Terminale maths complémentaires / Continuité et théorème des valeurs intermédiaires — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Continuité sur un intervalle*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : justifier la continuité**

(a) f est un polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Leur somme g est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(c) $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues sur $]0\,;+\infty[$. Leur produit h est donc continu sur $]0\,;+\infty[$.

(d) $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $x \mapsto 5x$ est un polynôme. La somme k est donc continue sur $[0\,;+\infty[$.

(e) $x \mapsto 2x-1$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, et exp est continue sur $\mathbb{R}$. La composée p est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(f) r est une fonction rationnelle. Sur $]-2\,;+\infty[$, on a $x+2 \neq 0$, donc r est continue sur cet intervalle. En revanche, r n'est pas définie en -2 : elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

(g) Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (admis).
Donc q est continue sur $[1\,;6]$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Vrai. Sur $]-\infty\,;3[$ et sur $[3\,;+\infty[$, u est donnée par un polynôme, donc elle est continue. En 3, les deux expressions valent $3+1=4$ et $7-3=4$: elles coïncident, la courbe ne fait pas de saut. u est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Faux. Contre-exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, mais elle n'est pas dérivable en 0 (la tangente y est verticale).

(c) Vrai. On a $|x-2| = 2-x$ si $x \leqslant 2$ et $|x-2| = x-2$ si $x > 2$. En 2, les deux expressions valent 0 : il n'y a pas de saut, donc la fonction est continue en 2. Elle n'est cependant pas dérivable en 2, car la courbe y forme un angle (pentes -1 et 1).

(d) Faux. La fonction est bien continue sur chacun des deux intervalles. Mais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle : la courbe a deux branches séparées, et il faut lever le crayon pour passer de l'une à l'autre. « Sans lever le crayon » n'a de sens que sur un intervalle.

Ex. 2 (suite)

(e) Vrai. f est continue sur $[0\,;3]$ et 1 est compris entre $f(0)=-2$ et $f(3)=5$. D'après le TVI, $f(x)=1$ admet au moins une solution dans $[0\,;3]$.

(f) Faux : il manque la continuité. Contre-exemple : $f(x)=-2$ sur $[0\,;1{,}5[$ et $f(x)=5$ sur $[1{,}5\,;3]$. On a bien $f(0)=-2$ et $f(3)=5$, mais f ne prend jamais la valeur 1.

Ex. 3 ★★☆ **Automatismes : le TVI s'applique-t-il ?**

(a) f est un polynôme, donc elle est continue sur $[1\,;2]$. On a $f(1)=-2$ et $f(2)=7$, et 0 est compris entre ces deux valeurs. D'après le TVI, il y a au moins une solution dans $[1\,;2]$.

(b) g est la somme de exp et d'une constante, donc elle est continue sur $[0\,;2]$. On a $g(0)=-2$ et $g(2)=e^2-3 \approx 4{,}389$, et 0 est compris entre ces deux valeurs. D'après le TVI, il y a au moins une solution dans $[0\,;2]$.

(c) u est la somme de ln et d'un polynôme, donc elle est continue sur $[1\,;e]$. On a $u(1)=1$ et $u(e)=1+e \approx 3{,}718$, et 2 est compris entre ces deux valeurs. D'après le TVI, il y a au moins une solution dans $[1\,;e]$.

(d) m est la somme de $\sqrt{x}$ et d'une constante, donc elle est continue sur $[1\,;9]$. On a $m(1)=-1$ et $m(9)=1:2$ n'est pas compris entre ces deux valeurs, donc le TVI ne permet pas de conclure. En fait, $m(x)=2$ équivaut à $\sqrt{x}=4$, soit $x=16$, qui n'est pas dans $[1\,;9]$: il n'y a aucune solution.

(e) h est un polynôme, donc elle est continue. On a $h(0)=0$ et $h(3)=6$: -1 n'est pas compris entre ces deux valeurs, donc le TVI ne permet pas de conclure sur $[0\,;3]$. Or $h(1)=-2$ et -1 est compris entre $h(1)=-2$ et $h(0)=0$. D'après le TVI, il y a donc au moins une solution dans $[0\,;1]$, et donc dans $[0\,;3]$.

Ex. 4 ★★☆ **Le tarif postal de Saint-Malo**

(a) Une lettre de 20 g coûte $P(20)=1{,}50$ €. Une lettre de 21 g coûte $P(21)=3{,}00$ €.

Ex. 4 **(suite)**

(b) Non. Le prix saute de 1,50 € à 3,00 € en $m = 20$, puis de 3,00 € à 6,00 € en $m = 100$. La courbe est un escalier : P n'est pas continue en 20 ni en 100, donc elle n'est pas continue sur $]0\,;250]$.

(c) Oui. Sur $]20\,;100]$, P est constante, égale à 3 : sa courbe est un segment horizontal, sans saut. P est donc continue sur cet intervalle.

(d) Inès applique le TVI alors que P n'est pas continue sur $[5\,;200]$. Les seuls prix possibles sont 1,50 €, 3 € et 6 € : aucune lettre ne coûte 4 €. Sans continuité, le TVI ne s'applique pas.

Ex. 5 ★★☆ **Choisir le paramètre pour raccorder**

(a) Avec $a = 0$, on obtient $1^2 - 3 \times 1 + 0 = -2$ et $2 \times 1 + 5 = 7$. Les deux expressions ne coïncident pas en 1 : la courbe fait un saut en $x = 1$, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Il faut que les deux expressions soient égales en 1 : $1 - 3 + a = 7$, c'est-à-dire $a - 2 = 7$, donc $a = 9$.

(c) Pour $a = 9$, sur $]-\infty\,;1]$, $f(x) = x^2 - 3x + 9$ est un polynôme, donc f est continue. Sur $]1\,;+\infty[$, $f(x) = 2x + 5$ est un polynôme, donc f est continue. En 1, les deux expressions valent 7 : il n'y a pas de saut. f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(d) On a $f(-1) = 1 + 3 + 9 = 13$ et $f(1) = 7$. f est continue sur $[-1\,;1]$ et 10 est compris entre $f(1) = 7$ et $f(-1) = 13$. Donc, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 10$ admet au moins une solution dans $[-1\,;1]$.

Ex. 6 ★★☆ **Le TVI de Léo**

(a) $g(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$ et $g(2) = \frac{4+1}{2-1} = 5$.

(b) Non. g n'est pas définie en 1, qui appartient à $[0\,;2]$: g n'est donc pas continue sur $[0\,;2]$. L'hypothèse de continuité du TVI n'est pas vérifiée, donc Léo ne peut pas conclure.

(c) $g(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 1 = 0$ (avec $x \neq 1$). Or $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ pour tout réel x. L'équation $g(x) = 0$ n'a donc aucune solution.

(d) g est une fonction rationnelle et $x - 1 \neq 0$ sur $[2\,;5]$: g est donc continue sur $[2\,;5]$. On a $g(2) = 5$ et $g(5) = \frac{26}{4} = 6{,}5$, et 6 est compris entre 5 et 6,5. Donc, d'après le TVI, l'équation $g(x) = 6$ admet au moins une solution dans $[2\,;5]$.

Ex. 7 ★★★ **Perfusion à l'hôpital de Rennes**

(a) Sur $[0\,;1]$, $C(t) = t^2 + 3t$ est un polynôme, donc C est continue sur $[0\,;1]$. Sur $]1\,;5]$, $t \mapsto 1 - t$ est affine et exp est continue sur $\mathbb{R}$. Leur composée $t \mapsto e^{1-t}$ est donc continue, et son produit par la constante a aussi. Donc C est continue sur $]1\,;5]$, quelle que soit la valeur de a.

(b) En $t = 1$, on a $1^2 + 3 \times 1 = 4$ et $a\,e^{1-1} = a \times e^0 = a$. Les deux morceaux se raccordent seulement si $a = 4$. Avec $a = 4$, la courbe se trace sans lever le crayon sur $[0\,;5]$: C est continue sur $[0\,;5]$.

