Terminale maths expertes / Complexes : forme exponentielle — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Argument et forme trigonométrique*

Ex. 1 ★☆☆ **Module et argument**

(a) $|z_1| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$. Alors $\cos\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

(b) $|z_2| = \sqrt{12+4} = 4$. Alors $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (deuxième quart du cercle), donc $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

(c) $|z_3| = \sqrt{1+3} = 2$. Alors $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (troisième quart du cercle), donc $\arg(z_3) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

(d) z_4 est un réel strictement négatif : $|z_4| = 9$ et $\arg(z_4) = \pi\ [2\pi]$.

(e) z_5 est un imaginaire pur de partie imaginaire négative : $|z_5| = \frac{5}{2}$ et $\arg(z_5) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

(f) On développe : $z_6 = \sqrt{2}\,\mathrm{i} - \mathrm{i}^2\sqrt{6} = \sqrt{6} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$.
Donc $|z_6| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$. Alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, donc $\arg(z_6) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Ex. 2 ★☆☆ **Retour à la forme algébrique**

(a) $6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

(b) $4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

(c) $5(-1 + 0\times\mathrm{i}) = -5$.

(d) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

(e) $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ et un argument est défini à 2π près, donc le nombre vaut $3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

Ex. 3 ★☆☆ **La vraie forme trigonométrique**

(a) Le facteur -2 est négatif, or $r > 0$. Comme $-1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$, le nombre vaut $2\left(\cos\frac{6\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\frac{6\pi}{5} - 2\pi = -\frac{4\pi}{5}$: $2\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$.

(b) Le signe entre les deux termes est « $-$ ». Comme $\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\frac{2\pi}{7}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) = -\sin\frac{2\pi}{7}$, on obtient $5\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$.

(c) C'est bien une forme trigonométrique, mais $\frac{11\pi}{6} \notin\ ]-\pi\,;\pi]$. Comme $\frac{11\pi}{6} - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$, on obtient $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

(d) Le cosinus et le sinus sont inversés. Comme $\sin\frac{\pi}{9} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{7\pi}{18}$ et $\cos\frac{\pi}{9} = \sin\frac{7\pi}{18}$, on obtient $1\times\left(\cos\frac{7\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{18}\right)$.

Ex. 3 (suite)

(e) Le cosinus est précédé d'un « $-$ ». Comme $-\cos\frac{\pi}{10} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\frac{\pi}{10} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)$, on obtient $1\times\left(\cos\frac{9\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{10}\right)$.

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs de Léna**

(a) La tangente seule ne détermine l'angle qu'à π près. On a $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$: le point est dans le quart inférieur gauche.
Donc $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

(b) Le cosinus seul laisse deux angles possibles, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. Ici $|z| = \sqrt{16+48} = 8$, $\cos\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.
Donc $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

(c) Un argument n'est défini que pour $z \neq 0$: l'image de 0 est O, et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OO})$ n'a pas de sens puisque le vecteur est nul.
Donc 0 n'a pas d'argument.

(d) $-\pi \notin\ ]-\pi\,;\pi]$. Les mesures $-\pi$ et π sont égales à 2π près, mais la mesure principale est π.
Donc $\arg(-6) = \pi\ [2\pi]$, de mesure principale π.

Ex. 5 ★★☆ **Un module qui dépend d'un paramètre**

(a) $z_a = a(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})$ est nul si et seulement si $a = 0$. Or 0 n'a pas d'argument.
Donc z_a n'a pas d'argument pour $a = 0$, et seulement pour cette valeur.

(b) $|z_a| = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a|$, car $\sqrt{a^2} = |a|$ (et non a).

(c) Si $a > 0$, alors $|z_a| = 2a$ et $z_a = 2a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$. Comme $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $z_a = 2a\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$, avec $2a > 0$.

(d) Si $a < 0$, alors $|z_a| = -2a > 0$ et $z_a = -2a\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$. Le cosinus et le sinus valent $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_a = -2a\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

(e) $2|a| = 6 \iff |a| = 3 \iff a = 3$ ou $a = -3$. D'après les questions précédentes, $\arg(z_3) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg(z_{-3}) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Les deux nombres ont le même module, mais pas le même argument.

Ex. 6 ★★★ **Un argument qui dépend d'un angle**

(a) $z_{\frac{\pi}{2}} = 1 + 0 + \mathrm{i} \times 1 = 1 + \mathrm{i}$. On a $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Si φ est un argument, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Conclusion : $|z_{\frac{\pi}{2}}| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

(b) La formule de duplication avec $a = \frac{\theta}{2}$ donne $1 + \cos\theta = 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.
Donc $z_\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, c'est-à-dire $z_\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

(c) Si $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, alors $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\frac{\theta}{2} > 0$. Le facteur $r = 2\cos\frac{\theta}{2}$ est donc strictement positif, et l'écriture de la question 2 est une forme trigonométrique. On en déduit $|z_\theta| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z_\theta) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$. Comme $\frac{\theta}{2} \in]-\pi\,;\pi]$, c'est la mesure principale.

