Terminale maths expertes / Complexes : forme exponentielle

benprof particulier.fr

48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Argument et forme trigonométrique*

À retenir : $\arg(z)$ n'existe que si $z \neq 0$: il faut $\cos\theta = \frac{a}{r}$ ET $\sin\theta = \frac{b}{r}$, puis la mesure principale dans $]-\pi\,;\pi]$. Ex. : $\arg(-1-\mathrm{i}) = -\frac{3\pi}{4}$. Dans $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, on a $r > 0$ et le signe « + ».

Ex. 1 ★☆☆ **Module et argument** — Calcule le module et la mesure principale d'un argument de chaque nombre.

(a) $z_1 = 4 + 4\mathrm{i}$ (b) $z_2 = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$

(c) $z_3 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ (d) $z_4 = -9$

(e) $z_5 = -\frac{5}{2}\mathrm{i}$ (f) $z_6 = \mathrm{i}\,(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6})$

Ex. 2 ★☆☆ **Retour à la forme algébrique** — Écris chaque nombre sous forme algébrique.

(a) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(b) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

(c) $5\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$

(d) $\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

(e) $3\left(\cos\frac{9\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{4}\right)$

Ex. 3 ★☆☆ **La vraie forme trigonométrique** — Explique pourquoi l'écriture ne convient pas, puis écris le nombre sous la forme $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$ et θ mesure principale.

(a) $-2\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$ (b) $5\left(\cos\frac{2\pi}{7} - \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}\right)$ (c) $4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(d) $\sin\frac{\pi}{9} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{9}$ (e) $-\cos\frac{\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{10}$

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs de Léna** — Léna a rédigé ses réponses, mais chacune contient une erreur. Repère l'erreur, explique-la, puis donne la bonne réponse.

(a) « Pour $z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$, $\tan\theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, donc $\arg(z) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. »

(b) « Pour $z = 4 - 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, on a $\cos\theta = \frac{1}{2}$, donc $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. »

(c) « 0 est un réel positif, donc $\arg(0) = 0\ [2\pi]$. »

(d) « -6 est un réel négatif, donc la mesure principale de $\arg(-6)$ est $-\pi$. »

Ex. 5 ★★☆ **Un module qui dépend d'un paramètre** — Pour tout réel a, on pose $z_a = a + a\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(a) Pour quelle valeur de a le nombre z_a n'a-t-il pas d'argument ? Justifie.

(b) Exprime $|z_a|$ en fonction de a.

(c) On suppose $a > 0$. Écris z_a sous forme trigonométrique.

(d) On suppose $a < 0$. Écris z_a sous forme trigonométrique.

(e) Déduis-en les réels a tels que $|z_a| = 6$, puis donne pour chacun la mesure principale de $\arg(z_a)$.

Ex. 6 ★★★ **Un argument qui dépend d'un angle** — Pour tout réel θ, on pose $z_\theta = 1 + \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. On rappelle que $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ et $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ pour tout réel a.

(a) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, calcule le module de z_θ et la mesure principale d'un argument de z_θ.

(b) Exprime $1 + \cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$, puis factorise z_θ par $2\cos\frac{\theta}{2}$.

(c) On suppose $\theta \in\,]-\pi\,;\pi[$. Déduis-en le module et un argument de z_θ. Justifie que cet argument est la mesure principale.

(d) Calcule z_π. Peut-on parler d'un argument de z_π ? Justifie.

(e) Pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$, Ben applique la factorisation de la question 2 et conclut : « $|z_\theta| = 2\cos\frac{2\pi}{3}$ et $\arg(z_\theta) = \frac{2\pi}{3}$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis corrige.

Ex. 7 ★★★ **Imposer un argument** — Pour tout réel m, on pose $z_m = (m-2) + (m+2)\mathrm{i}$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

(a) Détermine le réel m tel que $\arg(z_m) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, puis donne z_m.

(b) Existe-t-il un réel m tel que z_m soit un réel strictement positif ? Justifie. Donne ensuite m tel que $\arg(z_m) = \pi\ [2\pi]$.

