Terminale maths complémentaires / Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

benprof particulier.fr

40 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Continuité sur un intervalle

À retenir : Polynômes, e^x, $\ln x$, $\sqrt{x}$ et leurs opérations sont continus sur tout intervalle où ils sont définis. Dérivable $\Rightarrow$ continue, mais la réciproque est fausse ($|x|$ en 0). TVI : f continue sur $[a\,;b]$ et k entre $f(a)$ et $f(b)$ $\Rightarrow$ au moins une solution.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : justifier la continuité** — Pour chaque fonction, justifie qu'elle est continue sur l'intervalle indiqué. Cite la règle du cours que tu utilises.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x + 7$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = e^x + x^2$ sur $\mathbb{R}$.

c) $h(x) = x\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

d) $k(x) = \sqrt{x} + 5x$ sur $[0\,;+\infty[$.

e) $p(x) = e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$.

f) $r(x) = \dfrac{4}{x+2}$: est-elle continue sur $]-2\,;+\infty[$? Et sur $\mathbb{R}$? Justifie.

g) Une fonction q est dérivable sur $[1\,;6]$. Que peux-tu dire de sa continuité sur $[1\,;6]$?

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse. Si c'est faux, donne un contre-exemple.

a) « La fonction u définie par $u(x) = x + 1$ si $x < 3$ et $u(x) = 7 - x$ si $x \geqslant 3$ est continue sur $\mathbb{R}$. »

b) « Toute fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur I. »

c) « La fonction $x \mapsto |x - 2|$ est continue en 2. »

d) « $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, donc sa courbe se trace sans lever le crayon sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. »

e) « Si f est continue sur $[0\,;3]$ avec $f(0) = -2$ et $f(3) = 5$, alors $f(x) = 1$ a au moins une solution dans $[0\,;3]$. »

f) « Si $f(0) = -2$ et $f(3) = 5$, alors l'équation $f(x) = 1$ a au moins une solution dans $[0\,;3]$. »

Ex. 3 ★☆☆ **Automatismes : le TVI s'applique-t-il ?** — Dans chaque cas, justifie la continuité sur l'intervalle et calcule les images aux bornes. Dis ensuite si le TVI permet d'affirmer que l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans l'intervalle (valeurs approchées à 0,001 près).

a) $f(x) = x^3 + 2x - 5$ sur $[1\,;2]$, avec $k = 0$.

Ex. 3 (suite)

b) $g(x) = e^x - 3$ sur $[0\,;2]$, avec $k = 0$.

c) $u(x) = \ln x + x$ sur $[1\,;e]$, avec $k = 2$.

d) $m(x) = \sqrt{x} - 2$ sur $[1\,;9]$, avec $k = 2$.

e) $h(x) = 2x^2 - 4x$ sur $[0\,;3]$, avec $k = -1$. Calcule aussi $h(1)$ et reprends la question sur $[0\,;1]$.

Ex. 4 ★★☆ **Le tarif postal de Saint-Malo** — À la poste de Saint-Malo, le prix $P(m)$ d'une lettre, en euros, dépend de sa masse m (en grammes), pour m dans $]0\,;250]$:

masse m (g)	prix P(m) (€)
jusqu'à 20 inclus	1,50
plus de 20, jusqu'à 100 inclus	3,00
plus de 100, jusqu'à 250 inclus	6,00

a) Donne le prix d'une lettre de 20 g, puis celui d'une lettre de 21 g.

b) La fonction P est-elle continue sur $]0\,;250]$? Justifie.

c) Sur l'intervalle $]20\,;100]$, la courbe de P se trace-t-elle sans lever le crayon ? Justifie.

d) Inès dit : « $P(5) = 1{,}50$ et $P(200) = 6$. Comme 4 est compris entre 1,50 et 6, une lettre coûte 4 €. » Explique son erreur.

Ex. 5 ★★☆ **Choisir le paramètre pour raccorder** — Soit a un réel. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + a$ si $x \leqslant 1$, et $f(x) = 2x + 5$ si $x > 1$.

a) On prend $a = 0$. Calcule les deux expressions en $x = 1$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifie.

b) Détermine la valeur de a pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Avec cette valeur de a, justifie que f est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Avec cette valeur de a, calcule $f(-1)$ et $f(1)$. Montre ensuite que l'équation $f(x) = 10$ admet au moins une solution dans $[-1\,;1]$.

Ex. 6 ★★☆ **Le TVI de Léo** — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

a) Calcule $g(0)$ et $g(2)$.

b) Léo écrit : « 0 est compris entre $g(0)$ et $g(2)$, donc d'après le TVI, $g(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\,;2]$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Montre que l'équation $g(x) = 0$ n'a aucune solution réelle.

(d) Justifie que g est continue sur $[2\,;5]$. Montre ensuite que l'équation $g(x) = 6$ admet au moins une solution dans $[2\,;5]$.