(d) $z_\pi = 1 + \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = 1 - 1 + 0 = 0$. Le nombre 0 n'a pas d'argument : son image est O et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini. On ne peut donc pas parler d'un argument de z_π. C'est cohérent avec $2\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

(e) Non. $2\cos\frac{2\pi}{3} = -1 < 0$, or un module est positif : l'écriture $-1 \times \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ n'est pas une forme trigonométrique. On calcule directement : $z_{\frac{4\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Son module vaut $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. Si φ est un argument, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Conclusion : $|z_{\frac{4\pi}{3}}| = 1$ et $\arg(z_{\frac{4\pi}{3}}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Ex. 7 ★★★ **Imposer un argument**

(a) $\arg(z_m) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ si et seulement si z_m est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive, c'est-à-dire $m - 2 = 0$ et $m + 2 > 0$. On obtient $m = 2$, et alors $m + 2 = 4 > 0$. Conclusion : $m = 2$ et $z_2 = 4\mathrm{i}$.

(b) z_m est réel si et seulement si $m + 2 = 0$, soit $m = -2$. Alors $z_{-2} = -4 < 0$. Aucun z_m n'est donc un réel strictement positif : aucun m ne donne $\arg(z_m) = 0\ [2\pi]$. En revanche, $z_{-2} = -4$ est un réel strictement négatif, donc $\arg(z_{-2}) = \pi\ [2\pi]$: $m = -2$.

(c) Avec $r = |z_m|$, on veut $\frac{m-2}{r} = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{m+2}{r} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Il faut donc $m - 2 = -(m+2)$ et $m + 2 > 0$. La première condition donne $2m = 0$, soit $m = 0$, et alors $m + 2 = 2 > 0$. Vérification : $z_0 = -2 + 2\mathrm{i}$, $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Conclusion : $m = 0$.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Faux. $\tan\theta = \frac{m+2}{m-2} = -1$ donne seulement $m + 2 = -(m-2)$, soit $m = 0$. Or $z_0 = -2 + 2\mathrm{i}$ a pour argument $\frac{3\pi}{4}$ (question précédente), pas $-\frac{\pi}{4}$. En effet, $\arg(z_m) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ exige $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, donc $m - 2 > 0$, ce qui est faux pour $m = 0$. La tangente ne distingue pas $\frac{3\pi}{4}$ de $-\frac{\pi}{4}$ (égaux à π près) : aucun m ne convient.

(e) $|z_m|^2 = (m-2)^2 + (m+2)^2 = m^2 - 4m + 4 + m^2 + 4m + 4 = 2m^2 + 8$. Comme $m^2 \geqslant 0$, on a $|z_m|^2 \geqslant 8$, donc $|z_m| \geqslant 2\sqrt{2} > 0$: $z_m \neq 0$ pour tout m, et z_m a toujours un argument. De plus $|z_m| \geqslant 2\sqrt{2} > 1$, donc $|z_m| \neq 1$: aucun z_m n'appartient à $\mathbb{U}$.

Ex. 8 ★★★ **Un angle de π/8**

(a) $|z|^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$. Comme un module est positif, $|z| = 2$.

(b) Avec $a = \frac{\pi}{8}$: $\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$, donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{8} \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. De même, $\cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$ donne $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, on a $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(c) On factorise par $r = 2$: $z = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. D'après la question 2, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \sin\frac{\pi}{8}$. Les deux conditions sont vérifiées par $\theta = \frac{\pi}{8}$.
Donc $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)$: $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$.

(d) $w = -z$, donc $|w| = 2$. On cherche θ tel que $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{8}$. Comme $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$, l'angle $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ convient. Or $\frac{9\pi}{8} \notin]-\pi\,;\pi]$: on retranche 2π et on obtient $-\frac{7\pi}{8}$. C'est cohérent : l'image de w a des coordonnées négatives.
Conclusion : $\arg(w) = -\frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$ (mesure principale).

(e) Non. Dans une forme trigonométrique $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, le signe entre les deux termes est « + ». L'écriture d'Inès n'en est donc pas une. Par parité, $\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ et $-\sin\frac{\pi}{8} = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.
Donc $\overline{z} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$: $|\overline{z}| = 2$ et $\arg(\overline{z}) = -\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$, pas $\frac{\pi}{8}$.

2. *Forme exponentielle : produits, quotients, puissances*

Ex. 9 ★☆☆ **Calculer en forme exponentielle**

(a) $2\times 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{18}+\frac{5\pi}{18}\right)}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{18}}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(b) On divise les modules et on soustrait les arguments : $\frac{8}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, car $\frac{7\pi}{6}-2\pi=-\frac{5\pi}{6}$.