(c) À l'aide du cosinus et du sinus d'un argument de z_m, détermine le réel m tel que $\arg(z_m) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

(d) Noé affirme : « Si θ est un argument de z_m, il suffit d'avoir $\tan\theta = -1$ pour obtenir $\arg(z_m) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, donc un tel m existe. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Exprime $|z_m|^2$ en fonction de m. Démontre que $z_m \neq 0$ pour tout m, puis dis s'il existe m tel que $z_m \in \mathbb{U}$.

Ex. 8 ★★★ **Un angle de $\pi/8$** — On pose $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. On rappelle que $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ pour tout réel a.

(a) Calcule $|z|$.

(b) En prenant $a = \frac{\pi}{8}$, détermine la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$, puis celle de $\sin\frac{\pi}{8}$.

(c) Déduis-en une forme trigonométrique de z. Justifie à l'aide du cosinus et du sinus.

(d) Détermine la mesure principale d'un argument de $w = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(e) Inès écrit $\overline{z} = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)$ et affirme : « c'est une forme trigonométrique, d'argument $\frac{\pi}{8}$ ». A-t-elle raison ? Justifie, puis corrige.

2. *Forme exponentielle : produits, quotients, puissances*

À retenir : Produit : $re^{\mathrm{i}\theta} \times r'e^{\mathrm{i}\theta'} = rr'e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$. Quotient : on divise les modules et on soustrait les arguments. $\overline{re^{\mathrm{i}\theta}} = re^{-\mathrm{i}\theta}$ et $(re^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$. Il faut $r > 0$: $-2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} = 2e^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$. Pour une somme, reviens à la forme algébrique.

Ex. 9 ★☆☆ **Calculer en forme exponentielle** — Écris chaque nombre sous forme exponentielle $re^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et θ en mesure principale.

(a) $2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{18}} \times 3e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{18}}$

(b) $\dfrac{8e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}{2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

(c) $\overline{5e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}}$

(d) $-4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}$

(e) $\left(2e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}\right)^4$

(f) $\dfrac{1}{3e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}}$

Ex. 10 ★☆☆ **De la forme algébrique au produit** — On pose $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Donne chaque résultat sous forme exponentielle, avec l'argument en mesure principale.

(a) Écris z_1 sous forme exponentielle.

(b) Écris z_2 sous forme exponentielle.

(c) Calcule $z_1 z_2$.

(d) Calcule $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(e) Calcule z_2^5.

(f) Calcule $\overline{z_1} \times z_2$.

Ex. 11 ★★☆ **Les erreurs de Lina** — Lina a écrit quatre affirmations dans son devoir. Pour chacune : a-t-elle raison ? Justifie et, si besoin, corrige.

(a) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$. Calcule aussi le module de cette somme.

(b) $-3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$ a pour module -3 et pour argument $-\frac{\pi}{7}$.

(c) $\dfrac{4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{10}}}{2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

Ex. 11 (suite)

(d) $\left(e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}\right)^4 = \mathrm{i}$.

Ex. 12 ★★☆ **Valeurs exactes par un quotient** — On pose $a = \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$, $b = 2 + 2\mathrm{i}$ et $q = \frac{a}{b}$.

(a) Écris a et b sous forme exponentielle.

(b) Déduis-en la forme exponentielle de q.

(c) Calcule la forme algébrique de q.

(d) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Ex. 13 ★★☆ **Quand la puissance devient réelle** — On pose $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}\,\mathrm{i}$. Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

(a) Écris z sous forme exponentielle.

(b) Exprime z^n sous forme exponentielle en fonction de n.

(c) Détermine les entiers n pour lesquels z^n est un réel.

(d) Existe-t-il un entier n pour lequel z^n est imaginaire pur ? Justifie.

(e) Détermine le plus petit entier n tel que z^n soit un réel strictement négatif, puis calcule ce z^n.

Ex. 14 ★★★ **Une puissance égale à un conjugué** — On cherche les nombres complexes z non nuls tels que $z^2 = -4\mathrm{i}\,\overline{z}$. On écrit $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et θ réel.

(a) Écris $-4\mathrm{i}$ sous forme exponentielle, puis exprime z^2 et $-4\mathrm{i}\,\overline{z}$ sous forme exponentielle en fonction de r et de θ.

(b) Déduis-en la valeur de r et une condition sur θ modulo 2π.

(c) Détermine toutes les solutions, sous forme exponentielle avec l'argument en mesure principale, puis sous forme algébrique.