Ex. 7 ★★★ **Perfusion à l'hôpital de Rennes** — À l'hôpital de Rennes, Lucie reçoit un médicament en perfusion pendant 1 h, puis le médicament s'élimine. Sa concentration dans le sang, en mg/L, à l'instant t (en heures) est donnée sur $[0\,;5]$ par $C(t) = t^2 + 3t$ si $0 \leqslant t \leqslant 1$, et $C(t) = a\,e^{1-t}$ si $1 < t \leqslant 5$, où $a > 0$.

(a) Justifie que C est continue sur $[0\,;1]$ et sur $]1\,;5]$, quelle que soit la valeur de a.

(b) Calcule les deux expressions de C en $t = 1$. Détermine a pour que C soit continue sur $[0\,;5]$.

(c) Avec $a = 4$, Ben affirme : « C est continue en 1, donc sa courbe n'a pas d'angle en 1. » A-t-il raison ? Compare les dérivées des deux expressions en 1.

(d) Démontre que la concentration vaut 2 mg/L à au moins un instant de $[0\,;1]$ et à au moins un instant de $[1\,;5]$.

(e) Résous l'équation $C(t) = 2$ sur $[0\,;1]$, puis sur $]1\,;5]$. Donne les valeurs exactes, puis les instants arrondis à la minute.

Ex. 8 ★★★ **Le balayage de Nina** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Pour encadrer les solutions de l'équation $f(x) = 0$, Nina écrit le programme suivant :

```
def f(x):
    return x**3 - 6*x + 2

def balayage(g, a):
    n = 0
    while g(a + n/10) * g(a + (n + 1)/10) > 0:
        n = n + 1
    return a + n/10, a + (n + 1)/10
```

(a) Justifie que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calcule ensuite $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$.

(b) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans $[-3\,;3]$.

(c) Qu'affiche l'instruction `print(balayage(f, 0))` ? Interprète ce résultat pour l'équation $f(x) = 0$.

(d) Nina teste son programme avec la fonction h définie sur $[0\,;2]$ par $h(x) = x - 2$ si $x < 1$, et $h(x) = x$ si $x \geqslant 1$. Calcule $h(0{,}9)$ et $h(1)$.

(e) `balayage(h, 0)` renvoie (0.9, 1.0). Nina en conclut que l'équation $h(x) = 0$ a une solution dans $[0{,}9\,;1]$. A-t-elle raison ? Justifie.

2. *Théorème des valeurs intermédiaires : existence d'une solution*

À retenir : TVI : si f est continue sur $[a\,;b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $f(x) = k$ a AU MOINS une solution dans $[a\,;b]$. Exemple : $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$, donc f s'annule. Sans continuité, ou si k n'est pas entre les images, on ne peut rien conclure.

Ex. 9 ★☆☆ **Continue ou pas ?** — Automatismes. Pour chaque fonction, dis si elle est continue sur l'intervalle donné. Justifie en une phrase.

(a) $f(x) = 2x^4 - 7x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $g(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$ sur $[0\,;5]$.

(c) $h(x) = x\,e^x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $k(x) = \sqrt{x} - 3x$ sur $[0\,;+\infty[$.

(e) $m(x) = \ln x + x^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

(f) $p(x) = \dfrac{5}{x - 3}$ sur $[1\,;4]$.

(g) q est une fonction dérivable sur $[-1\,;2]$: que peux-tu dire de sa continuité sur $[-1\,;2]$?

Ex. 10 ★★☆ **Le TVI s'applique-t-il ?** — Automatismes. Les fonctions sont continues sur l'intervalle indiqué. Calcule les valeurs exactes aux bornes avant de conclure.

(a) $f(x) = x^3 - 5x + 3$: montre que f s'annule au moins une fois sur $[0\,;1]$.

(b) $g(x) = e^x - 3$: $g(1)$ et $g(2)$ sont-ils de signes contraires ? Conclus pour l'équation $g(x) = 0$ sur $[1\,;2]$.

(c) $h(x) = \frac{4}{x+1}$: montre que l'équation $h(x) = 3$ admet au moins une solution dans $[0\,;3]$.

(d) $p(x) = x^2 + 2x$: le TVI permet-il de conclure pour l'équation $p(x) = 10$ sur $[1\,;2]$? Justifie.

(e) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 4$: donne une solution de l'équation $q(x) = 4$ dans $[2\,;3]$, sans résoudre l'équation.

(f) $r(x) = \sqrt{x} + x$: trouve un entier n tel que le TVI prouve que l'équation $r(x) = 5$ a au moins une solution dans $[n\,;n+1]$.

Ex. 11 ★★☆ **Un raccord à régler** — Soit m un réel. On définit f sur $[0\,;5]$ par $f(x) = x^2$ si $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $f(x) = 3x + m$ si $2 < x \leqslant 5$.