(c) Le conjugué change l'argument en son opposé : $5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$.

(d) -4 n'est pas un module. Comme $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, on a $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{9}+\pi\right)}=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{9}}=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{8\pi}{9}}$.

(e) $2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{8}}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}=16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, soit $-16\mathrm{i}$.

(f) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$.

Ex. 10 ★☆☆ **De la forme algébrique au produit**

(a) $|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $z_1=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

(b) $|z_2|=\sqrt{9+27}=6$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_2=6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(c) $6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{9\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}\right)}=6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$.

(d) $\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$.

(e) $6^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}=7776\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, car $-\frac{5\pi}{3}+2\pi=\frac{\pi}{3}$.

(f) $\overline{z_1}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, donc $\overline{z_1}z_2=6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}=6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$.

Ex. 11 ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) Faux : l'exponentielle ne transforme pas une somme. En forme algébrique, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i})$. Son module vaut $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\neq 1$, donc la somme n'est pas égale à i.

(b) Faux : un module est positif. Comme $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, on a $-3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{7}}$. Le module vaut 3 et un argument est $\frac{6\pi}{7}$.

(c) Faux : Lina a additionné les arguments, alors qu'il faut les soustraire dans un quotient. On obtient $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{10}-\frac{4\pi}{10}\right)}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{10}}$.

(d) Vrai : d'après la formule de Moivre, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}\right)^4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{8}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}}$. Or $\frac{5\pi}{2}-2\pi=\frac{\pi}{2}$, donc ce nombre vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}$. Lina a raison.

Ex. 12 ★★☆ **Valeurs exactes par un quotient**

(a) $|a|=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$, avec $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $a=2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. De même, $|b|=2\sqrt{2}$ et $b=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

(b) $q=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

(c) $q=\frac{(\sqrt{3}+3\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{8}=\frac{2\sqrt{3}+6+\mathrm{i}(6-2\sqrt{3})}{8}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+\mathrm{i}\,\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

Ex. 12 (suite)

(d) Les deux formes de q donnent les mêmes parties réelles : $\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$. Donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. De même, avec les parties imaginaires, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Ex. 13 ★★☆ **Quand la puissance devient réelle**

(a) $|z|=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $z=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(b) D'après la formule de Moivre, $z^n=(2\sqrt{2})^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$.

(c) z^n est réel si et seulement si $-\frac{n\pi}{3}=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $n=-3k$.
Donc z^n est réel si et seulement si n est un multiple de 3.

(d) Il faudrait $-\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, soit $n=-\frac{3}{2}-3k$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Ce nombre n'est jamais entier, car $3k$ est entier et $\frac{3}{2}$ ne l'est pas.
Donc aucune puissance z^n n'est imaginaire pure.

(e) Il faut $-\frac{n\pi}{3}=\pi\ [2\pi]$. Alors z^n est réel, donc n est un multiple de 3 d'après la question 3. Pour $n=3$, $-\frac{3\pi}{3}=-\pi=\pi\ [2\pi]$: $n=3$ convient, et c'est le plus petit multiple de 3 non nul. On a $z^3=(2\sqrt{2})^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}=16\sqrt{2}\times(-1)=-16\sqrt{2}$.

Ex. 14 ★★★ **Une puissance égale à un conjugué**

(a) $-4\mathrm{i}$ a pour module 4, et $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, donc $-4\mathrm{i}=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, avec $4>0$. D'après la formule de Moivre, $z^2=r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$. Comme $\overline{z}=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, on a $-4\mathrm{i}\,\overline{z}=4r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

(b) Deux complexes non nuls sous forme exponentielle sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et des arguments égaux modulo 2π.
Donc $r^2=4r$ et $2\theta=-\frac{\pi}{2}-\theta\ [2\pi]$. Comme $r>0$, on obtient $r=4$ et $3\theta=-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

(c) $3\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ donne $\theta=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Dans $]-\pi\,;\pi]$, seuls $k=0$, $k=1$ et $k=-1$ conviennent : $\theta=-\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ ou $\theta=-\frac{5\pi}{6}$. Les solutions sont $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$, $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=4\mathrm{i}$ et $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}=-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$.

(d) Non. -4 n'est pas un module : comme $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, on a $-4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$. Le module vaut bien 4, mais $3\times\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et $\frac{\pi}{2}\neq-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Vérification : $(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i})^2=8-8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, alors que $-4\mathrm{i}\times\overline{(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i})}=-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Ce nombre n'est donc pas solution.

Ex. 14 **(suite)**

(e) On multiplie les modules et on additionne les arguments : $4^3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)} = 64\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Le produit des solutions vaut donc $-64\mathrm{i}$.

Ex. 15 ★★★ **Somme de deux exponentielles : l'angle moitié**

(a) On factorise par l'angle moitié : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha-\beta}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$. On pose $x=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = (\cos x+\mathrm{i}\sin x)+(\cos x-\mathrm{i}\sin x) = 2\cos x$, d'où l'égalité annoncée.