(d) Noé affirme que $-4e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est solution, car l'angle $-\frac{\pi}{6}$ convient. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Calcule le produit des solutions sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

Ex. 15 ★★★ **Somme de deux exponentielles : l'angle moitié** — On pose $S = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} + e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ et $T = e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{10}} + e^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{10}}$. On ne peut pas additionner les arguments d'une somme : on va factoriser.

(a) Démontre que, pour tous réels α et β, $e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{\mathrm{i}\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

(b) Déduis-en la forme exponentielle de S, puis justifie que $S \neq e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$.

(c) Applique la formule de la question 1 à T. L'écriture obtenue est-elle une forme exponentielle ? Justifie, puis donne la forme exponentielle de T.

(d) Donne la forme exponentielle, puis la forme algébrique de $S \times T$.

Ex. 15 (suite)

(e) Donne la forme exponentielle de $\frac{S}{T}$, avec l'argument en mesure principale.

Ex. 16 ★★★ Puissances d'un produit avec conjugué — On pose $u = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$, $v = -1 - \mathrm{i}$ et $P = u \times \overline{v}$. Dans cet exercice, n désigne un entier naturel.

(a) Écris u et v sous forme exponentielle.

(b) Déduis-en la forme exponentielle de P, avec l'argument en mesure principale.

(c) Détermine tous les entiers naturels n tels que P^n soit un imaginaire pur.

(d) Détermine le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que P^n soit un réel strictement positif. Donne alors P^n sous la forme 2^k.

3. *Formules de Moivre et d'Euler, formules d'addition*

À retenir : $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, puis mesure principale ; $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$. Euler : $\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$, et le 2i s'élève aussi : $(2\mathrm{i})^2 = -4$.

Ex. 17 ★☆☆ Puissances sans développer — Écris chaque nombre sous forme exponentielle, avec la mesure principale de son argument, puis sous forme algébrique. Ne développe jamais la puissance.

(a) $(1-\mathrm{i})^6$ (b) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5$ (c) $(-1-\mathrm{i})^4$

(d) $\left(\cos\frac{\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{10}\right)^{15}$ (e) $\frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{-4}}{}$ (f) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2026}$

Ex. 18 ★☆☆ Linéariser avec Euler — Linéarise chaque expression avec les formules d'Euler et la formule du binôme. Contrôle ensuite ton résultat avec une valeur simple de x.

(a) $\sin^2 x$ (b) $\cos^3(2x)$ (c) $\sin^4 x$

(d) $\cos^4 x$ (e) $\cos x \times \sin^2 x$

Ex. 19 ★★☆ Formules d'addition démontrées par les exponentielles — Soit a et b deux réels. Tu utilises la relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$ et la forme trigonométrique.

(a) Calcule $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}$ de deux façons. Déduis-en $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$.

(b) En calculant $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)^2$ de deux façons, exprime $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.

(c) Écris $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et calcule les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

(d) Contrôle les deux valeurs trouvées avec la formule de $\sin(2a)$ démontrée plus haut.

Ex. 20 ★★☆ L'erreur d'Inès sur $\cos(3\theta)$ — Inès écrit : « Par Moivre, $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + \mathrm{i}\sin^3\theta$, donc $\cos(3\theta) = \cos^3\theta$. »

(a) Teste l'égalité $\cos(3\theta) = \cos^3\theta$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$. Inès a-t-elle raison ? Explique son erreur.

(b) Développe $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3$ avec la formule du binôme, puis donne sa partie réelle.

(c) Déduis-en $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ seul.

(d) On suppose $\cos\theta = \frac{1}{3}$. Calcule la valeur exacte de $\cos(3\theta)$.

Ex. 21 ★★☆ Factoriser par l'angle moitié — Malo cherche le module et un argument de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sans passer par la forme algébrique. Soit θ un réel.

(a) Démontre que $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$, en factorisant par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

(b) Déduis-en le module et la mesure principale de l'argument de $z_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$.

(c) Donne le module et la mesure principale de l'argument de $z_2 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$, puis contrôle avec sa forme algébrique.

(d) Démontre que z_1^5 est un nombre réel et donne son signe.