(a) On prend $m = 1$. Calcule $f(0)$ et $f(5)$, puis montre que l'équation $f(x) = 5$ n'a aucune solution dans $[0\,;5]$.

(b) Toujours avec $m = 1$, compare $f(2)$ et $3 \times 2 + 1$. Explique pourquoi le TVI ne s'applique pas.

(c) Détermine m pour que les deux expressions soient égales en 2, c'est-à-dire pour que f soit continue sur $[0\,;5]$.

Ex. 11 **(suite)**

(d) Avec cette valeur de m, montre que $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans $[0\,;5]$, puis détermine-la.

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux sur le TVI** — Vrai ou faux ? Justifie : une preuve si c'est vrai, un contre-exemple si c'est faux.

(a) Si f est continue sur $[0\,;2]$ avec $f(0) = -1$ et $f(2) = 1$, alors $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0\,;2]$. (Teste $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 1$.)

(b) Si $f(x) = 0$ a une solution dans $[a\,;b]$, alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

(c) Si f est continue sur $[1\,;3]$ avec $f(1) = 2$ et $f(3) = 6$, alors $f(x) = 7$ n'a aucune solution dans $[1\,;3]$.

(d) Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(-1) < 0$ et $f(1) > 0$, donc $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[-1\,;1]$.

(e) Si f est continue sur $[0\,;5]$ avec $f(0) = 4$ et $f(5) = -2$, alors $f(x) = 1$ a au moins une solution dans $[0\,;5]$.

Ex. 13 ★★☆ **Trois copies à corriger** — Chaque copie contient au moins une erreur. Trouve-la, puis écris une conclusion correcte.

(a) Léo : « $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$, donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0\,;1]$. »

(b) Camille : « $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. $g(0) = -1$ et $g(3) = \frac{7}{2}$, donc d'après le TVI, $g(x) = 0$ a une solution dans $[0\,;3]$. »

(c) Malik : « $h(x) = e^x - 4x$. $h(0) = 0$ et $h(1) = e - 4 < 0$: pas de signes contraires, donc le TVI ne dit rien sur $[0\,;1]$. »

Ex. 14 ★★☆ **Concentration d'un médicament** — Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang est $C(t) = 10t\,e^{-0{,}5t}$ (en mg/L), où $t \in [0\,;6]$ est le temps en heures.

(a) Justifie que C est continue sur $[0\,;6]$.

(b) Calcule $C(0)$ et $C(1)$ (valeur exacte, puis arrondi au centième). Montre que la concentration atteint 5 mg/L au moins une fois pendant la première heure.

(c) Sarah affirme : « $C(6) \approx 2{,}99$, donc 7 n'est pas entre $C(0)$ et $C(6)$: la concentration n'atteint jamais 7 mg/L. » A-t-elle raison ? Utilise $C(2)$.

(d) Montre que la concentration vaut 4 mg/L au moins une fois entre $t = 4$ et $t = 6$.

Ex. 15 ★★★ **Une fonction, plusieurs équations** — Soit g la fonction définie sur $[-3\,;3]$ par $g(x) = x^3 - 6x + 2$.

(a) Justifie que g est continue sur $[-3\,;3]$, puis calcule les valeurs exactes de $g(-3)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$.

(b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans $[-3\,;3]$.

(c) Montre que l'équation $g(x) = 6$ admet au moins deux solutions dans $[-3\,;3]$.

Ex. 15 **(suite)**

(d) Montre que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$. Tu pourras poser $h(x) = g(x) - x$.

Ex. 16 ★★★ **Bénéfice et taxe au-delà de 300 objets** — Une entreprise fabrique x centaines d'objets, avec $x \in [0\,;6]$. Au-delà de 300 objets, elle paie une taxe fixe. Son bénéfice, en milliers d'euros, vaut $B(x) = -x^2 + 6x - 5$ si $0 \leqslant x \leqslant 3$ et $B(x) = -x^2 + 6x - 8$ si $3 < x \leqslant 6$.

(a) Calcule $B(0)$, $B(3)$ et $B(6)$. Calcule aussi $-x^2 + 6x - 8$ pour $x = 3$. La fonction B est-elle continue sur $[0\,;6]$? Justifie.

(b) Jules affirme : « $B(0)$ et $B(6)$ sont négatifs, donc le bénéfice n'est jamais nul. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

(c) Montre que l'équation $B(x) = 2$ admet au moins une solution dans $[0\,;3]$.

(d) Ana écrit : « $B(3) = 4$ et $B(6) = -8$, donc d'après le TVI, $B(x) = 2$ a une solution dans $[3\,;6]$. » Explique son erreur, puis cherche s'il existe une solution dans $[3\,;6]$.

(e) Montre que B s'annule au moins une fois sur $[3{,}5\,;6]$. Que signifie ce résultat pour l'entreprise ?