(b) On prend $\alpha=\frac{3\pi}{5}$ et $\beta=\frac{\pi}{5}$: $S = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$. On a $\cos\frac{\pi}{5}>0$, donc c'est bien la forme exponentielle : $|S| = 2\cos\frac{\pi}{5}$ et $\arg(S)=\frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$. Comme $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{3}$ et que cos est décroissante sur $[0\,;\pi]$, on a $\cos\frac{\pi}{5}>\frac{1}{2}$, donc $|S|>1$. Or $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\right|=1$.
Donc $S\neq\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$.

(c) On prend $\alpha=\frac{9\pi}{10}$ et $\beta=-\frac{7\pi}{10}$: $\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{10}$. Donc $T = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{10}}$. Ce n'est pas une forme exponentielle, car $2\cos\frac{4\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5}<0$. Comme $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, on a $T = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{10}+\pi\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{10}}$. En mesure principale, $\frac{11\pi}{10}-2\pi=-\frac{9\pi}{10}$, donc $T = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{9\pi}{10}}$.

(d) On multiplie les modules et on additionne les arguments : $S\times T = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{9\pi}{10}\right)} = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Comme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=-\mathrm{i}$, on obtient $S\times T = -4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{i}$, qui est un imaginaire pur.

(e) On divise les modules et on soustrait les arguments : $\frac{S}{T} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{5}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{9\pi}{10}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{10}}$. Or $\frac{13\pi}{10}-2\pi=-\frac{7\pi}{10}$.
Donc $\frac{S}{T}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{10}}$, de module 1.

Ex. 16 ★★★ **Puissances d'un produit avec conjugué**

(a) $|u|=\sqrt{3+1}=2$, avec $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$, donc $u=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$. $|v|=\sqrt{2}$, avec $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $v=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

(b) Le conjugué change l'argument en son opposé : $\overline{v}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. Pour le produit, on multiplie les modules et on additionne les arguments : $P = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$. Or $\frac{19\pi}{12}-2\pi=-\frac{5\pi}{12}$, donc $P=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$.

Ex. 16 **(suite)**

(c) On a $P^n=(2\sqrt{2})^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5n\pi}{12}}$, qui n'est pas nul. P^n est un imaginaire pur si et seulement si $-\frac{5n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $-5n=6+12k$. Cela revient à $5n\equiv 6\ [12]$. Comme $5\times 5=25\equiv 1\ [12]$, en multipliant par 5 on obtient $n\equiv 30\equiv 6\ [12]$. Réciproquement, si $n=6+12m$, alors $5n=30+60m\equiv 6\ [12]$.
Conclusion : P^n est un imaginaire pur si et seulement si $n=6+12m$, avec $m\in\mathbb{N}$. Par exemple, $P^6=512\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}}=-512\mathrm{i}$.

(d) P^n est un réel strictement positif si et seulement si $-\frac{5n\pi}{12}=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, c'est-à-dire si 24 divise $5n$. Comme 5 et 24 sont premiers entre eux, le lemme de Gauss donne : 24 divise n. Le plus petit entier $n\geqslant 1$ qui convient est donc $n=24$. Remarque : pour $n=12$, l'argument vaut -5π, égal à π modulo 2π, donc $P^{12}=-2^{18}$ est négatif. Enfin, $P^{24}=(2\sqrt{2})^{24}\,\mathrm{e}^{-10\mathrm{i}\pi} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{24}=2^{36}$.

3. *Formules de Moivre et d'Euler, formules d'addition*

Ex. 17 ★★★ **Puissances sans développer**

(a) $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $(1-\mathrm{i})^6=(\sqrt{2})^6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{6\pi}{4}}=8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$. Or $-\frac{3\pi}{2}+2\pi=\frac{\pi}{2}$, donc $(1-\mathrm{i})^6=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$.

(b) $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5=32\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ (mesure principale). Sous forme algébrique : $32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-16\sqrt{3}+16\mathrm{i}$.

(c) $-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, donc $(-1-\mathrm{i})^4=4\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi}$. Or $-3\pi+4\pi=\pi$, donc $(-1-\mathrm{i})^4=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-4$.

(d) Par Moivre, $\left(\cos\frac{\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{10}\right)^{15}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{10}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$, et pas $\cos^{15}\frac{\pi}{10}+\mathrm{i}\sin^{15}\frac{\pi}{10}$. Or $\frac{3\pi}{2}-2\pi=-\frac{\pi}{2}$, donc le nombre vaut $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=-\mathrm{i}$.

(e) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, donc $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{-4}=2^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, car $-\frac{4\pi}{3}+2\pi=\frac{2\pi}{3}$. Sous forme algébrique : $\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}\mathrm{i}$.