Ex. 22 ★★★ Du binôme à la valeur exacte de $\cos(\pi/8)$ — Soit θ un réel. On note $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$. On rappelle que $c^2 + s^2 = 1$.

(a) Développe $(c + \mathrm{i}s)^4$ avec la formule du binôme. À l'aide de la formule de Moivre, exprime $\cos(4\theta)$ en fonction de c seulement.

(b) Exprime $\sin(4\theta)$ en fonction de c et de s.

(c) On pose $\theta = \frac{\pi}{8}$. Écris l'équation dont $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est solution, puis déduis-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(d) Vrai ou faux : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Justifie.

Ex. 23 ★★★ Linéariser $\sin^3 x$ pour intégrer — Noé veut calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \,\mathrm{d}x$. Il commence par écrire : « D'après Euler, $\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$. »

(a) Teste la formule de Noé pour $x = \frac{\pi}{2}$. A-t-il raison ? Justifie, puis donne la formule correcte en la démontrant.

(b) Linéarise $\sin^3 x$ avec la formule correcte et le binôme. Contrôle ton résultat pour $x = \frac{\pi}{2}$.

(c) Déduis-en la valeur exacte de I.

(d) Déduis de la question 2 une expression de $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$. Vérifie-la pour $x = \frac{\pi}{6}$.

Ex. 24 ★★★ **Somme de deux exponentielles et puissances** — Kenza étudie le nombre complexe $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$, sans passer par une calculatrice.

(a) Factorise u par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, où α est la moyenne de $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$, puis utilise une formule d'Euler. Déduis-en le module de u et la mesure principale de son argument.

(b) Écris u^6 sous forme exponentielle, avec la mesure principale de son argument, puis sous forme algébrique.

(c) Détermine les entiers naturels $n \geqslant 1$ tels que u^n est un réel strictement positif. Calcule u^n pour le plus petit d'entre eux.

(d) En écrivant u sous forme algébrique de deux façons, déduis-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

4. *Racines n-ièmes de l'unité, équations $z^n = a$*

À retenir : $\mathbb{U}_n$ (racines n-ièmes de 1) : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, k de 0 à $n-1$; somme nulle si $n \geqslant 2$. Si $\rho > 0$, $z^n = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ a n solutions $\rho^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$, k de 0 à $n-1$. Ex. : $z^2 = 4\mathrm{i}$ donne $\pm\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$.

Ex. 25 ★☆☆ **Racines de l'unité : écrire et calculer** — On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, et $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

(a) Écris les six éléments de $\mathbb{U}_6$ sous forme exponentielle, avec la mesure principale de leur argument.

(b) Donne la forme algébrique de chaque élément de $\mathbb{U}_6$.

(c) On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Donne la mesure principale d'un argument de ω^5.

(d) Avec le même ω, calcule $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^7$.

(e) Démontre que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{14\pi}{5}}$ appartient à $\mathbb{U}_5$, puis donne la mesure principale de son argument.

(f) Écris j^{10} sous forme algébrique.

(g) Que vaut la somme des éléments de $\mathbb{U}_1$? Justifie.

Ex. 26 ★☆☆ **Résoudre $z^n = a$** — Dans chaque question, z désigne un nombre complexe.

(a) Écris $-27\mathrm{i}$ sous forme exponentielle, puis résous $z^3 = -27\mathrm{i}$ (forme exponentielle, mesures principales).

(b) Résous $z^4 = -625$, puis donne sous forme algébrique les solutions de partie réelle strictement positive.

(c) Sans résoudre, donne le nombre de solutions de $z^5 = 1024\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$ et leur module commun.

(d) Écris $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme exponentielle, puis résous $z^2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ (forme algébrique).

Ex. 27 ★★☆ **Vrai ou faux sur les racines** — On note $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) « L'équation $z^5 = 1$ a six solutions : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}$ pour $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$. »

(b) « $\overline{j} = j^2 = \dfrac{1}{j}$. »

(c) « L'équation $z^3 = 216$ a pour unique solution 6. »

(d) « $j^{2026} + j^{2027} + j^{2028} = 0$. »

(e) « $(1+j)^3 = 1$. »

Ex. 28 ★★☆ **La résolution de Noé** — Pour résoudre $z^4 = 16\mathrm{i}$, Noé écrit : « $16\mathrm{i} = 16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Je pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$: $r^4 = 16$ donc $r = 2$ ou $r = -2$, et $4\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{8}$. Les solutions sont $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$. »

(a) Noé garde $r = -2$. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Le nombre $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ est-il pourtant solution ? Justifie, puis écris-le sous forme exponentielle avec un module positif et la mesure principale.