(c) La dérivée de $t^2 + 3t$ est $2t + 3$. Elle vaut 5 en $t = 1$. La dérivée de $4e^{1-t}$ est $-4e^{1-t}$. Elle vaut -4 en $t = 1$. Les deux tangentes ont des coefficients directeurs différents (5 et -4), donc la courbe forme un angle en $t = 1$. Ben a tort : C est continue en 1, mais elle n'est pas dérivable en 1. Une fonction continue n'est pas forcément dérivable.

(d) C est continue sur $[0\,;1]$, avec $C(0) = 0$ et $C(1) = 4$. Comme 2 est compris entre 0 et 4, d'après le TVI, l'équation $C(t) = 2$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$. Avec $a = 4$, C est aussi continue sur $[1\,;5]$, avec $C(1) = 4$ et $C(5) = 4e^{-4} \approx 0{,}073$. Comme 2 est compris entre $C(5)$ et $C(1)$, d'après le TVI, l'équation $C(t) = 2$ admet au moins une solution dans $[1\,;5]$. La concentration vaut donc 2 mg/L à au moins un instant pendant la perfusion et à au moins un instant après.

(e) Sur $[0\,;1]$, on résout $t^2 + 3t - 2 = 0$. On a $\Delta = 9 + 8 = 17$. La racine $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ est négative, donc on la rejette. L'autre racine est $t_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \approx 0{,}5616$, et elle appartient bien à $[0\,;1]$. Cela correspond à environ 34 min. Sur $]1\,;5]$: $4e^{1-t} = 2 \iff e^{1-t} = \frac{1}{2} \iff 1 - t = -\ln 2 \iff t_2 = 1 + \ln 2 \approx 1{,}6931$. Cela correspond à environ 1 h 42 min.

Ex. 8 ★★★ **Le balayage de Nina**

(a) f est un polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f(-3) = -27 + 18 + 2 = -7$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1 - 6 + 2 = -3$ et $f(3) = 27 - 18 + 2 = 11$.

Ex. 8 **(suite)**

(b) f est continue sur $[-3\,;0]$, avec $f(-3)=-7$ et $f(0)=2$. Comme 0 est compris entre -7 et 2, d'après le TVI, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[-3\,;0]$. De même, f est continue sur $[0\,;1]$ et 0 est compris entre $f(1)=-3$ et $f(0)=2$: il y a au moins une solution dans $[0\,;1]$. Enfin, f est continue sur $[1\,;3]$ et 0 est compris entre $f(1)=-3$ et $f(3)=11$: il y a au moins une solution dans $[1\,;3]$. Aucune borne n'est une solution, puisque $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$ sont non nuls. Les solutions sont donc dans trois intervalles ouverts disjoints, et elles sont distinctes. L'équation $f(x)=0$ admet au moins trois solutions dans $[-3\,;3]$.

(c) La boucle avance de 0,1 en 0,1 tant que f a le même signe aux deux bornes du pas. On a $f(0{,}1)=1{,}401$, $f(0{,}2)=0{,}808$, $f(0{,}3)=0{,}227>0$ et $f(0{,}4)=-0{,}336<0$. Le produit devient donc négatif pour $n=3$, et le programme affiche $(0.3,\,0.4)$. f est continue sur $[0{,}3\,;0{,}4]$ et 0 est compris entre $f(0{,}4)$ et $f(0{,}3)$. D'après le TVI, l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution dans $[0{,}3\,;0{,}4]$: c'est un encadrement d'amplitude 0,1.

(d) On a $0{,}9<1$, donc $h(0{,}9)=0{,}9-2=-1{,}1$. On a $1\geqslant 1$, donc $h(1)=1$.

(e) Non, elle a tort. Au point de raccord 1, l'expression $x-2$ vaut -1, mais $h(1)=1$: les deux expressions ne coïncident pas. La courbe fait donc un saut en 1. h est continue sur $[0\,;1[$ et sur $[1\,;2]$, mais pas sur $[0{,}9\,;1]$: le TVI ne s'applique pas. D'ailleurs, $h(x)=0$ n'a aucune solution. En effet, $x-2=0$ donne $x=2$, qui n'est pas inférieur à 1, et $x=0$ n'est pas supérieur ou égal à 1. Le programme ne repère qu'un changement de signe. Avant de l'utiliser, il faut vérifier que la fonction est continue sur l'intervalle.

2. *Théorème des valeurs intermédiaires : existence d'une solution*

Ex. 9 ★☆☆ **Continue ou pas ?**

(a) f est un polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(b) g est une fonction rationnelle. Son dénominateur $x+2$ ne s'annule qu'en -2, qui n'est pas dans $[0\,;5]$. Donc g est continue sur $[0\,;5]$.

(c) $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Leur produit, auquel on ajoute la constante 4, est continu : h est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 9 **(suite)**

(d) $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et $x\mapsto -3x$ aussi. Leur somme k est donc continue sur $[0\,;+\infty[$.

(e) $x\mapsto\ln x$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et $x\mapsto x^2$ aussi. Leur somme m est donc continue sur $]0\,;+\infty[$.

(f) Non : le dénominateur $x-3$ s'annule en 3, qui est dans $[1\,;4]$. p n'est pas définie en 3, donc elle n'est pas continue sur $[1\,;4]$.

(g) Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (admis).
Donc q est continue sur $[-1\,;2]$.

Ex. 10 ★★☆ **Le TVI s'applique-t-il ?**

(a) $f(0)=3$ et $f(1)=1-5+3=-1$. Ces deux images sont de signes contraires et f est continue sur $[0\,;1]$. D'après le TVI, f s'annule au moins une fois sur $[0\,;1]$.

(b) $g(1)=e-3\approx -0{,}28<0$ et $g(2)=e^2-3\approx 4{,}39>0$: elles sont de signes contraires. Comme g est continue, d'après le TVI, $g(x)=0$ a au moins une solution dans $[1\,;2]$.

(c) $h(0)=\frac{4}{1}=4$ et $h(3)=\frac{4}{4}=1$. 3 est compris entre 1 et 4 et h est continue sur $[0\,;3]$. D'après le TVI, $h(x)=3$ a au moins une solution dans $[0\,;3]$.

(d) Non. $p(1)=3$ et $p(2)=8$: 10 n'est pas compris entre 3 et 8. Le TVI ne permet donc pas de conclure sur $[1\,;2]$.

(e) $q(2)=8-8+4=4$: on a $k=q(a)$, donc $x=2$ est une solution. Aucun théorème n'est nécessaire.

(f) $r(3)=\sqrt{3}+3<5$ car $\sqrt{3}<2$, et $r(4)=2+4=6$. 5 est compris entre $r(3)$ et $r(4)$ et r est continue sur $[3\,;4]$. D'après le TVI, $r(x)=5$ a au moins une solution dans $[3\,;4]$: $n=3$ convient.

Ex. 11 ★★☆ **Un raccord à régler**

(a) $f(0)=0$ et $f(5)=15+1=16$. Sur $[0\,;2]$, $x^2=5$ donne $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$; aucun n'est dans $[0\,;2]$ car $\sqrt{5}\approx 2{,}24$. Sur $]2\,;5]$, $3x+1=5$ donne $x=\frac{4}{3}$, qui n'est pas dans $]2\,;5]$. Il n'y a donc aucune solution, bien que 5 soit entre 0 et 16.

(b) $f(2)=4$, mais $3\times 2+1=7$: la courbe saute de 4 à 7 en $x=2$. f n'est pas continue sur $[0\,;5]$, donc l'hypothèse de continuité du TVI n'est pas vérifiée.

(c) Il faut $3\times 2+m=2^2$, soit $6+m=4$, donc $m=-2$.