(f) $\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc la puissance vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2026\pi}{4}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1013\pi}{2}}$. Or $\frac{1013\pi}{2}=253\times 2\pi+\frac{\pi}{2}$, donc le nombre vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}$.

Ex. 18 ★★★ **Linéariser avec Euler**

(a) $\sin^2 x=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2}{(2\mathrm{i})^2}=\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{-4}=\frac{2\cos(2x)-2}{-4}=\frac{1-\cos(2x)}{2}$.
Contrôle en $x=\frac{\pi}{2}$: $\frac{1-\cos\pi}{2}=\frac{1+1}{2}=1=\sin^2\frac{\pi}{2}$.

(b) $\cos^3(2x)=\frac{(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^3}{8}=\frac{\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}}{8}=\frac{2\cos(6x)+6\cos(2x)}{8}=\frac{\cos(6x)+3\cos(2x)}{4}$. Contrôle en $x=0$: $\frac{1+3}{4}=1$.

Ex. 18 **(suite)**

(c) $(2\mathrm{i})^4 = 16$, donc $\sin^4 x = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4}{16} = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}}{16} = \frac{2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6}{16} = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$. Contrôle en $x = \frac{\pi}{4}$: $\frac{\cos\pi - 4\cos\frac{\pi}{2} + 3}{8} = \frac{-1 - 0 + 3}{8} = \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

(d) $\cos^4 x = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4}{16} = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}}{16} = \frac{2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6}{16} = \frac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}$. Contrôle en $x = 0$: $\frac{1 + 4 + 3}{8} = 1$.

(e) $\cos x \times \sin^2 x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{-4} = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) = -\frac{2\cos(3x) - 2\cos x}{8} = \frac{\cos x - \cos(3x)}{4}$. Contrôle en $x = \frac{\pi}{3}$: $\frac{\frac{1}{2} - \cos\pi}{4} = \frac{3}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{3} \times \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Ex. 19 ★★☆ **Formules d'addition démontrées par les exponentielles**

(a) D'une part, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)} = \cos(a-b) + \mathrm{i}\sin(a-b)$. D'autre part, $(\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b - \mathrm{i}\sin b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b + \mathrm{i}(\sin a\cos b - \cos a\sin b)$. Deux complexes égaux ont mêmes parties réelle et imaginaire : $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$.

(b) D'une part, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a} = \cos(2a) + \mathrm{i}\sin(2a)$. D'autre part, $(\cos a + \mathrm{i}\sin a)^2 = \cos^2 a - \sin^2 a + 2\mathrm{i}\sin a\cos a$. Par identification : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$.

(c) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

(d) Avec $a = \frac{\pi}{12}$: $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 2 \times \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} = 2 \times \frac{6-2}{16} = \frac{1}{2}$. On retrouve bien $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$: les deux valeurs sont cohérentes.

Ex. 20 ★★☆ **L'erreur d'Inès sur $\cos(3\theta)$**

(a) $\cos\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \cos\pi = -1$ alors que $\cos^3\frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. L'égalité est fausse : Inès n'a pas raison. Moivre donne $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)$: la puissance passe sur l'angle, pas sur le cosinus et le sinus.

(b) On note $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$. $(c + \mathrm{i}s)^3 = c^3 + 3c^2(\mathrm{i}s) + 3c(\mathrm{i}s)^2 + (\mathrm{i}s)^3 = c^3 + 3\mathrm{i}c^2 s - 3cs^2 - \mathrm{i}s^3$. Partie réelle : $c^3 - 3cs^2$.

(c) Par Moivre, ce nombre vaut aussi $\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)$. Deux complexes égaux ont la même partie réelle : $\cos(3\theta) = c^3 - 3cs^2$. Avec $s^2 = 1 - c^2$: $\cos(3\theta) = c^3 - 3c(1 - c^2)$, donc $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

(d) $\cos(3\theta) = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} - 1 = -\frac{23}{27}$.

Ex. 21 ★★☆ **Factoriser par l'angle moitié**

(a) $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)$. Par la formule d'Euler, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$. Donc $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

(b) Avec $\theta = \frac{2\pi}{5}$: $z_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$. Comme $\cos\frac{\pi}{5} > 0$, c'est une forme exponentielle : $|z_1| = 2\cos\frac{\pi}{5}$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{5}\ [2\pi]$.

(c) Avec $\theta = \frac{4\pi}{3}$: $z_2 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Le facteur -1 est négatif : ce n'est pas une forme exponentielle. $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, donc $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$: $|z_2| = 1$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$. Contrôle : $z_2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(d) Par Moivre, $z_1^5 = 2^5\cos^5\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -32\cos^5\frac{\pi}{5}$. Comme $\cos\frac{\pi}{5} > 0$, z_1^5 est un réel strictement négatif.