(c) Quelle erreur Noé commet-il sur l'argument ? Écris l'égalité correcte et déduis-en θ.

(d) Résous correctement $z^4 = 16\mathrm{i}$ (forme exponentielle, mesures principales), puis dis combien de solutions Noé a oubliées.

Ex. 29 ★★☆ **Un polygone caché dans une équation** — On considère l'équation $(E) : z^6 = -729$. On note z_0 la solution dont l'argument dans $[0;2\pi[$ est le plus petit, z_1 la suivante dans le sens direct, et A_0, A_1, … les images des solutions dans un repère orthonormé direct d'origine O.

(a) Écris -729 sous forme exponentielle, puis résous (E) (forme exponentielle, mesures principales).

(b) Justifie que les images des solutions sont les sommets d'un polygone régulier, dont tu précises le nombre de côtés et le cercle circonscrit.

(c) Calcule la longueur A_0A_1, puis déduis-en le périmètre du polygone.

(d) Démontre, sans additionner les solutions une à une, que leur somme est nulle.

Ex. 30 ★★★ **Le pentagone régulier et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$** — On note $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$, $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Les images des racines cinquièmes de l'unité sont les sommets d'un pentagone régulier. On cherche la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

(a) Résous $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$. Donne les cinq solutions sous forme exponentielle, avec la mesure principale, puis écris chacune comme une puissance de ω.

(b) Démontre que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

(c) Exprime u et v à l'aide de cosinus, puis calcule $u + v$ et uv.

(d) Déduis-en une équation du second degré dont u et v sont les solutions, puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Ex. 30 (suite)

(e) Déduis-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, puis celle de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Ex. 31 ★★★ Une solution trouvée de tête, puis toutes les autres — On considère l'équation (E) : $z^3 = -2 + 2\mathrm{i}$, et on note $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Inès affirme que $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ est solution de (E).

(a) Écris $-2 + 2\mathrm{i}$ sous forme exponentielle, puis vérifie l'affirmation d'Inès.

(b) Démontre que z est solution de (E) si et seulement si $\left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$. Déduis-en toutes les solutions de (E) à l'aide de z_0 et de j.

(c) Écris chaque solution sous forme exponentielle (mesure principale), puis sous forme algébrique. Contrôle que leur module convient.

(d) On note A, B et C les points d'affixes z_0, $z_0 j$ et $z_0 j^2$. Démontre que le triangle ABC est équilatéral et donne la longueur de ses côtés.

(e) Sans passer par la forme algébrique, calcule $z_0 + z_0 j + z_0 j^2$. Déduis-en le centre de gravité du triangle ABC.

Ex. 32 ★★★ Sommes de cosinus sur un polygone régulier — Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$. Pour $n \geqslant 3$, les points d'affixes ω^k sont les sommets d'un polygone régulier.

(a) Démontre que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$. Déduis-en C_n et $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

(b) On suppose $n \geqslant 3$. Démontre que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2k} = 0$. Que vaut cette somme si $n = 2$? Justifie.

(c) Linéarise $\cos^2 x$, puis calcule Q_n en fonction de n pour $n \geqslant 3$.

(d) Déduis-en les valeurs de $\sum_{k=0}^{7} \cos^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ et de $\sum_{k=0}^{5} \sin^2\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

(e) Calcule Q_2 directement. La formule trouvée pour $n \geqslant 3$ reste-t-elle vraie pour $n = 2$? Justifie.

5. *Module, argument et géométrie : distances, angles, alignement*

À retenir : $AB = |z_B - z_A|$ (ex. $|3 + 4\mathrm{i}| = 5$), jamais $|z_B| - |z_A|$. Avec $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$: $\arg(Z) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; Z réel : alignés ; imaginaire pur : $(AB) \perp (AC)$; $Z = \pm\mathrm{i}$: rectangle isocèle.