Ex. 11 **(suite)**

(d) Avec $m = -2$, f est continue sur $[0\,;5]$: les deux morceaux sont des polynômes et ils se raccordent en 2. $f(0) = 0$ et $f(5) = 13$, et 5 est compris entre 0 et 13. D'après le TVI, $f(x) = 5$ a au moins une solution dans $[0\,;5]$. Sur $]2\,;5]$, $3x - 2 = 5$ donne $x = \frac{7}{3}$ (sur $[0\,;2]$, $x^2 \leqslant 4$ ne vaut jamais 5).

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux sur le TVI**

(a) Faux. Pour $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 1$: $f(0) = -1$, $f(0{,}5) = 1$, $f(1) = 0$, $f(1{,}5) = -1$ et $f(2) = 1$. f est continue (polynôme). D'après le TVI, f s'annule dans $[0\,;0{,}5]$ et dans $[1{,}5\,;2]$, et aussi en 1 : il y a au moins trois solutions. Le TVI donne « au moins une », pas « une unique ».

(b) Faux. Prenons $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $[0\,;4]$: $f(1) = 0$, mais $f(0) = 3$ et $f(4) = 3$ sont de même signe. La réciproque du TVI est fausse.

(c) Faux. 7 n'est pas compris entre 2 et 6, donc le TVI ne dit rien. Par exemple, $f(x) = -3x^2 + 14x - 9$ est continue, avec $f(1) = 2$ et $f(3) = 6$, et pourtant $f(2) = 7$.

(d) Faux. f n'est pas définie en 0, qui est dans $[-1\,;1]$: elle n'est pas continue sur $[-1\,;1]$ et le TVI ne s'applique pas. D'ailleurs $\frac{1}{x}$ ne vaut jamais 0.

(e) Vrai. f est continue sur $[0\,;5]$ et 1 est compris entre $f(5) = -2$ et $f(0) = 4$. D'après le TVI, $f(x) = 1$ a au moins une solution dans $[0\,;5]$.

Ex. 13 ★★☆ **Trois copies à corriger**

(a) Léo ne cite pas la continuité, et le TVI ne donne pas l'unicité : il faudrait aussi la stricte monotonie. Correction : f est continue sur $[0\,;1]$ (polynôme), $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$ sont de signes contraires. D'après le TVI, $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

(b) g n'est pas définie en 1, qui est dans $[0\,;3]$: g n'est pas continue sur $[0\,;3]$ et le TVI ne s'applique pas. D'ailleurs, $g(x) = 0$ équivaut à $2x + 1 = 0$, donc à $x = -\frac{1}{2}$, qui n'est pas dans $[0\,;3]$: il n'y a aucune solution.

(c) Erreur de calcul : $h(0) = e^0 - 0 = 1$, et non 0. $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = e - 4 \approx -1{,}28 < 0$ sont de signes contraires. h est continue sur $[0\,;1]$ (somme de fonctions continues). D'après le TVI, $h(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\,;1]$.

Ex. 14 ★★☆ **Concentration d'un médicament**

(a) $t \mapsto 10t$ est continue (polynôme). $t \mapsto e^{-0{,}5t}$ est continue (composée de exp et d'une fonction affine). Leur produit C est donc continu sur $[0\,;6]$.

(b) $C(0) = 0$ et $C(1) = 10e^{-0{,}5} \approx 6{,}07$. C est continue sur $[0\,;1]$ et 5 est compris entre 0 et 6,07. D'après le TVI, $C(t) = 5$ a au moins une solution dans $[0\,;1]$: la concentration atteint 5 mg/L pendant la première heure.

(c) Non. Si k n'est pas entre $C(0)$ et $C(6)$, le TVI ne permet pas de conclure, mais il ne prouve pas non plus qu'il n'y a pas de solution. $C(2) = 20e^{-1} \approx 7{,}36$: C est continue sur $[0\,;2]$ et 7 est compris entre $C(0) = 0$ et 7,36. D'après le TVI, la concentration atteint 7 mg/L au moins une fois.

(d) $C(4) = 40e^{-2} \approx 5{,}41$ et $C(6) = 60e^{-3} \approx 2{,}99$. C est continue sur $[4\,;6]$ et 4 est compris entre 2,99 et 5,41. D'après le TVI, $C(t) = 4$ a au moins une solution dans $[4\,;6]$.

Ex. 15 ★★★ **Une fonction, plusieurs équations**

(a) g est un polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[-3\,;3]$. On trouve
$g(-3) = -27 + 18 + 2 = -7$,
$g(-2) = -8 + 12 + 2 = 6$, $g(0) = 2$,
$g(1) = 1 - 6 + 2 = -3$, $g(2) = 8 - 12 + 2 = -2$ et
$g(3) = 27 - 18 + 2 = 11$.

(b) g est continue sur chacun des intervalles $[-3\,;-2]$, $[0\,;1]$ et $[2\,;3]$. On a $g(-3) = -7 < 0$ et $g(-2) = 6 > 0$; puis $g(0) = 2 > 0$ et $g(1) = -3 < 0$; enfin $g(2) = -2 < 0$ et $g(3) = 11 > 0$. Sur chacun de ces intervalles, 0 est compris entre les images des bornes. D'après le TVI, l'équation $g(x) = 0$ a donc au moins une solution dans chacun des trois intervalles. Ces intervalles n'ont aucun point commun, donc ces solutions sont distinctes : il y en a au moins trois dans $[-3\,;3]$.

(c) On a $g(-2) = 6$, donc $x = -2$ est une solution, sans avoir besoin du TVI. Ensuite, g est continue sur $[2\,;3]$ avec $g(2) = -2$ et $g(3) = 11$, et 6 est compris entre -2 et 11. D'après le TVI, l'équation $g(x) = 6$ a au moins une solution dans $[2\,;3]$, qui est différente de -2. L'équation $g(x) = 6$ a donc au moins deux solutions dans $[-3\,;3]$.

Ex. 15 **(suite)**

(d) On pose $h(x) = g(x) - x = x^3 - 7x + 2$. h est un polynôme, donc elle est continue sur $[0\,;1]$. On a $h(0) = 2 > 0$ et $h(1) = 1 - 7 + 2 = -4 < 0$: ces images sont de signes contraires. D'après le TVI, h s'annule au moins une fois sur $[0\,;1]$. Il existe donc un x de $[0\,;1]$ tel que $g(x) - x = 0$, c'est-à-dire $g(x) = x$.

Ex. 16 ★★★ **Bénéfice et taxe au-delà de 300 objets**

(a) $B(0) = -5$, $B(3) = -9 + 18 - 5 = 4$ et $B(6) = -36 + 36 - 8 = -8$. Pour $x = 3$, la deuxième expression vaut $-9 + 18 - 8 = 1$. Au point de raccord $x = 3$, les deux expressions donnent 4 et 1 : la courbe fait un saut. B n'est donc pas continue en 3, et donc pas continue sur $[0\,;6]$.

(b) Non. $B(1) = -1 + 6 - 5 = 0$: le bénéfice est nul pour 100 objets. Que $B(0)$ et $B(6)$ soient de même signe ne prouve pas que B ne s'annule jamais : la réciproque de « signes contraires aux bornes, donc B s'annule » est fausse.

(c) Sur $[0\,;3]$, $B(x) = -x^2 + 6x - 5$. B y est donc un polynôme, donc continue sur $[0\,;3]$. On a $B(0) = -5$ et $B(3) = 4$, et 2 est compris entre -5 et 4. D'après le TVI, l'équation $B(x) = 2$ admet au moins une solution dans $[0\,;3]$.

(d) B n'est pas continue sur $[3\,;6]$: elle saute en 3 (de 4 à des valeurs proches de 1). Le TVI ne s'applique donc pas. En $x = 3$, $B(3) = 4 \neq 2$. Sur $]3\,;6]$, on résout $-x^2 + 6x - 8 = 2$, c'est-à-dire $x^2 - 6x + 10 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$, donc pas de solution. Conclusion : l'équation $B(x) = 2$ n'a aucune solution dans $[3\,;6]$, et la conclusion d'Ana est fausse.