Ex. 22 ★★★ **Du binôme à la valeur exacte de $\cos(\pi/8)$**

(a) D'après la formule du binôme, $(c + \mathrm{i}s)^4 = c^4 + 4c^3(\mathrm{i}s) + 6c^2(\mathrm{i}s)^2 + 4c(\mathrm{i}s)^3 + (\mathrm{i}s)^4 = c^4 + 4\mathrm{i}c^3 s - 6c^2 s^2 - 4\mathrm{i}cs^3 + s^4$. D'après la formule de Moivre, $(c + \mathrm{i}s)^4 = \cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)$. Les parties réelles sont égales : $\cos(4\theta) = c^4 - 6c^2 s^2 + s^4$. Avec $s^2 = 1 - c^2$: $\cos(4\theta) = c^4 - 6c^2(1 - c^2) + (1 - c^2)^2 = c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4$. Donc $\cos(4\theta) = 8c^4 - 8c^2 + 1$.

(b) On identifie les parties imaginaires dans le développement précédent : $\sin(4\theta) = 4c^3 s - 4cs^3$, donc $\sin(4\theta) = 4cs(c^2 - s^2)$.

(c) Pour $\theta = \frac{\pi}{8}$, on a $4\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $X = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ vérifie $8X^2 - 8X + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 64 - 32 = 32$, donc $X = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$. Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$ et que cos est décroissante sur $[0\,;\,\pi]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, donc $X > \frac{1}{2}$. Or $\frac{2-\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$, donc $X = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Conclusion : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

(d) Pour $\theta = \frac{3\pi}{8}$, on a $\cos(4\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ est aussi une solution de $8X^2 - 8X + 1 = 0$. Comme $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) < \frac{1}{2}$. Il s'agit donc de l'autre solution : $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme ce cosinus est positif, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$: l'affirmation est vraie.

Ex. 23 ★★★ **Linéariser $\sin^3 x$ pour intégrer**

(a) Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, donc $\frac{i-(-i)}{2} = i$. Or $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq i$: Noé a tort. En soustrayant $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ à $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, on obtient $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$.
Donc $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$: Noé a oublié le i au dénominateur.

(b) On a $(2i)^3 = 8i^3 = -8i$, donc $\sin^3 x = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{-8i} = \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}$. On regroupe les termes conjugués : $\sin^3 x = \frac{2i\sin(3x)-6i\sin x}{-8i}$.
Donc $\sin^3 x = \frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$. Contrôle pour $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{3\times1-\sin\frac{3\pi}{2}}{4} = \frac{3+1}{4} = 1 = \sin^3\frac{\pi}{2}$.

(c) Une primitive de $x \mapsto \frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ est $F(x) = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x)$. On a $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 0 = 0$ et $F(0) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = -\frac{2}{3}$.
Donc $I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{2}{3}$.

(d) D'après la question 2, $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$, donc $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Vérification pour $x = \frac{\pi}{6}$: $3\times\frac{1}{2} - 4\times\frac{1}{8} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. La formule est bien vérifiée.

Ex. 24 ★★★ **Somme de deux exponentielles et puissances**

(a) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, avec $\frac{11\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
Donc $u = e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$. D'après Euler, $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.
Donc $u = \sqrt{3}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Comme $\sqrt{3} > 0$, c'est une forme exponentielle : $|u| = \sqrt{3}$ et $\arg(u) = \frac{3\pi}{4}$, mesure principale car $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi\,;\,\pi]$.

(b) D'après la formule de Moivre, $u^6 = (\sqrt{3})^6 e^{i\frac{18\pi}{4}} = 27e^{i\frac{9\pi}{2}}$. Or $\frac{9\pi}{2} = 2\times2\pi + \frac{\pi}{2}$, donc $u^6 = 27e^{i\frac{\pi}{2}}$, de mesure principale $\frac{\pi}{2}$. Sous forme algébrique : $u^6 = 27i$.

(c) $u^n = (\sqrt{3})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}$ avec $(\sqrt{3})^n > 0$. Ce nombre est un réel strictement positif si et seulement si $\frac{3n\pi}{4} = 2k\pi$ avec k entier, soit $3n = 8k$. Alors 8 divise $3n$, et 8 est premier avec 3, donc 8 divise n (théorème de Gauss).
Réciproquement, si $n = 8m$, alors $\frac{3n\pi}{4} = 6m\pi \equiv 0\ [2\pi]$.
Les entiers cherchés sont les multiples non nuls de 8. Le plus petit est $n = 8$, et $u^8 = (\sqrt{3})^8 e^{6i\pi} = 81$.