3. *Corollaire : solution unique, nombre de solutions*

À retenir : Corollaire : f continue ET strictement monotone sur I, k entre les images (ou strictement entre les limites) aux bornes : $f(x) = k$ a une unique solution. Pour compter, une flèche à la fois. Ex. : $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau de variations** — La fonction f est continue sur $[-3\,;4]$. Voici son tableau de variations :

x	-3	1	4
f(x)	5 ↘	-2 ↗	3

(a) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle sur $[-3\,;4]$? Justifie.

(b) Justifie que l'équation $f(x) = 4$ admet une seule solution sur $[-3\,;4]$.

(c) L'équation $f(x) = -2{,}5$ a-t-elle une solution sur $[-3\,;4]$? Justifie.

(d) Combien de solutions l'équation $f(x) = 3$ admet-elle sur $[-3\,;4]$? Attention à la borne 4.

(e) Existe-t-il un réel k tel que l'équation $f(x) = k$ ait trois solutions sur $[-3\,;4]$? Justifie.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur les hypothèses** — Vrai ou faux ? Justifie. Si c'est faux, donne un contre-exemple.

(a) La fonction $x \mapsto \ln x + x^2$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Si g est continue sur $[0\,;2]$ avec $g(0) < 0$ et $g(2) > 0$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\,;2]$.

(c) Si h est strictement croissante sur $[0\,;1]$ avec $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$, alors l'équation $h(x) = 0$ a une solution dans $[0\,;1]$.

(d) u est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, de limite $+\infty$ en 0 et 2 en $+\infty$: l'équation $u(x) = 2$ a une unique solution.

(e) Si l'équation $v(x) = 4$ a une unique solution sur $[-1\,;3]$, alors v est strictement monotone sur $[-1\,;3]$.

Ex. 19 ★☆☆ **Automatismes : ln, réciproque de exp** — On note f la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^x$. Elle est continue et strictement croissante, de limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

(a) Justifie que, pour tout réel $y > 0$, l'équation $e^x = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

(b) On note α la solution de $e^x = 7$. Exprime α à l'aide de f^{-1}, puis de ln, et donne une valeur approchée de α à 0,01 près.

(c) Nathan écrit : « l'équation $e^x = -2$ a pour solution $x = \ln(-2)$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) Théo affirme que $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x}$. A-t-il raison ? Justifie avec $x = 2$.

(e) Sans calculatrice, donne $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(e^3)$.

(f) La fonction carré admet-elle une fonction réciproque sur $[-2\,;2]$? Justifie.

Ex. 20 ★★☆ **Corollaire sur un intervalle infini** — Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + \ln x$.

(a) Justifie que f est continue, puis étudie le signe de $f'(x)$ pour montrer que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(c) Montre que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

(d) Calcule $f(1)$ et une valeur approchée de $f(2)$ à 0,001 près, puis déduis-en deux entiers consécutifs qui encadrent α.

(e) Lina affirme : « l'équation $f(x) = -100$ n'a pas de solution, car $x > 0$ donc $f(x) > 0$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 21 ★★☆ **Compter les solutions de g(x) = h(x)** — On veut résoudre l'équation $x^3 + 5 = 12x$ sur $[0\,;4]$. On pose $f(x) = x^3 - 12x + 5$ pour $x \in [0\,;4]$.

(a) Explique pourquoi résoudre $x^3 + 5 = 12x$ revient à résoudre $f(x) = 0$.

(b) Vérifie que $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$, étudie son signe sur $[0\,;4]$ puis dresse le tableau de variations de f.

(c) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0\,;4]$.

(d) Combien de solutions l'équation $f(x) = 10$ admet-elle dans $[0\,;4]$? Justifie.

Ex. 22 ★★☆ **Durée d'efficacité d'un médicament** — t heures après la prise, la concentration d'un médicament dans le sang vaut $C(t) = 10t\,e^{-0{,}5t}$ (en mg/L), pour $t \in [0\,;10]$. On admet que $C'(t) = 5(2-t)e^{-0{,}5t}$. Le médicament est efficace quand $C(t) \geqslant 5$.

(a) Étudie le signe de $C'(t)$, puis dresse le tableau de variations de C sur $[0\,;10]$
(valeurs arrondies à 0,01).

(b) Montre que l'équation $C(t) = 5$ admet exactement deux solutions t_1 et t_2 dans $[0\,;10]$, avec $t_1 < t_2$.

(c) À la calculatrice, donne un encadrement d'amplitude 0,01 de t_1 et de t_2.

(d) Déduis-en la durée pendant laquelle le médicament est efficace, à 0,1 h près.

Ex. 23 ★★★ **Deux solutions sur un intervalle infini, puis fonction réciproque** — Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6\ln x$. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(a) Justifie que f est continue sur $]0\,;+\infty[$. Montre que $f'(x) = \frac{2(x^2-3)}{x}$, puis dresse le tableau de variations de f
(minimum en valeur exacte).