(e) Sur $[3{,}5\,;6]$, $B(x) = -x^2 + 6x - 8$: B y est un polynôme, donc continue. On a $B(3{,}5) = -12{,}25 + 21 - 8 = 0{,}75 > 0$ et $B(6) = -8 < 0$. Les images aux bornes sont de signes contraires, donc d'après le TVI, B s'annule au moins une fois sur $[3{,}5\,;6]$. Pour l'entreprise, il existe donc une production comprise entre 350 et 600 objets pour laquelle le bénéfice est nul. Au-delà, l'entreprise peut perdre de l'argent (par exemple, $B(6) < 0$).

3. *Corollaire : solution unique, nombre de solutions*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau de variations**

(a) Sur $[-3\,;1]$, f est continue et strictement décroissante, et $0 \in [-2\,;5]$: il y a une solution. Sur $[1\,;4]$, f est continue et strictement croissante, et $0 \in [-2\,;3]$: il y a une solution. Elles sont distinctes car $f(1) = -2 \neq 0$. Il y a donc deux solutions.

(b) Sur $[-3\,;1]$, f est continue et strictement décroissante, et $4 \in [-2\,;5]$: il y a une unique solution. Sur $[1\,;4]$, on a $f(x) \leqslant 3 < 4$: aucune solution. Il y a donc une seule solution.

(c) Non. Le minimum de f sur $[-3\,;4]$ vaut -2, donc $f(x) \geqslant -2 > -2{,}5$ pour tout x : aucune solution.

(d) Sur $[-3\,;1]$, $3 \in [-2\,;5]$ donne une unique solution, dans $]-3\,;1[$. Sur $[1\,;4]$, $3 = f(4)$ et f est strictement croissante : la seule solution est $x = 4$. Elles sont distinctes, donc il y a deux solutions.

(e) Non. Le tableau compte deux flèches. Sur chacune, f est strictement monotone, donc $f(x) = k$ a au plus une solution. Il y a donc au plus deux solutions sur $[-3\,;4]$.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur les hypothèses**

(a) Vrai. $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ et $x \mapsto x^2$ aussi (polynôme). Leur somme est donc continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Faux. Le TVI donne l'existence, pas l'unicité. Avec $g(x) = (2x-1)(x-1)(2x-3)$, continue (polynôme) : $g(0) = -3 < 0$ et $g(2) = 3 > 0$, mais $g(x) = 0$ a trois solutions : $\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{3}{2}$.

(c) Faux, il manque la continuité. Avec $h(x) = x - 1$ sur $[0\,;0{,}5[$ et $h(x) = x$ sur $[0{,}5\,;1]$: h est strictement croissante, $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$. Mais h « saute » de $-0{,}5$ à 0,5 et ne prend jamais la valeur 0.

(d) Faux. Une limite n'est pas atteinte : pour tout $x > 0$, $u(x) > 2$, donc $u(x) = 2$ n'a aucune solution. Le corollaire s'applique seulement si k est strictement compris entre 2 et $+\infty$, par exemple $k = 3$.

(e) Faux. Avec $v(x) = x^2$: sur $[-1\,;3]$, $v(x) = 4$ a pour seule solution $x = 2$ (car $-2 \notin [-1\,;3]$). Pourtant v n'est pas monotone : $v(-1) = 1$, $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$.

Ex. 19 ★☆☆ **Automatismes : ln, réciproque de exp**

(a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ses limites sont 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Si $y > 0$, alors y est strictement compris entre 0 et $+\infty$. D'après le corollaire du TVI, $e^x = y$ a une unique solution.

(b) $f(\alpha) = 7 \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(7)$. La réciproque de exp est ln, donc $\alpha = \ln 7 \approx 1{,}95$.

(c) Non. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x = -2$ n'a aucune solution. Et $\ln(-2)$ n'existe pas : ln est définie sur $]0\,;+\infty[$ seulement.

(d) Non. f^{-1} est la réciproque ln, pas l'inverse $\frac{1}{f}$. Pour $x = 2$: $f^{-1}(2) = \ln 2 \approx 0{,}69$, alors que $\frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$.

(e) $f^{-1}(1) = 0$ car $e^0 = 1$, et $f^{-1}(e^3) = 3$ car $f(3) = e^3$.

(f) Non. Elle n'est pas strictement monotone sur $[-2\,;2]$: l'équation $x^2 = 1$ y a deux solutions, -1 et 1. On ne peut donc pas associer un unique x à $y = 1$.

Ex. 20 ★★☆ **Corollaire sur un intervalle infini**

(a) $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues sur $]0\,;+\infty[$, donc leur somme f aussi. $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ et, comme $x > 0$, $f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

(b) En 0 : $2x \to 0$ et $\ln x \to -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. En $+\infty$: $2x \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, de limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. 3 est strictement compris entre $-\infty$ et $+\infty$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

(d) $f(1) = 2 + \ln 1 = 2 < 3$ et $f(2) = 4 + \ln 2 \approx 4{,}693 > 3$. Comme f est strictement croissante et $f(\alpha) = 3$, on a $f(1) < f(\alpha) < f(2)$, donc $1 < \alpha < 2$.

(e) Non. Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$ et $f(x)$ peut être négatif. Par le corollaire (question 3), -100 est strictement compris entre $-\infty$ et $+\infty$, donc $f(x) = -100$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

Ex. 21 ★★☆ **Compter les solutions de g(x) = h(x)**

(a) $x^3 + 5 = 12x \Leftrightarrow x^3 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$: on fait tout passer dans le membre de gauche.

Ex. 21 **(suite)**

(b) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$. Sur $[0\,;4]$, $x + 2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 2$: $f'(x) < 0$ sur $[0\,;2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2\,;4]$. On calcule $f(0) = 5$, $f(2) = 8 - 24 + 5 = -11$ et $f(4) = 64 - 48 + 5 = 21$.

x	0	2	4
f(x)	5 ↘	−11 ↗	21

(c) Sur $[0\,;2]$: f est continue (polynôme) et strictement décroissante, $f(0) = 5$ et $f(2) = -11$, 0 est compris entre -11 et 5, donc d'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\,;2]$. Sur $[2\,;4]$: f est continue et strictement croissante, $f(2) = -11$ et $f(4) = 21$, 0 est compris entre -11 et 21, donc d'après le même corollaire, une unique solution dans $[2\,;4]$. Elles sont distinctes car $f(2) \neq 0$. Il y a exactement deux solutions.

(d) Sur $[0\,;2]$, le maximum de f vaut $f(0) = 5 < 10$: aucune solution. Sur $[2\,;4]$, f est continue et strictement croissante et 10 est compris entre -11 et 21 : une unique solution. L'équation $f(x) = 10$ a donc une seule solution dans $[0\,;4]$.

Ex. 22 ★★☆ **Durée d'efficacité d'un médicament**

(a) $e^{-0{,}5t} > 0$, donc $C'(t)$ a le signe de $2 - t$: $C'(t) > 0$ sur $[0\,;2[$ et $C'(t) < 0$ sur $]2\,;10]$. $C(0) = 0$, $C(2) = 20e^{-1} \approx 7{,}36$ et $C(10) = 100e^{-5} \approx 0{,}67$.

t	0	2	10
C(t)	0 ↗	7,36 ↘	0,67

(b) Sur $[0\,;2]$: C est continue (produit de fonctions continues) et strictement croissante, $C(0) = 0$ et $C(2) \approx 7{,}36$. 5 est compris entre ces valeurs, donc d'après le corollaire du TVI, $C(t) = 5$ a une unique solution t_1 dans $[0\,;2]$. Sur $[2\,;10]$: C est continue et strictement décroissante, $C(10) \approx 0{,}67$, et 5 est compris entre 0,67 et 7,36 : une unique solution t_2. Comme $C(2) \neq 5$, elles sont distinctes : exactement deux solutions.