(d) D'une part, $u = \cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12} + i\left(\sin\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}\right)$.
D'autre part, $u = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$. Par unicité de la forme algébrique, on identifie les parties réelles : $\cos\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. *Racines n-ièmes de l'unité, équations $z^n = a$*

Ex. 25 ★★★ **Racines de l'unité : écrire et calculer**

(a) Les éléments sont $e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ pour $k \in \{0;\dots;5\}$. Les arguments 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ se ramènent dans $]-\pi;\pi]$, d'où : 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\pi}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(b) Sous forme algébrique : 1 ; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; -1 ; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(c) $\omega^5 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Or $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$, donc la mesure principale est $-\frac{3\pi}{4}$.

(d) $\omega = e^{i\frac{2\pi}{8}}$, donc $\omega^k = e^{i\frac{2k\pi}{8}}$: les nombres $1, \omega, \dots, \omega^7$ sont exactement les huit éléments de $\mathbb{U}_8$. Leur somme est nulle car $8 \geqslant 2$: $1 + \omega + \cdots + \omega^7 = 0$.

(e) $\left(e^{i\frac{14\pi}{5}}\right)^5 = e^{14i\pi} = 1$, donc il appartient à $\mathbb{U}_5$. Comme $\frac{14\pi}{5} - 2\pi = \frac{4\pi}{5} \in]-\pi;\pi]$, la mesure principale est $\frac{4\pi}{5}$.

(f) $j^3 = e^{2i\pi} = 1$, donc $j^{10} = (j^3)^3 \times j = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(g) $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, car $z^1 = 1$ seulement pour $z = 1$. La somme vaut donc 1 et non 0 : la somme nulle n'est vraie que pour $n \geqslant 2$.

Ex. 26 ★★★ **Résoudre $z^n = a$**

(a) $-27i = 27\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Avec $z = re^{i\theta}$: $r^3 = 27$ et $3\theta = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $r = 3$ et $\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \{0;1;2\}$. Les solutions sont $3e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $3e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ (car $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$).

(b) $-625 = 625\,e^{i\pi}$. Avec $z = re^{i\theta}$: $r^4 = 625$ et $4\theta = \pi\ [2\pi]$, donc $r = 5$ et $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \{0;1;2;3\}$. On ramène $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ dans $]-\pi;\pi]$: les solutions sont $5e^{i\frac{\pi}{4}}$, $5e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $5e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ et $5e^{-i\frac{\pi}{4}}$. La partie réelle $5\cos\theta$ est strictement positive si et seulement si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Les solutions cherchées sont donc $\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$ et $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$.

(c) L'équation a exactement 5 solutions. Leur module r vérifie $r^5 = 1024$ avec $r > 0$, donc $r = 1024^{1/5} = 4$ (car $4^5 = 1024$), et non 1024.

(d) $|1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, donc $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors $r^2 = 2$ et $2\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \{0;1\}$. Solutions : $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Ex. 27 ★★★ **Vrai ou faux sur les racines**

(a) Faux. Pour $k = 5$: $e^{2i\pi} = 1$, c'est la même valeur que pour $k = 0$. L'équation $z^5 = 1$ a exactement 5 solutions distinctes, obtenues pour k de 0 à 4.

Ex. 27 (suite)

(b) Vrai. $|j|=1$, donc $j\,\overline{j}=|j|^2=1$, d'où $\overline{j}=\frac{1}{j}$. De plus, $j^3=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}=1$, donc $j\times j^2=1$ et $j^2=\frac{1}{j}$. Ainsi $\overline{j}=j^2=\frac{1}{j}$.

(c) Faux. $216=216\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$ donne $r=6$ (car $6^3=216$) et $\theta=\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\{0;1;2\}$. On trouve trois solutions : 6, $6j$ et $6j^2=6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Par exemple, $(6j)^3=216\,j^3=216$.

(d) Vrai. $2025=3\times 675$ et $j^3=1$, donc $j^{2025}=(j^3)^{675}=1$. Alors $j^{2026}+j^{2027}+j^{2028}=j^{2025}(j+j^2+j^3)=j+j^2+1=0$, car $1+j+j^2$ est la somme des éléments de $\mathbb{U}_3$, nulle.

(e) Faux. Comme $1+j+j^2=0$ (somme des éléments de $\mathbb{U}_3$), on a $1+j=-j^2$.
Donc $(1+j)^3=-j^6=-(j^3)^2=-1\neq 1$.

Ex. 28 ★★☆ **La résolution de Noé**

(a) Non. r est le module de z, donc $r>0$. De $r^4=16$ on déduit $r=2$ seulement. La valeur $r=-2$ est à rejeter.

(b) $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, donc $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$. Puis $\left(-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^4=16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=16\mathrm{i}$: c'est bien une solution, mais trouvée par une justification fausse.

(c) Les arguments sont égaux seulement à 2π près : $4\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
Donc $\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, et pas seulement $\frac{\pi}{8}$.

(d) Avec $r=2$ et $\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, pour $k\in\{0;1;2;3\}$, on obtient $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$, $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$ et $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$ (on ramène $\frac{9\pi}{8}$ et $\frac{13\pi}{8}$ dans $]-\pi;\pi]$). L'équation a 4 solutions, Noé en a trouvé 2 : il en a oublié 2, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$ et $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$.