(b) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0\,;+\infty[$, avec $\alpha < \beta$.

(c) Avec un balayage à la calculatrice, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(d) Selon les valeurs du réel k, donne le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ sur $]0\,;+\infty[$. Justifie.

(e) On note g la fonction f restreinte à $[\sqrt{3}\,;+\infty[$. Justifie que g admet une fonction réciproque g^{-1}, puis détermine $g^{-1}(9 - 6\ln 3)$ et $g^{-1}(0)$.

Ex. 24 ★★★ **Seuil de rentabilité d'une entreprise** — Une entreprise fabrique entre 100 et 600 objets. Pour x centaines d'objets, avec $x \in [1\,;6]$, son bénéfice en milliers d'euros est $B(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x - 10$.

(a) Étudie le signe de $B'(x)$, dresse le tableau de variations de B sur $[1\,;6]$, puis dis si un bénéfice de 8 000 € est possible.

Ex. 24 **(suite)**

(b) Lucas affirme : « $B(1)$ et $B(6)$ sont négatifs, donc l'entreprise n'est jamais rentable. » Montre qu'il a tort en prouvant que l'équation $B(x) = 0$ a exactement deux solutions $\alpha < \beta$ dans $[1\,;6]$.

(c) Pour encadrer α, Ben lance `dicho(1, 4, 0.01)`. Explique pourquoi le test convient sur $[1\,;4]$, puis corrige une ligne pour encadrer β sur $[4\,;6]$.

```
def B(x):
    return -2*x**3 + 15*x**2 - 24*x - 10

def dicho(a, b, p):
    while b - a > p:
        m = (a + b) / 2
        if B(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

(d) On admet que $3{,}08 < \alpha < 3{,}09$. Encadre β à 10^{-2} près à la calculatrice, puis donne les nombres d'objets pour lesquels l'entreprise est rentable.

4. *Encadrer une solution : balayage et dichotomie*

À retenir : Balayage : je cherche deux valeurs consécutives où $f(x) - k$ change de signe. Dichotomie : si $f(a) \times f(m) < 0$, $b = m$, sinon $a = m$; amplitude $\frac{b-a}{2^n}$. $1{,}52 < \alpha < 1{,}53$ n'est pas un arrondi.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : lire et écrire un encadrement** — Réponds sans calculatrice. Dans chaque question, α désigne l'unique solution de l'équation étudiée.

(a) Quelle est l'amplitude de l'encadrement $2{,}35 < \alpha < 2{,}4$?

(b) On sait que $0{,}61 < \alpha < 0{,}62$. Donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut, puis une par excès.

(c) Léna affirme : « $2{,}83 < \alpha < 2{,}84$, donc l'arrondi de α au centième est $2{,}83$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) f est continue et strictement croissante sur $[3\,;4]$, avec $f(3{,}6) = -0{,}2$ et $f(3{,}7) = 0{,}1$. Encadre la solution de $f(x) = 0$ avec une amplitude de $0{,}1$.

(e) g est continue et strictement décroissante sur $[0\,;1]$, avec $g(0{,}4) = 1{,}3$ et $g(0{,}5) = 0{,}8$. Encadre la solution de $g(x) = 1$ avec une amplitude de $0{,}1$.

(f) Une dichotomie part de l'intervalle $[1\,;3]$. Quelle est l'amplitude de l'encadrement après 4 étapes ?

(g) Un balayage au pas de $0{,}1$ peut-il donner l'encadrement $1{,}52 < \alpha < 1{,}53$? Justifie.

Ex. 26 ★★☆ **Automatismes : balayage à la calculatrice** — La fonction $g(x) = x^3 + 2x$ est continue et strictement croissante sur $[1\,;2]$. L'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[1\,;2]$. Voici un tableau de valeurs :

x	g(x)
1,2	4,128
1,3	4,797
1,4	5,544
1,5	6,375

(a) Entre quelles valeurs consécutives du tableau $g(x) - 5$ change-t-il de signe ?

(b) Déduis-en un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.

(c) Tom affirme : « $\alpha = 1{,}3$, car $g(1{,}3)$ est la valeur du tableau la plus proche de 5. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) À la calculatrice, poursuis le balayage au pas de $0{,}01$ et donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(e) Cet encadrement suffit-il pour donner l'arrondi de α au centième ? Justifie, puis détermine cet arrondi.

Ex. 27 ★★☆ **Dichotomie à la main avec une fonction décroissante** — On considère la fonction f définie sur $[1\,;2]$ par $f(x) = 6 - x^3 - 3x$.

(a) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1\,;2]$.

(b) Inès applique la règle « si $f(m) > 0$ alors $b = m$, sinon $a = m$ ». Calcule $f(1{,}5)$, donne l'intervalle obtenu par Inès après une étape et explique pourquoi α n'y est pas.

(c) Fais 4 étapes correctes de dichotomie à partir de $[1\,;2]$ dans un tableau a, b, m, $f(m)$, puis donne l'encadrement de α obtenu et son amplitude.

(d) Combien d'étapes faut-il, à partir de $[1\,;2]$, pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-2} ?

Ex. 28 ★★☆ **Corriger un programme de dichotomie** — La fonction $f(x) = e^x - x - 2$ est continue et strictement croissante sur $[1\,;2]$, et l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution α. Noé a écrit ce programme, qui contient trois erreurs :