(c) $C(0{,}71) \approx 4{,}98 < 5$ et $C(0{,}72) \approx 5{,}02 > 5$, donc $0{,}71 < t_1 < 0{,}72$. $C(4{,}30) \approx 5{,}01 > 5$ et $C(4{,}31) \approx 4{,}995 < 5$, donc $4{,}30 < t_2 < 4{,}31$.

(d) D'après les variations, $C(t) \geqslant 5$ sur $[t_1\,;t_2]$. La durée $t_2 - t_1$ est comprise entre $4{,}30 - 0{,}72 = 3{,}58$ et $4{,}31 - 0{,}71 = 3{,}60$: le médicament est efficace pendant environ 3,6 h, soit à peu près 3 h 35 min.

Ex. 23 ★★★ **Deux solutions sur un intervalle infini, puis fonction réciproque**

(a) $x \mapsto x^2$ (polynôme) et ln sont continues sur $]0\,;+\infty[$, donc leur combinaison f aussi. f est dérivable : $f'(x) = 2x - \frac{6}{x} = \frac{2x^2-6}{x} = \frac{2(x^2-3)}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 3$: $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\sqrt{3}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]\sqrt{3}\,;+\infty[$. Minimum : $f(\sqrt{3}) = 3 - 6\ln\sqrt{3} = 3 - 3\ln 3 \approx -0{,}30$.

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	$3-3\ln 3$ ↗	$+\infty$

(b) Sur $]0\,;\sqrt{3}]$: f est continue et strictement décroissante, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $f(\sqrt{3}) = 3 - 3\ln 3 \approx -0{,}30$. Comme 0 est strictement compris entre $f(\sqrt{3})$ et $+\infty$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;\sqrt{3}]$. Sur $[\sqrt{3}\,;+\infty[$: f est continue et strictement croissante, $f(\sqrt{3}) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc, d'après le même corollaire, il y a une unique solution β dans $[\sqrt{3}\,;+\infty[$. Comme $f(\sqrt{3}) \neq 0$, on a $\alpha \neq \beta$: l'équation a exactement deux solutions, avec $\alpha < \sqrt{3} < \beta$.

(c) $f(1) = 1 > 0$, donc $1 < \alpha < \sqrt{3}$. Tableau de valeurs :

x	f(x)
1,3	0,116
1,4	−0,059
1,35	0,022
1,36	0,005
1,37	−0,012

Comme $f(1{,}36) > 0$, $f(1{,}37) < 0$ et que f est strictement décroissante sur $]0\,;\sqrt{3}]$, on obtient $1{,}36 < \alpha < 1{,}37$ (amplitude 10^{-2}).

(d) Le minimum de f vaut $m = 3 - 3\ln 3 \approx -0{,}30$. Si $k < m$: aucune solution, car $f(x) \geqslant m > k$ pour tout x. Si $k = m$: une seule solution, $x = \sqrt{3}$, car $f(x) > m$ pour tout $x \neq \sqrt{3}$ (stricte monotonie sur chaque intervalle). Si $k > m$: k est strictement compris entre m et $+\infty$. On applique le corollaire du TVI sur $]0\,;\sqrt{3}]$ (limite $+\infty$ en 0), puis sur $[\sqrt{3}\,;+\infty[$ (limite $+\infty$ en $+\infty$) : on trouve une solution sur chacun. Elles sont distinctes car $f(\sqrt{3}) = m \neq k$, donc il y a deux solutions.

Ex. 23 **(suite)**

(e) g est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{3}\,;+\infty[$. Ses valeurs forment l'intervalle $J = [3 - 3\ln 3\,;+\infty[$, et pour tout $y \in J$, l'équation $g(x) = y$ a une unique solution : g admet donc une réciproque g^{-1} définie sur J, strictement croissante. On a $g(3) = 9 - 6\ln 3$ et $3 \geqslant \sqrt{3}$, donc $g^{-1}(9 - 6\ln 3) = 3$. De même, $g(\beta) = 0$ et $\beta \geqslant \sqrt{3}$, donc $g^{-1}(0) = \beta$ (et non α, qui n'est pas dans $[\sqrt{3}\,;+\infty[$).

Ex. 24 ★★★ **Seuil de rentabilité d'une entreprise**

(a) $B'(x) = -6x^2 + 30x - 24 = -6(x^2 - 5x + 4) = -6(x-1)(x-4)$. Sur $]1\,;4[$, $(x-1)(x-4) < 0$ donc $B'(x) > 0$; sur $]4\,;6]$, $(x-1)(x-4) > 0$ donc $B'(x) < 0$. $B(1) = -21$, $B(4) = 6$, $B(6) = -46$.

x	1	4	6
B(x)	−21 ↗	6 ↘	−46

Le maximum de B vaut 6, soit 6 000 €. Comme $6 < 8$, un bénéfice de 8 000 € est impossible.

(b) Sur $[1\,;4]$: B est continue (polynôme) et strictement croissante, $B(1) = -21$ et $B(4) = 6$. 0 est compris entre $B(1)$ et $B(4)$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1\,;4]$. Sur $[4\,;6]$: B est continue et strictement décroissante, $B(4) = 6$ et $B(6) = -46$. 0 est compris entre ces valeurs, donc il y a une unique solution β dans $[4\,;6]$. Comme $B(4) = 6 \neq 0$, $\alpha \neq \beta$: exactement deux solutions. Lucas n'a regardé que les bornes, pas le maximum : il a tort.

(c) Sur $[1\,;4]$, B est croissante avec $B(a) < 0 < B(b)$. Si $B(m) < 0$, alors α est à droite de m et on remplace a par m : le test convient. Sur $[4\,;6]$, B est décroissante : si $B(m) > 0$, β est à droite de m. Il faut donc remplacer la ligne `if B(m) < 0:` par `if B(m) > 0:`, puis lancer `dicho(4, 6, 0.01)`. Sans cette correction, le programme se rapproche de 6 et ne trouve pas β.

(d) Calculatrice : $B(4{,}75) \approx 0{,}094 > 0$ et $B(4{,}76) \approx -0{,}076 < 0$. Comme B est strictement décroissante sur $[4\,;6]$, on obtient $4{,}75 < \beta < 4{,}76$. D'après les variations de B, $B(x) > 0$ pour $\alpha < x < \beta$. Comme $B(3{,}08) < 0$, $B(3{,}09) > 0$ et $B(4{,}75) > 0$, l'entreprise est rentable si elle fabrique entre 309 et 475 objets.

4. *Encadrer une solution : balayage et dichotomie*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : lire et écrire un encadrement**

(a) L'amplitude vaut $2{,}4 - 2{,}35 = 0{,}05$.

(b) Valeur approchée par défaut : 0,61 ; valeur approchée par excès : 0,62.

(c) Non. On sait seulement que α est entre 2,83 et 2,84. Si $\alpha = 2{,}838$, son arrondi au centième est 2,84. Pour arrondir, il faudrait savoir si $\alpha < 2{,}835$ ou non.

(d) $f(3{,}6) < 0$ et $f(3{,}7) > 0$: le signe change, donc $3{,}6 < \alpha < 3{,}7$.

(e) On regarde le signe de $g(x) - 1$: $g(0{,}4) - 1 = 0{,}3 > 0$ et $g(0{,}5) - 1 = -0{,}2 < 0$. Le signe change, donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

(f) Après 4 étapes, l'amplitude vaut $\frac{3-1}{2^4} = \frac{2}{16} = 0{,}125$.

(g) Non. Au pas de 0,1, deux valeurs consécutives sont distantes de 0,1 : on obtient un encadrement d'amplitude 0,1, du type $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$. Pour une amplitude de 10^{-2}, il faut un pas de 0,01.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : balayage à la calculatrice**

(a) $g(1{,}3) - 5 = -0{,}203 < 0$ et $g(1{,}4) - 5 = 0{,}544 > 0$: le signe change entre 1,3 et 1,4.