Ex. 33 ★☆☆ Calculer des longueurs avec un module — On donne les points $A(2 - \mathrm{i})$, $B(6 + \mathrm{i})$, $C(-3 + 2\mathrm{i})$, $D(-1 - \mathrm{i})$, $E(1 + \mathrm{i})$, $F(-4 + 13\mathrm{i})$, $G(-2)$ et $H(5\mathrm{i})$.

(a) Calcule la longueur AB.

(b) Calcule la longueur CD.

(c) Calcule EF avec $|z_E - z_F|$, puis dis si le résultat change avec $|z_F - z_E|$. Justifie.

(d) Léa écrit : « $GH = |z_H| - |z_G| = 5 - 2 = 3$ ». Corrige son calcul.

(e) Donne l'affixe du milieu I de $[AB]$, puis calcule la longueur IA.

Ex. 34 ★☆☆ Mesurer un angle orienté avec un quotient — Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans chaque cas, donne la mesure principale de l'angle orienté demandé, à l'aide des affixes.

(a) $A(1 + \mathrm{i})$, $B(4 + \mathrm{i})$, $C(1 + 4\mathrm{i})$: calcule $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(b) $A(2)$, $B(2 + 3\mathrm{i})$, $C(5 + 3\mathrm{i})$: calcule $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(c) Avec les mêmes points $A(2)$, $B(2 + 3\mathrm{i})$, $C(5 + 3\mathrm{i})$: calcule $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

(d) $A(-1)$, $B(1)$, $C(-2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})$: calcule $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

(e) $A(\mathrm{i})$, $B(3 + \mathrm{i})$, $C(-3 + \mathrm{i})$. Zoé écrit : « $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(z_C) - \arg(z_B)$ ». Explique son erreur, puis calcule cet angle.

(f) $A(1 - 2\mathrm{i})$, $B(-1)$: calcule $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

Ex. 35 ★★☆ Nature d'un triangle, puis d'un quadrilatère — On donne les points $A(-2 + \mathrm{i})$, $B(3 + 2\mathrm{i})$ et $C(-1 - 4\mathrm{i})$.

(a) Calcule AB^2, AC^2 et BC^2.

(b) Déduis-en la nature du triangle ABC. Justifie.

(c) Calcule $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique, puis donne la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(d) Détermine l'affixe du centre K du cercle circonscrit au triangle ABC, puis son rayon. Justifie.

Ex. 36 ★★☆ Alignement et orthogonalité : vrai ou faux ? — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul ou un argument.

(a) Les points $A(-2 + 3\mathrm{i})$, $B(-\mathrm{i})$ et $C(1 - 3\mathrm{i})$ sont alignés.

(b) Avec $A(1 - \mathrm{i})$, $B(3)$, $C(2 + \mathrm{i})$ et $D(5\mathrm{i})$: $(AB) \perp (CD)$ et $AB = CD$.

(c) Si $A \neq B$ et $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 0$, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0\ [2\pi]$.

(d) Avec $K(1 + \mathrm{i})$, $L(2 + 3\mathrm{i})$, $M(-1 - 3\mathrm{i})$, Hugo trouve $\arg\left(\frac{z_M - z_K}{z_L - z_K}\right) = \pi$. Il affirme : « K, L, M ne sont pas alignés ».

Ex. 37 ★★☆ **Les erreurs d'Inès sur un triangle** — Inès étudie le triangle ABC avec $A(1+\mathrm{i})$, $B(3-\mathrm{i})$ et $C\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$.

(a) Inès écrit : « $\arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{4}$ ». Explique son erreur, puis calcule AB.

(b) Calcule $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

(c) Inès calcule $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$ pour mesurer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. A-t-elle raison ? Justifie et donne la bonne mesure principale.

(d) Déduis-en la nature du triangle ABC. Justifie.

Ex. 38 ★★★ **Du triangle au carré** — On donne les points $A(-1+2\mathrm{i})$, $B(3+\mathrm{i})$ et $C(4+5\mathrm{i})$.

(a) Calcule $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique. Déduis-en une mesure de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

(b) Déduis-en la nature du triangle ABC et calcule la longueur BA.

(c) Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

(d) Démontre que $ABCD$ est un carré, puis donne l'affixe de son centre Ω.