```
from math import exp

def f(x):
    return exp(x) - x - 2

def dichotomie(a, b, e):
    while b - a < e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

(a) Noé tape `dichotomie(1, 2, 0.01)`. Explique pourquoi la boucle `while` ne tourne jamais, puis corrige sa condition.

Ex. 28 **(suite)**

(b) Que signifie le test `f(a) * f(m) <= 0` pour la position de α ? Corrige les deux affectations qui suivent.

(c) Corrige la dernière ligne pour que la fonction renvoie un encadrement de α. Donne ce que renvoie `dichotomie(1, 2, 0.01)` une fois le programme corrigé, et l'amplitude obtenue.

(d) Pour cette fonction, explique pourquoi on pourrait remplacer le test par `f(m) >= 0`, mais pas pour une fonction décroissante.

Ex. 29 ★★☆ **Le café qui refroidit** — Un café sort de la machine. Sa température, en °C, au bout de t minutes est $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ pour $t \geqslant 0$. Lucas veut savoir quand elle passe à 50 °C et écrit ce programme :

```
from math import exp

def T(t):
    return 20 + 60 * exp(-0.1 * t)

def balayage(p):
    t = 0
    while T(t) < 50:
        t = t + p
    return t - p, t
```

(a) Montre que l'équation $T(t) = 50$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

(b) Lucas lance `balayage(1)` et obtient `(-1, 0)`. Explique pourquoi, puis corrige le test de la boucle.

(c) Que renvoie `balayage(1)` une fois le programme corrigé ? Justifie avec deux images et interprète le résultat.

(d) Calcule la valeur exacte de α avec la fonction ln, puis donne le nombre de minutes entières à attendre pour que le café soit sous 50 °C.

Ex. 30 ★★☆ **Un pas trop grand cache deux solutions** — On considère la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2{,}2$. Sacha fait un balayage au pas de 1 : $f(0) = 2{,}2$, $f(1) = 0{,}2$, $f(2) = 0{,}2$ et $f(3) = 2{,}2$. Il conclut : « Aucun changement de signe, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution. »

(a) Calcule $f(1{,}5)$ et explique l'erreur de Sacha.

(b) Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;3]$, puis montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$.

(c) Par un balayage au pas de 0,1, donne un encadrement d'amplitude 0,1 de α et de β, en citant les images utilisées.

(d) Vrai ou faux : $1{,}72 < \beta < 1{,}73$? Justifie.

Ex. 31 ★★★ **Durée d'efficacité d'un médicament** — La concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, t heures après la prise, est $C(t) = 5t\,e^{-0{,}5t}$ pour $t \in [0\,;10]$. On admet le tableau de variations ci-dessous, avec $C(2) = 10e^{-1}$ et $C(10) = 50e^{-5}$. Le médicament est efficace tant que $C(t) \geqslant 2$.

t	0	2	10
C(t)	0 ↗	≈ 3,68 ↘	≈ 0,34

(a) Montre que l'équation $C(t) = 2$ admet exactement deux solutions α et β dans $[0\,;10]$, avec $\alpha < 2 < \beta$.

(b) Par balayage à la calculatrice, au pas de 0,1 puis de 0,01, donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. Cite les images utilisées.

(c) Maëlle lit à la calculatrice $\alpha \approx 0{,}52$ (arrondi au centième) et écrit $0{,}52 < \alpha < 0{,}53$. Calcule $C(0{,}515)$ pour vérifier son arrondi, puis explique l'erreur de son encadrement.

(d) Donne un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}, puis les valeurs approchées de β au centième par défaut et par excès.

(e) Encadre la durée $\beta - \alpha$ pendant laquelle le médicament est efficace. Dépasse-t-elle 4 h 30 ? Justifie.

Ex. 32 ★★★ **Trois solutions et un programme à adapter** — On considère la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, de dérivée $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$. Yanis a écrit ce programme de balayage :

```
def f(x):
    return x**3 - 6*x**2 + 9*x - 1

def balayage(a, p):
    x = a
    while f(x) < 0:
        x = x + p
    return x - p, x
```

(a) Étudie les variations de f sur $[0\,;4]$, puis détermine, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0\,;4]$.

(b) On note α la solution située dans $[0\,;1]$. Que renvoie `balayage(0, 0.1)` ? Déduis-en un encadrement de α, en citant deux images.