(b) $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

(c) Non. $g(1{,}3) = 4{,}797 \neq 5$, donc 1,3 n'est pas solution. On sait seulement que $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$: 1,3 est une valeur approchée par défaut de α à 0,1 près.

(d) On part de 1,3 : $g(1{,}32) \approx 4{,}940 < 5$ et $g(1{,}33) \approx 5{,}013 > 5$.
Donc $1{,}32 < \alpha < 1{,}33$.

(e) Non : il faut savoir de quel côté de 1,325 se trouve α. $g(1{,}325) \approx 4{,}976 < 5$, donc $1{,}325 < \alpha < 1{,}33$ et l'arrondi de α au centième est 1,33.

Ex. 27 ★★☆ **Dichotomie à la main avec une fonction décroissante**

(a) f est un polynôme, donc elle est continue et dérivable sur $[1\,;2]$, avec $f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$: f est strictement décroissante sur $[1\,;2]$. $f(1) = 2$ et $f(2) = -8$, et 0 est compris entre -8 et 2. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1\,;2]$.

Ex. 27 (suite)

(b) $f(1{,}5) = 6 - 3{,}375 - 4{,}5 = -1{,}875 < 0$, donc Inès pose $a = 1{,}5$ et obtient $[1{,}5\,;2]$. Mais $f(1{,}5) < 0$ et $f(2) < 0$: pas de changement de signe, donc α n'y est pas.
Comme f est décroissante, sa règle est inversée : il faut comparer le signe de $f(m)$ à celui de $f(a)$.

(c) On compare le signe de $f(m)$ à celui de $f(a)$ (ici $f(a) > 0$) :

a	b	m	f(m)
1	2	1,5	$-1{,}875$ $(-)$
1	1,5	1,25	$\approx 0{,}297$ $(+)$
1,25	1,5	1,375	$\approx -0{,}725$ $(-)$
1,25	1,375	1,3125	$\approx -0{,}198$ $(-)$

Après 4 étapes : $1{,}25 < \alpha < 1{,}3125$, encadrement d'amplitude $\frac{1}{2^4} = 0{,}0625$.

(d) Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{1}{2^n}$. On veut $2^n \geqslant 100$: $2^6 = 64$ ne suffit pas, $2^7 = 128$ suffit. Il faut donc 7 étapes.

Ex. 28 ★★☆ **Corriger un programme de dichotomie**

(a) Au départ, $b - a = 1$ et $1 < 0{,}01$ est faux : la boucle s'arrête avant d'avoir commencé. En plus, `return m` provoque une erreur, car `m` n'a jamais été calculé. On doit continuer tant que l'amplitude dépasse la précision : `while b - a > e:`.

(b) Le test dit que $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires (ou que l'un est nul) : α est dans $[a\,;m]$. On pose donc `b = m` si le test est vrai, et `a = m` sinon.

(c) On écrit `return a, b`. Le programme renvoie `(1.140625, 1.1484375)`, donc $1{,}140625 < \alpha < 1{,}1484375$. Il a fait 7 étapes, donc l'amplitude vaut $\frac{1}{2^7} = 0{,}0078125 \leqslant 0{,}01$.

(d) f est croissante et a reste à gauche de α, donc $f(a) < 0$ à chaque étape. Le test $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ revient alors à $f(m) \geqslant 0$. Pour une fonction décroissante, $f(a) > 0$: il faudrait tester $f(m) \leqslant 0$, donc le raccourci $f(m) \geqslant 0$ donnerait la mauvaise moitié.

Ex. 29 ★★☆ **Le café qui refroidit**

(a) T est continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (composée de exp et d'une fonction affine), avec $T'(t) = -6e^{-0{,}1t} < 0$: T est strictement décroissante. $T(0) = 80$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 20$ car $e^{-0{,}1t}$ tend vers 0. Comme 50 est compris entre 20 et 80, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $T(t) = 50$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

Ex. 29 **(suite)**

(b) $T(0) = 80$, donc `T(0) < 50` est faux : la boucle ne tourne pas et le programme renvoie $(0-1, 0)$. T est décroissante : on avance tant que la température reste au-dessus de 50, donc `while T(t) > 50:`.

(c) Il renvoie `(6, 7)` : $T(6) \approx 52{,}93 > 50$ et $T(7) \approx 49{,}80 < 50$.
Donc $6 < \alpha < 7$: le café passe à 50 °C entre la 6e et la 7e minute.

(d) $20 + 60e^{-0{,}1t} = 50 \iff e^{-0{,}1t} = 0{,}5 \iff -0{,}1t = \ln 0{,}5 = -\ln 2 \iff t = 10\ln 2$.
Donc $\alpha = 10\ln 2 \approx 6{,}93$, qui est bien entre 6 et 7. Il faut attendre 7 minutes : c'est la valeur approchée par excès de α à l'unité.

Ex. 30 ★★☆ **Un pas trop grand cache deux solutions**

(a) $f(1{,}5) = 2{,}25 - 4{,}5 + 2{,}2 = -0{,}05 < 0$. Or $f(1) > 0$ et $f(2) > 0$: f change deux fois de signe entre 1 et 2. Son pas de 1 est trop grand, il a sauté les deux changements de signe.

(b) $f'(x) = 2x - 3$ s'annule en 1,5 :

x	0	1,5	3
f(x)	2,2 ↘	−0,05 ↗	2,2

Sur $[0\,;1{,}5]$, f est continue et strictement décroissante, $f(0) = 2{,}2$ et $f(1{,}5) = -0{,}05$, et 0 est compris entre ces deux valeurs. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1{,}5]$. De même, sur $[1{,}5\,;3]$, f est continue et strictement croissante de $-0{,}05$ à 2,2 : on obtient une unique solution β.
L'équation a donc exactement deux solutions.

(c) $f(1{,}2) = 0{,}04 > 0$ et $f(1{,}3) = -0{,}01 < 0$, donc $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$. $f(1{,}7) = -0{,}01 < 0$ et $f(1{,}8) = 0{,}04 > 0$, donc $1{,}7 < \beta < 1{,}8$.

(d) Vrai. 1,72 et 1,73 sont dans $[1{,}5\,;3]$, où β est l'unique solution. $f(1{,}72) = -0{,}0016 < 0$ et $f(1{,}73) = 0{,}0029 > 0$: le signe change, donc $1{,}72 < \beta < 1{,}73$.

Ex. 31 ★★★ **Durée d'efficacité d'un médicament**

(a) C est continue sur $[0\,;10]$ (produit d'un polynôme et d'une composée de exp). Sur $[0\,;2]$: C est continue et strictement croissante, $C(0) = 0$ et $C(2) = 10e^{-1} \approx 3{,}68$, et 2 est compris entre $C(0)$ et $C(2)$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $C(t) = 2$ admet une unique solution α dans $[0\,;2]$. Sur $[2\,;10]$: C est continue et strictement décroissante, $C(2) \approx 3{,}68$ et $C(10) = 50e^{-5} \approx 0{,}34$, et 2 est compris entre ces deux valeurs.
Donc l'équation admet une unique solution β dans $[2\,;10]$. Comme $C(2) \neq 2$, on a $\alpha < 2 < \beta$. L'équation a donc exactement deux solutions.