(e) Détermine l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-4-5\mathrm{i}| = |z+1-2\mathrm{i}|$. Démontre que c'est la droite (BD).

Ex. 39 ★★★ **Les points 1, z et z^2** — On note A le point d'affixe 1. Pour tout nombre complexe z, on note M et N les points d'affixes z et z^2.

(a) Détermine les valeurs de z pour lesquelles les points A, M et N ne sont pas deux à deux distincts.

(b) On suppose désormais $z \notin \{-1\,;0\,;1\}$. Simplifie le quotient $Z = \frac{z_N - z_A}{z_M - z_A}$.

(c) Détermine l'ensemble des points M pour lesquels A, M et N sont alignés.

(d) Détermine et décris l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp (AN)$. Déduis-en les z pour lesquels AMN est rectangle isocèle en A.

(e) Détermine les valeurs de z pour lesquelles le triangle AMN est équilatéral. Donne-les sous forme exponentielle.

Ex. 40 ★★★ **Un cercle, un diamètre et une demi-droite** — On donne $\Omega(1+2\mathrm{i})$, $A(5+5\mathrm{i})$, $B(-3-\mathrm{i})$ et $C(6+2\mathrm{i})$. On note Γ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-1-2\mathrm{i}| = 5$.

(a) Reconnais l'ensemble Γ. Démontre que A, B et C appartiennent à Γ et que Ω est le milieu de $[AB]$.

(b) Calcule $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous forme algébrique. Déduis-en la nature du triangle ABC et une mesure de $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

Ex. 40 (suite)

(c) Détermine l'ensemble Δ des points $M(z)$, avec $z \neq 1+2\mathrm{i}$, tels que $\arg(z-1-2\mathrm{i}) = \pi\ [2\pi]$. Déduis-en l'affixe du point D commun à Δ et Γ.

(d) Démontre que $ACBD$ est un rectangle. Est-ce un carré ? Justifie.

6. *Ensembles de points*

À retenir : Écris chaque module sous la forme $|z - z_A|$: $|z+2-\mathrm{i}| = 3$ est le cercle de centre $-2+\mathrm{i}$ et de rayon 3. $\arg(z - z_A) = \theta\ [2\pi]$: demi-droite ouverte ; $[\pi]$: droite privée de A. Un quotient exclut z_B.

Ex. 41 ★☆☆ **Cercles et disques** — Dans le plan complexe, M est le point d'affixe z. Détermine et décris l'ensemble des points M qui vérifient la condition donnée.

(a) $|z-3+4\mathrm{i}| = 2$ (b) $|z+5-2\mathrm{i}| \leqslant 3$ (c) $|2z-6\mathrm{i}| = 10$

(d) $|\overline{z}-1-2\mathrm{i}| = 4$ (e) $|z+1| = -2$ (f) $|\mathrm{i}z+2| = 6$

Ex. 42 ★☆☆ **Les demi-droites de Sacha** — M est le point d'affixe $z \neq z_A$, où A est le point qui rend l'argument non défini. Chaque description de Sacha contient une erreur : repère-la et corrige-la.

(a) $\arg(z-2) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$: « c'est la droite passant par le point d'affixe 2 et dirigée par $1+\mathrm{i}$ ».

(b) $\arg(z+1-\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: « c'est une demi-droite d'origine le point d'affixe $1-\mathrm{i}$ ».

(c) $\arg(z-3\mathrm{i}) = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$: « c'est la demi-droite ouverte d'origine le point d'affixe $3\mathrm{i}$ dirigée par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ».

(d) $\arg(\overline{z}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$: « c'est la demi-droite ouverte d'origine O qui contient le point d'affixe $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ ».

(e) $\arg(z-1+2\mathrm{i}) = \pi\ [2\pi]$: « ce sont les points tels que $y = -2$ et $x \leqslant 1$ ».

Ex. 43 ★★☆ **Une médiatrice et son équation** — On note E l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1-3\mathrm{i}| = |z+5-\mathrm{i}|$.

(a) Reconnais l'ensemble E en précisant les affixes des points utilisés.

(b) Pose $z = x + \mathrm{i}y$ et détermine une équation cartésienne de E.

(c) Contrôle ton équation avec un point remarquable de E.

(d) Détermine le point de E situé sur l'axe des réels, puis vérifie-le avec les modules.