(c) On note β la solution située dans $[1\,;3]$. Que renvoie `balayage(1, 0.1)` ? Corrige le test de la boucle, puis donne l'encadrement de β obtenu.

(d) On note γ la solution située dans $[3\,;4]$. Combien d'étapes de dichotomie faut-il, à partir de $[3\,;4]$, pour encadrer γ avec une amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} ?

(e) Modifie le test de la boucle pour que le programme convienne sur chacun des trois intervalles, quel que soit le sens de variation de f. Que renvoie alors `balayage(3, 0.1)` ?

5. *Résoudre $f(x) = k$ en situation : seuils et équilibres*

À retenir : Je traduis la question (« dépasser 2 mg/L » $\Leftrightarrow$ $C(t) = 2$, $t \geqslant 0$). Sur chaque flèche : continuité, stricte monotonie, k entre les bornes. Puis j'encadre, j'arrondis dans le sens de la question et je donne l'unité.

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : traduire la question en équation** — Pour chaque situation, écris l'équation à résoudre sous la forme $f(x) = k$. Donne aussi l'intervalle où chercher la solution.

(a) Un médicament est injecté à $t = 0$. Sa concentration est $C(t)$ en mg/L, t en heures. À partir de quand dépasse-t-elle 1,5 mg/L ?

(b) Une coopérative produit x tonnes de farine, entre 0 et 50 tonnes. Son bénéfice est $B(x)$ en milliers d'euros. À partir de quelle production devient-elle rentable ?

(c) Un four de Limoges refroidit. Sa température est $T(t)$ en °C, t minutes après l'arrêt. Quand atteint-il 40 °C ?

(d) Pour un prix p compris entre 2 et 15 euros, l'offre vaut $O(p)$ et la demande $D(p)$. Le prix d'équilibre est celui où l'offre égale la demande. Quelle équation le donne ?

(e) Un capital de 5 000 € est placé à $t = 0$. Il vaut $K(t)$ euros au bout de t années. Quand aura-t-il doublé ?

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : conclure dans le contexte** — Dans chaque situation, α est l'unique solution de l'équation étudiée. Réponds à la question avec l'unité. Arrondis dans le sens qui convient.

(a) Un bain chauffe. Sa température atteint 60 °C à l'instant α, en minutes, avec $14{,}2 < \alpha < 14{,}3$. Après combien de minutes entières est-on sûr qu'elle dépasse 60 °C ?

(b) Un atelier de Nantes est rentable pour $x > \alpha$ objets, avec $312{,}4 < \alpha < 312{,}5$. Combien d'objets doit-il fabriquer au minimum ?

(c) Un sirop agit tant que sa concentration reste au-dessus de 0,5 mg/L, soit jusqu'à α heures, avec $6{,}93 < \alpha < 6{,}94$. Pendant combien d'heures entières est-on sûr qu'il agit ?

(d) Un réservoir se remplit à partir de 9 h 00. Il déborde au bout de α heures, avec $2{,}35 < \alpha < 2{,}36$. À quelle heure au plus tard couper l'eau, à la minute près ?

(e) Sur un marché de Dijon, le prix d'équilibre est α euros, avec $4{,}372 < \alpha < 4{,}373$. Donne ce prix au centime près.

Ex. 35 ★★☆ **Balayage : l'équation $x\,e^x = 3$** — On admet que $x\,e^x = 3$ a une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$. On ne sait pas la calculer. On pose $g(x) = x\,e^x$. Voici quelques valeurs de g (arrondies au millième) :

x	g(x)
0,9	2,214
1	2,718
1,1	3,305
1,2	3,984

(a) Déduis du tableau un encadrement de α d'amplitude 0,1.

(b) Tabule g à la calculatrice de 1 à 1,1 avec un pas de 0,01. Donne un encadrement de α d'amplitude 0,01.

(c) Donne la valeur approchée de α à 0,01 près par excès.

(d) Inès lit 3,00 à l'écran pour une valeur de son tableau au pas de 0,01 et conclut qu'elle a trouvé α. A-t-elle raison ? Justifie, puis encadre α à 0,001 près.

Ex. 36 ★★☆ **Seuil de rentabilité d'une fromagerie** — Une fromagerie de Rodez produit x tonnes par mois, avec $0 \leqslant x \leqslant 50$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}6x^2 - 40$.

(a) Calcule $B'(x)$ et étudie son signe. Dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;50]$.

(b) Lou écrit : « $B(0) < 0$ et $B(50) > 0$, donc d'après le TVI, $B(x) = 0$ a une unique solution sur $[0\,;50]$. » Explique ce qui manque à sa justification.

(c) Justifie que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;50]$.

(d) Donne un encadrement de α d'amplitude 0,01. Déduis-en la production minimale, à 10 kg près, pour que la fromagerie soit rentable.