(b) C est croissante sur $[0\,;2]$, donc on cherche où $C(t) - 2$ passe du signe $-$ au signe $+$. Au pas de 0,1 : $C(0{,}5) \approx 1{,}947 < 2$ et $C(0{,}6) \approx 2{,}222 > 2$, donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.
Au pas de 0,01 : $C(0{,}51) \approx 1{,}976 < 2$ et $C(0{,}52) \approx 2{,}005 > 2$.
Donc $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

(c) $C(0{,}515) \approx 1{,}990 < 2$, donc $\alpha > 0{,}515$. Avec la question précédente, $0{,}515 < \alpha < 0{,}52$: l'arrondi 0,52 est juste ($\alpha \approx 0{,}518$). Mais un arrondi n'est pas une borne inférieure : α est plus petit que 0,52.
L'encadrement correct d'amplitude 10^{-2} est $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

(d) C est décroissante sur $[2\,;10]$, donc $C(t) - 2$ passe du signe $+$ au signe $-$. Au pas de 0,1 : $C(5) \approx 2{,}052 > 2$ et $C(5{,}1) \approx 1{,}991 < 2$. Au pas de 0,01 : $C(5{,}08) \approx 2{,}003 > 2$ et $C(5{,}09) \approx 1{,}997 < 2$.
Donc $5{,}08 < \beta < 5{,}09$. Valeur approchée au centième par défaut : 5,08 ; par excès : 5,09.

(e) Le médicament est efficace pour $t \in [\alpha\,;\beta]$. Pour minorer $\beta - \alpha$, on prend la plus petite valeur de β et la plus grande de α : $\beta - \alpha > 5{,}08 - 0{,}52 = 4{,}56$. Pour majorer, on fait l'inverse : $\beta - \alpha < 5{,}09 - 0{,}51 = 4{,}58$.
Donc $4{,}56 < \beta - \alpha < 4{,}58$. Comme $4{,}56 > 4{,}5$, la durée d'efficacité dépasse 4 h 30.

Ex. 32 ★★★ **Trois solutions et un programme à adapter**

(a) $f'(x)$ est du signe de $(x-1)(x-3)$: positif sur $[0\,;1[$, négatif sur $]1\,;3[$, positif sur $]3\,;4]$.
Donc f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, strictement décroissante sur $[1\,;3]$ et strictement croissante sur $[3\,;4]$, avec $f(0)=-1$, $f(1)=3$, $f(3)=-1$ et $f(4)=3$. f est continue (c'est un polynôme). Sur chacun des trois intervalles, f est continue et strictement monotone, et 0 est compris entre les images des bornes (-1 et 3). Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur chacun d'eux. Les bornes 1 et 3 ne sont pas solutions. L'équation a donc exactement trois solutions dans $[0\,;4]$.

(b) $f(0)=-1<0$, donc la boucle tourne. $f(0{,}1)=-0{,}159<0$: elle continue. $f(0{,}2)=0{,}568\geqslant 0$: elle s'arrête avec $x=0{,}2$. Le programme renvoie $(0{,}1\,;0{,}2)$. Comme f est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$ avec $f(0{,}1)<0<f(0{,}2)$, on obtient $0{,}1<\alpha<0{,}2$.

(c) $f(1)=3$ n'est pas négatif, donc la boucle ne tourne pas. Le programme renvoie $(0{,}9\,;1)$, qui ne contient pas β. Sur $[1\,;3]$, f est décroissante et part d'une valeur positive : il faut avancer tant que $f(x)$ est positif. On remplace le test par `while f(x) > 0:`. Le programme renvoie alors $(2{,}3\,;2{,}4)$: $f(2{,}3)=0{,}127>0$ et $f(2{,}4)=-0{,}136<0$, donc $2{,}3<\beta<2{,}4$.

(d) Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{4-3}{2^n}=\frac{1}{2^n}$. On veut $\frac{1}{2^n}\leqslant 0{,}001$, c'est-à-dire $2^n\geqslant 1\,000$. Or $2^9=512$ donne $\frac{1}{512}\approx 0{,}00195>0{,}001$, et $2^{10}=1\,024$ donne $\frac{1}{1\,024}\approx 0{,}00098\leqslant 0{,}001$. Il faut donc 10 étapes.

(e) On écrit `while f(a) * f(x) > 0:`. La boucle avance tant que $f(x)$ a le même signe que $f(a)$ (ici $f(a)\neq 0$). Elle s'arrête donc au premier changement de signe, que f soit croissante ou décroissante. `balayage(3, 0.1)` renvoie $(3{,}5\,;3{,}6)$: $f(3{,}5)=-0{,}125<0$ et $f(3{,}6)=0{,}296>0$. Comme f est continue et strictement croissante sur $[3\,;4]$, on a $3{,}5<\gamma<3{,}6$.

5. *Résoudre f(x) = k en situation : seuils et équilibres*

Ex. 33 ★★☆ **Automatismes : traduire la question en équation**

(a) On résout $C(t)=1{,}5$ sur $[0\,;+\infty[$, car un temps est positif. Si la concentration monte puis descend, l'instant cherché est la plus petite solution, à encadrer ensuite.

(b) On résout $B(x)=0$ sur $[0\,;50]$: c'est le seuil de rentabilité, où le bénéfice passe de négatif à positif. On ne cherche pas en dehors des productions possibles.

(c) On résout $T(t)=40$ sur $[0\,;+\infty[$.

(d) On résout $D(p)=O(p)$, c'est-à-dire $f(p)=0$ avec $f(p)=D(p)-O(p)$, sur $[2\,;15]$.

(e) « Doubler » signifie atteindre $2\times 5\,000=10\,000$ €. On résout $K(t)=10\,000$ sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 34 ★★☆ **Automatismes : conclure dans le contexte**

(a) On arrondit par excès, car α peut aller jusqu'à 14,3 : au bout de 15 minutes, la température dépasse 60 °C.

(b) On arrondit par excès, car $\alpha>312{,}4$: il faut fabriquer au moins 313 objets.

(c) On arrondit par défaut, car $\alpha>6{,}93$: on est sûr que le sirop agit pendant 6 heures.

(d) On arrondit par défaut : $0{,}35\times 60=21$, donc $\alpha>2$ h 21 min. Il faut couper l'eau au plus tard à 11 h 21.

(e) $4{,}372<\alpha<4{,}373$, donc le prix d'équilibre est d'environ 4,37 €.

Ex. 35 ★★☆ **Balayage : l'équation $x\,e^x=3$**

(a) $g(1)\approx 2{,}718<3$ et $g(1{,}1)\approx 3{,}305>3$, donc $1<\alpha<1{,}1$.

(b) $g(1{,}04)\approx 2{,}942<3$ et $g(1{,}05)\approx 3{,}0005>3$, donc $1{,}04<\alpha<1{,}05$.

(c) $\alpha\approx 1{,}05$, par excès à 0,01 près.

(d) Non. L'écran arrondit : $g(1{,}05)\approx 3{,}0005>3$, donc $\alpha\neq 1{,}05$. Avec un pas de 0,001 : $g(1{,}049)\approx 2{,}995<3$ et $g(1{,}05)>3$, donc $1{,}049<\alpha<1{,}050$.

Ex. 36 ★★☆ **Seuil de rentabilité d'une fromagerie**

(a) $B'(x)=-0{,}03x^2+1{,}2x=0{,}03x(40-x)$. $B'(x)>0$ sur $]0\,;40[$ et $B'(x)<0$ sur $]40\,;50]$. $B(0)=-40$, $B(40)=280$ et $B(50)=210$.

x	0	40	50
B(x)	-40 ↗	280 ↘	210

Ex. 36 **(suite)**

(b) Le TVI donne seulement l'existence d'une solution. Pour l'unicité, il faut que B soit strictement monotone, ce qui est faux sur $[0\,;50]$. Il faut découper l'intervalle en $[0\,;40]$ et $[40\,;50]$.

(c) B est continue (c'est un polynôme) et strictement croissante sur $[0\,;40]$. $B(0)=-40$ et $B(40)=280$, donc 0 est compris entre $B(0)$ et $B(40)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $B(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\,;40]$. Sur $[40\,;50]$, $B(x)\geqslant 210>0$: il n'y a pas de solution.
Donc α est l'unique solution sur $[0\,;50]$.

(d) $B(8{,}84)\approx -0{,}02<0$ et $B(8{,}85)\approx 0{,}06>0$, donc $8{,}84<\alpha<8{,}85$. On arrondit par excès : la fromagerie est rentable à partir de 8,85 tonnes, soit 8 850 kg par mois.