Ex. 44 ★★☆ **Un quotient réel ou imaginaire pur** — Pour tout point M d'affixe z, on étudie le quotient $Z = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2-3\mathrm{i}}$.

(a) Écris Z sous la forme $\frac{z-z_A}{z-z_B}$, puis indique pour quel point Z n'est pas défini.

(b) Détermine l'ensemble F des points M tels que Z soit réel, puis donne-en une équation cartésienne.

(c) Détermine l'ensemble G des points M tels que Z soit imaginaire pur, et précise ses éléments caractéristiques.

(d) Calcule Z pour $z = 2 + 3\mathrm{i}$. Ce résultat est-il cohérent avec la question précédente ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Vrai ou faux : ensembles de points** — M est le point d'affixe z. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie.

(a) L'ensemble des points M tels que $|-2z + 4\mathrm{i}| = 8$ est le cercle de centre le point d'affixe $-2\mathrm{i}$ et de rayon 8.

(b) L'ensemble des points M tels que $\arg(z+3) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ contient le point d'affixe $-5 + 2\mathrm{i}$.

(c) L'ensemble des points M tels que $\arg(z - \mathrm{i}) = 0\ [\pi]$ est la droite d'équation $y = 1$.

(d) L'ensemble des points M tels que $|z - 1 + 2\mathrm{i}| \leqslant \sqrt{5}$ contient l'origine O du repère.

Ex. 46 ★★★ **Un quotient étudié en coordonnées** — On note A et B les points d'affixes 6 et $4\mathrm{i}$. Pour tout point M d'affixe $z \neq 4\mathrm{i}$, on pose $Z = \frac{z-6}{z-4\mathrm{i}}$ et $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.

(a) Exprime la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

(b) Déduis-en l'ensemble E_1 des points M tels que Z soit réel, puis décris-le géométriquement.

(c) Détermine l'ensemble E_2 des points M tels que Z soit imaginaire pur. Précise les points éventuellement exclus.

(d) Le point C d'affixe $5 + 5\mathrm{i}$ appartient-il à E_2 ? Justifie par le calcul de Z, puis à l'aide de l'équation.

(e) Détermine l'ensemble E_3 des points M tels que $|Z| = 1$, puis donnes-en une équation cartésienne.

Ex. 47 ★★★ **Les cercles déguisés de Maëlle** — Maëlle étudie des ensembles de points M d'affixe z : Γ_1 défini par $|2z - 4 + 6\mathrm{i}| = 6$, Γ_2 défini par $|\overline{z} + 3 + \mathrm{i}| = 2$ et, pour un réel m, F_m défini par $|z - 1 + \mathrm{i}| = m - 4$.

(a) Maëlle affirme : « Γ_1 est le cercle de centre le point d'affixe $4 - 6\mathrm{i}$ et de rayon 6. » A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

(b) Le point P d'affixe 2 appartient-il à Γ_1 ? Justifie de deux façons.

(c) Débarrasse-toi du conjugué pour déterminer la nature et les éléments de Γ_2.

Ex. 47 (suite)

(d) Les ensembles Γ_1 et Γ_2 ont-ils des points communs ? Justifie.

(e) Selon les valeurs du réel m, détermine la nature de F_m.

Ex. 48 ★★★ **Le couloir de vol du drone de Yanis** — Yanis programme un drone. Sur son écran, A et C sont les points d'affixes $-1 + 2\mathrm{i}$ et $5 + 2\mathrm{i}$. M est le point d'affixe $z \neq -1 + 2\mathrm{i}$, avec $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

(a) Détermine l'ensemble D_1 des points M tels que $\arg(z + 1 - 2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, puis décris-le par des conditions sur x et y.

(b) Yanis pense que l'ensemble D_2 défini par $\arg(z + 1 - 2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ est égal à D_1. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Détermine l'ensemble Δ des points M tels que $|z + 1 - 2\mathrm{i}| = |z - 5 - 2\mathrm{i}|$, puis donnes-en une équation cartésienne.

(d) Détermine l'affixe du point B commun à D_1 et à Δ, puis la nature du triangle ABC.

(e) Décris l'ensemble des points de D_1 tels que $|z + 1 - 2\mathrm{i}| \leqslant 2\sqrt{2}$.