0$, $g'(x)$ a le signe de $x+2$: $g'(x)<0$ sur $]-\infty\,;-2[$, $g'(-2)=0$ et $g'(x)>0$ sur $]-2\,;+\infty[$. On a $g(-2)=-\mathrm{e}^{-2}-3$. En $-\infty$: $(x+1)\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\to 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-3$. En $+\infty$: $x+1\to+\infty$ et $\mathrm{e}^x\to+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
g(x)	-3	$\searrow -3-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow+\infty$

(b) Sur $]-\infty\,;-2]$: $x+1<0$, donc $(x+1)\mathrm{e}^x<0$ et $g(x)<-3<0$: aucune solution. Sur $[-2\,;+\infty[$: g est dérivable donc continue, et strictement croissante ; $g(-2)=-3-\mathrm{e}^{-2}<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. 0 est compris entre $g(-2)$ et $+\infty$, donc d'après le corollaire du TVI, $g(x)=0$ a une unique solution α sur $[-2\,;+\infty[$. Au total, une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

(c) $g(0{,}61)\approx -0{,}037<0$ et $g(0{,}62)\approx 0{,}011>0$. Comme g est strictement croissante sur $[-2\,;+\infty[$, on obtient $0{,}61<\alpha<0{,}62$.

(d) g est strictement croissante sur $[-2\,;+\infty[$ avec $g(\alpha)=0$, et $g<0$ sur $]-\infty\,;-2]$.
Donc $g(x)<0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$, $g(\alpha)=0$ et $g(x)>0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$. $f(x)=x\mathrm{e}^x-3x$, donc $f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-3=(x+1)\mathrm{e}^x-3=g(x)$. f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

Ex. 47 **(suite)**

(e) D'après les variations, le minimum de f est $f(\alpha)$. Comme $g(\alpha)=0$: $(\alpha+1)\mathrm{e}^{\alpha}=3$. Or $\alpha+1\neq 0$, donc $\mathrm{e}^{\alpha}=\frac{3}{\alpha+1}$. Alors $f(\alpha)=\alpha\left(\frac{3}{\alpha+1}-3\right)=\alpha\times\frac{3-3\alpha-3}{\alpha+1}=-\frac{3\alpha^2}{\alpha+1}$. La fonction $a\mapsto\frac{3a^2}{a+1}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ (sa dérivée $\frac{3a^2+6a}{(a+1)^2}$ y est positive) : elle vaut environ 0,693 en 0,61 et 0,712 en 0,62.
Donc $-0{,}712<f(\alpha)<-0{,}693$, d'où $f(\alpha)\approx -0{,}7$.

Ex. 48 ★★★ **Une racine qui se stabilise**

(a) On construit l'escalier entre $\mathcal{C}$ et la droite $y=x$: $u_1=2$, $u_2=\sqrt{10}\approx 3{,}16$, $u_3\approx 3{,}67$. On conjecture que (u_n) est croissante et converge vers 4, l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite.

(b) $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}>0$ sur $[0\,;+\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Soit $P(n)$: « $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$ ». Initialisation : $u_0=0$ et $u_1=2$, donc $0\leqslant 0\leqslant 2\leqslant 4$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité : on suppose $P(n)$ vraie. f est croissante sur $[0\,;4]$, donc $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(4)$, c'est-à-dire $2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 4$, car $f(4)=\sqrt{16}=4$.
Donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 4$: $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout n.

(d) Non. Croissante et majorée par 5, la suite converge bien, mais vers une limite $\ell\leqslant 5$, pas forcément égale à 5. Ici elle est même majorée par 4, donc $\ell\leqslant 4<5$: sa limite ne peut pas être 5.

(e) (u_n) est croissante et majorée par 4, donc elle converge vers un réel ℓ tel que $0\leqslant\ell\leqslant 4$. f est continue sur $[0\,;4]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, donc $f(\ell)=\ell$: $\sqrt{3\ell+4}=\ell$. Comme $\ell\geqslant 0$, cela équivaut à $\ell^2=3\ell+4$, soit $(\ell-4)(\ell+1)=0$. Comme $\ell\geqslant 0$, $\ell=4$. La suite (u_n) converge vers 4.

Ex. 49 ★★★ **Un médicament efficace combien de temps ?**

(a) $C'(t)=4\mathrm{e}^{-0{,}5t}+4t\times(-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t}=(4-2t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}5t}>0$, $C'(t)$ a le signe de $4-2t$: positif sur $[0\,;2[$, nul en 2, négatif sur $]2\,;+\infty[$. $C(0)=0$ et $C(2)=8\mathrm{e}^{-1}\approx 2{,}94$.

t	0	2	$+\infty$
C(t)	0	↗ $8\mathrm{e}^{-1}$	↘ 0

Ex. 49 **(suite)**

(b) Sur $[0\,;2]$: C est dérivable donc continue, et strictement croissante de $C(0)=0$ à $C(2)=8\mathrm{e}^{-1}\approx 2{,}94$; 1 est compris entre ces valeurs, donc d'après le corollaire du TVI il existe un unique $t_1\in[0\,;2]$ tel que $C(t_1)=1$. Sur $[2\,;+\infty[$: C est continue et strictement décroissante de $8\mathrm{e}^{-1}$ jusqu'à la limite 0, qui n'est pas atteinte ; 1 est strictement compris entre 0 et $8\mathrm{e}^{-1}$, donc il existe un unique t_2. Comme $C(2)\neq 1$, on a $t_1<2<t_2$: exactement deux solutions.

(c) Sur $[2\,;10]$, C est strictement décroissante et $C(t_2)=1$. Si $C(m)>1=C(t_2)$, alors $m<t_2$. La solution est donc dans $[m\,;b]$: on remplace `a` par `m`.

(d) Sur $[0\,;2]$, C est strictement croissante : si $C(m)>1=C(t_1)$, alors $m>t_1$, et la solution est dans $[a\,;m]$. Il faudrait alors remplacer `b`, et non `a`. On corrige le test : `if 4*m*exp(-0.5*m) < 1:`.

(e) On a $6{,}515625\leqslant t_2\leqslant 6{,}5234375$, donc $6{,}515<t_2<6{,}525$ (amplitude 10^{-2}). D'après les variations, $C(t)\geqslant 1$ exactement sur $[t_1\,;t_2]$. La durée t_2-t_1 est comprise entre $6{,}515-0{,}29=6{,}225$ et $6{,}525-0{,}28=6{,}245$: le médicament est efficace pendant environ 6,2 h, soit à peu près 6 h 14 min. Il commence à agir environ 17 min après la prise.