Ex. 37 ★★☆ **Deux instants : l'efficacité d'un médicament**

(a) $C'(t)=6e^{-0{,}5t}+6t\times(-0{,}5)e^{-0{,}5t}=(6-3t)\,e^{-0{,}5t}$.
Comme $e^{-0{,}5t}>0$, $C'(t)$ a le signe de $6-3t$: positif avant 2, négatif après. $C(0)=0$, $C(2)=12e^{-1}\approx 4{,}41$ et $C(10)=60e^{-5}\approx 0{,}40$.

t	0	2	10
C(t)	0 ↗	4,41 ↘	0,40

(b) C est continue (produit et composée de fonctions continues). Sur $[0\,;2]$, C est strictement croissante, $C(0)=0$ et $C(2)\approx 4{,}41$. 2 est compris entre ces valeurs, donc d'après le corollaire du TVI, $C(t)=2$ a une unique solution α dans $[0\,;2]$. Sur $[2\,;10]$, C est strictement décroissante, $C(2)\approx 4{,}41$ et $C(10)\approx 0{,}40$, donc il y a une unique solution β. Comme $C(2)\neq 2$, $\alpha<2<\beta$: il y a exactement deux solutions.

(c) $C(0{,}40)\approx 1{,}965<2$ et $C(0{,}41)\approx 2{,}004>2$, donc $0{,}40<\alpha<0{,}41$. $C(5{,}66)\approx 2{,}004>2$ et $C(5{,}67)\approx 1{,}998<2$, donc $5{,}66<\beta<5{,}67$.

(d) Le médicament est efficace entre α et β, donc pendant $\beta-\alpha$ heures. Or $\beta-\alpha>5{,}66-0{,}41=5{,}25$ h, soit 5 h 15 min. Maëlle a raison : le médicament est efficace pendant plus de 5 h 15 min.

Ex. 38 ★★☆ **Dichotomie : l'équation** $\ln x+x=2$

(a) f est continue sur $]0\,;+\infty[$, car c'est une somme de fonctions continues. $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, donc f est strictement croissante. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, donc 0 est strictement compris entre ces limites. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

(b) $f(1)=-1<0$ et $f(2)=\ln 2\approx 0{,}69>0$, donc $1<\alpha<2$.

a	b	m	f(m)
1	2	1,5	−0,09
1,5	2	1,75	0,31
1,5	1,75	1,625	0,11

Après trois étapes : $1{,}5<\alpha<1{,}625$, avec une amplitude de 0,125.

(c) `if log(m) + m - 2 < 0:` En effet, si $f(m)<0$, alors α est à droite de m, donc on remplace a par m.

(d) L'amplitude part de 1 et est divisée par 2 à chaque passage : il faut $\frac{1}{2^n}\leqslant 0{,}01$, soit $2^n\geqslant 100$. Comme $2^6=64$ et $2^7=128$, la boucle est parcourue 7 fois.

(e) $1{,}5546875<\alpha<1{,}5625$, car $f(a)<0<f(b)$. Tout cet intervalle est à moins de 0,01 de 1,56, donc $\alpha\approx 1{,}56$ à 0,01 près.

Ex. 39 ★★★ **Démouler un gâteau : un seuil sur un intervalle infini**

(a) $T'(t)=8e^{-0{,}1t}+(160+8t)\times(-0{,}1)e^{-0{,}1t}=(8-16-0{,}8t)e^{-0{,}1t}=-(8+0{,}8t)e^{-0{,}1t}$. Pour $t\geqslant 0$, on a $8+0{,}8t>0$ et $e^{-0{,}1t}>0$, donc $T'(t)<0$: T est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

(b) T est continue sur $[0\,;+\infty[$ (elle est dérivable) et strictement décroissante. $T(0)=20+160=180$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=20$. Comme cette limite n'est pas atteinte, il faut k strictement compris entre 20 et 180 : c'est le cas de 40. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $T(t)=40$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

(c) On a $T(29{,}9)\approx 40{,}075>40$ et $T(30)\approx 39{,}915<40$. Comme T est strictement décroissante, on obtient $29{,}9<\alpha<30$.

Ex. 39 **(suite)**

(d) T est strictement décroissante et $T(\alpha) = 40$, donc $T(t) \leqslant 40$ équivaut à $t \geqslant \alpha$. Comme $29 < \alpha < 30$, on arrondit par excès : $T(29) \approx 41{,}57 > 40$ mais $T(30) < 40$. Malo peut démouler au bout de 30 minutes.

(e) Non. Pour tout $t \geqslant 0$, $(160 + 8t)\,e^{-0{,}1t} > 0$, donc $T(t) > 20$. La température se rapproche de 20 °C sans jamais l'atteindre : la limite n'est pas une valeur prise par T, et l'équation $T(t) = 20$ n'a pas de solution.

Ex. 40 ★★★ **Protéger des semis : deux seuils dans la journée**

(a) $T'(t) = -0{,}06t^2 + 1{,}2t - 4{,}5 = -0{,}06(t^2 - 20t + 75) = -0{,}06(t-5)(t-15)$. On a $T'(t) < 0$ sur $[0\,;5[$, $T'(t) > 0$ sur $]5\,;15[$ et $T'(t) < 0$ sur $]15\,;18]$. On calcule $T(0) = 14$, $T(5) = 4$, $T(15) = 14$ et $T(18) = 10{,}76$. Tableau : T décroît de 14 à 4 sur $[0\,;5]$, croît de 4 à 14 sur $[5\,;15]$, puis décroît de 14 à 10,76 sur $[15\,;18]$.

(b) Noé applique le corollaire sur $[0\,;18]$, où T n'est pas strictement monotone. Il faut travailler sur chaque flèche. T est continue (polynôme). Sur $[0\,;5]$, T est strictement décroissante et $12 \in [4\,;14]$: une solution. Sur $[5\,;15]$, T est strictement croissante et $12 \in [4\,;14]$: une solution. Sur $[15\,;18]$, T est strictement décroissante et $12 \in [10{,}76\,;14]$: une solution. Elles sont distinctes car $T(5) \neq 12$ et $T(15) \neq 12$. L'équation $T(t) = 12$ a donc trois solutions.

(c) T est continue sur $[0\,;18]$ (polynôme). Sur $[0\,;5]$, T est strictement décroissante, $T(0) = 14$ et $T(5) = 4$: 10 est compris entre 4 et 14, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il y a une unique solution. Sur $[5\,;15]$, T est strictement croissante de 4 à 14 : une unique solution, pour la même raison. Sur $[15\,;18]$, T décroît de 14 à 10,76, donc $T(t) \geqslant 10{,}76 > 10$: aucune solution. Les deux solutions sont distinctes car $T(5) = 4 \neq 10$. L'équation $T(t) = 10$ a deux solutions sur $[0\,;18]$.

(d) Sur $[5\,;15]$, f est strictement croissante et $f(\gamma) = 0$. Si $f(m) < 0$, alors $f(m) < f(\gamma)$, donc $m < \gamma$: γ est dans $[m\,;b]$, et on remplace a par m. La boucle s'arrête quand $b - a \leqslant 0{,}01$. On obtient $10{,}664 < \gamma < 10{,}674$, encadrement d'amplitude 0,01.

Ex. 40 **(suite)**

(e) La température passe sous 10 °C à l'instant β : le voile doit être posé au plus tard à β. On arrondit donc par défaut : $\beta > 1{,}02$ h, et $0{,}02 \times 60 = 1{,}2$ min, d'où une pose au plus tard à 1 h 01. La température remonte à 10 °C à l'instant γ : on retire le voile après γ. On arrondit donc par excès : $\gamma < 10{,}674$ h, et $0{,}674 \times 60 \approx 40{,}44$ min, d'où un retrait à 10 h 41.