Ex. 37 ★★☆ **Deux instants : l'efficacité d'un médicament** — Un médicament est administré à un patient à $t = 0$. Sa concentration dans le sang, en mg/L, est $C(t) = 6t\,e^{-0{,}5t}$ pour $t \in [0\,;10]$, avec t en heures. Le médicament est efficace lorsque $C(t) \geqslant 2$.

(a) Montre que $C'(t) = (6 - 3t)\,e^{-0{,}5t}$. Dresse le tableau de variations de C sur $[0\,;10]$ (valeurs à 0,01 près).

(b) Justifie que l'équation $C(t) = 2$ admet exactement deux solutions α et β sur $[0\,;10]$, avec $\alpha < \beta$.

(c) Donne à la calculatrice un encadrement d'amplitude 0,01 de α, puis de β.

(d) L'infirmière Maëlle affirme que le médicament est efficace pendant plus de 5 h 15 min. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Dichotomie : l'équation $\ln x + x = 2$** — On ne sait pas résoudre $\ln x + x = 2$ par le calcul. On pose $f(x) = \ln x + x - 2$ sur $]0\,;+\infty[$. Voici un programme de dichotomie incomplet :

```
from math import log

def dicho(p):
    a = 1
    b = 2
    while b - a > p:
        m = (a + b) / 2
        if ...:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

(a) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

(b) Calcule $f(1)$ et $f(2)$. Fais ensuite trois étapes de dichotomie à la main à partir de $[1\,;2]$, dans un tableau a, b, m, $f(m)$.

(c) Complète la ligne `if ...:` pour que le programme réalise cette dichotomie.

(d) Combien de fois la boucle est-elle parcourue lors de l'appel `dicho(0.01)` ? Justifie avec l'amplitude.

(e) L'appel `dicho(0.01)` renvoie `(1.5546875, 1.5625)`. Donne une valeur approchée de α à 0,01 près.

Ex. 39 ★★★ **Démouler un gâteau : un seuil sur un intervalle infini** — Malo, pâtissier à Colmar, sort un gâteau du four à $t = 0$. La température du gâteau, en °C, est $T(t) = 20 + (160 + 8t)\,e^{-0{,}1t}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en minutes. Malo démoule dès que la température est inférieure ou égale à 40 °C.

(a) Montre que $T'(t) = -(8 + 0{,}8t)\,e^{-0{,}1t}$, puis déduis-en le sens de variation de T sur $[0\,;+\infty[$.

(b) On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 20$. Justifie que l'équation $T(t) = 40$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

(c) On ne sait pas résoudre cette équation par le calcul. À la calculatrice, donne un encadrement de α d'amplitude 0,1.

(d) Au bout de combien de minutes entières, au minimum, Malo peut-il démouler le gâteau ? Justifie avec le sens de variation de T.

(e) Lina, son apprentie, affirme : « Si on attend assez longtemps, le gâteau sera exactement à 20 °C. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Protéger des semis : deux seuils dans la journée** — Clémence, maraîchère près d'Avignon, relève la température extérieure. Celle-ci est modélisée par $T(t) = -0{,}02t^3 + 0{,}6t^2 - 4{,}5t + 14$, en °C, où $t \in [0\,;18]$ est le temps en heures écoulé depuis minuit. Ses semis doivent être sous un voile tant que la température est inférieure à 10 °C.

(a) Montre que $T'(t) = -0{,}06(t-5)(t-15)$, puis dresse le tableau de variations de T sur $[0\,;18]$.

Ex. 40 (suite)

(b) Noé écrit : « $T(0) = 14$ et $T(18) \approx 10{,}8$. Comme 12 est compris entre les deux, $T(t) = 12$ a une unique solution sur $[0\,;18]$. » Repère son erreur et corrige-la.

(c) Détermine le nombre de solutions de l'équation $T(t) = 10$ sur $[0\,;18]$. Rédige la justification sur chaque intervalle.

(d) On note γ la solution de $T(t) = 10$ située dans $[5\,;15]$. Ben a écrit ce programme, où `f(t)` vaut $T(t) - 10$:

```
def f(t):
    return -0.02*t**3 + 0.6*t**2 - 4.5*t + 4

a = 5
b = 15
while b - a > 0.01:
    m = (a + b) / 2
    if f(m) < 0:
        a = m
    else:
        b = m
print(round(a, 3), round(b, 3))
```

Explique pourquoi, si `f(m) < 0`, on remplace `a` par `m`. Le programme affiche `10.664 10.674` : donne l'encadrement de γ obtenu.

(e) On note β la solution de $T(t) = 10$ située dans $[0\,;5]$, et on admet que $1{,}02 < \beta < 1{,}03$. Clémence pose le voile à l'instant β et le retire à l'instant γ. Donne ces deux horaires à la minute, arrondis dans le sens qui protège les semis.