Ex. 29 ★★☆ **Un polygone caché dans une équation**

(a) $-729=729\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. Avec $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$: $r^6=729$ et $6\theta=\pi\ [2\pi]$, donc $r=3$ et $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\{0;\ldots;5\}$. Les solutions sont $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

(b) Les six solutions ont pour module 3 : leurs images sont sur le cercle de centre O et de rayon 3. Leurs arguments $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ sont espacés de $\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{6}$. Les images sont donc les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans ce cercle.

(c) $z_0=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ et $z_1=3\mathrm{i}$.
Donc $A_0A_1=|z_1-z_0|=\left|-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}=3$.
L'hexagone est régulier, ses six côtés mesurent 3 : le périmètre vaut 18.

(d) Avec $\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}}$, chaque solution s'écrit $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\omega^k$, $k\in\{0;\ldots;5\}$. Leur somme vaut $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}(1+\omega+\cdots+\omega^5)$. La parenthèse est la somme des éléments de $\mathbb{U}_6$, nulle car $6\geqslant 2$. La somme des solutions est donc nulle.

Ex. 30 ★★★ **Le pentagone régulier et** $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

(a) 0 n'est pas solution. On pose $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r>0$. Alors $z^5=1\iff r^5=1$ et $5\theta=0\ [2\pi]$, soit $r=1$ et $\theta=\frac{2k\pi}{5}$ avec $k\in\{0;1;2;3;4\}$. Avec $k=5$, on retrouverait la solution 1. On ramène $\frac{6\pi}{5}$ à $\frac{6\pi}{5}-2\pi=-\frac{4\pi}{5}$, et $\frac{8\pi}{5}$ à $-\frac{2\pi}{5}$. Les cinq solutions sont : $1=\omega^0$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}=\omega$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}=\omega^2$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}=\omega^3$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}=\omega^4$.

(b) $\frac{2\pi}{5}\in\,]0;2\pi[$, donc $\omega\neq 1$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison ω : $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=\frac{1-\omega^5}{1-\omega}=0$, car $\omega^5=1$.

(c) D'après la première question, $\omega^4=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}=\overline{\omega}$, donc $u=\omega+\overline{\omega}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. De même, $\omega^3=\overline{\omega^2}$, donc $v=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. D'après la question précédente, $u+v=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=-1$. Ensuite, $uv=\omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7=\omega^3+\omega^4+\omega+\omega^2=-1$, car $\omega^5=1$.

(d) u et v ont pour somme -1 et pour produit -1. Ce sont donc les solutions de $X^2+X-1=0$. On a $\Delta=1+4=5$, et les solutions sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{2\pi}{5}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc $u>0$. On en déduit $u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, d'où $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(e) v est l'autre solution : $v=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, donc $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Ensuite, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Ex. 31 ★★★ **Une solution trouvée de tête, puis toutes les autres**

(a) $|-2+2\mathrm{i}|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$, et $-2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. Par ailleurs, $z_0=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z_0^3=(\sqrt{2})^3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=-2+2\mathrm{i}$. Inès a raison.

(b) $z_0\neq 0$ et $-2+2\mathrm{i}=z_0^3$.
Donc $z^3=z_0^3\iff\frac{z^3}{z_0^3}=1\iff\left(\frac{z}{z_0}\right)^3=1$. Ainsi, $\frac{z}{z_0}\in\mathbb{U}_3=\{1;j;j^2\}$. L'équation (E) a donc exactement trois solutions : z_0, z_0j et z_0j^2. La seule solution z_0 ne suffisait pas.

(c) $z_0=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=1+\mathrm{i}$. Ensuite, $z_0j=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$. Enfin, $z_0j^2=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ (on retire 2π). Sous forme algébrique : $z_0j=(1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$ et $z_0j^2=(1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Le module commun $\sqrt{2}$ convient : $(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}=|-2+2\mathrm{i}|$.

Ex. 31 **(suite)**

(d) $AB = |z_0 j - z_0| = |z_0| \times |j-1|$. Or $j - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, de module $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.
Donc $AB = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. De même, $BC = |z_0| \times |j| \times |j-1| = \sqrt{6}$. Enfin, $CA = |z_0| \times |1 - j^2|$, avec $1 - j^2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ de module $\sqrt{3}$, donc $CA = \sqrt{6}$. Le triangle ABC est équilatéral, de côté $\sqrt{6}$.

(e) $z_0 + z_0 j + z_0 j^2 = z_0(1 + j + j^2) = 0$, car $1 + j + j^2 = 0$. Le centre de gravité du triangle ABC a pour affixe $\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$: c'est l'origine O. C'est aussi le centre du cercle circonscrit à ABC, car $OA = OB = OC = \sqrt{2}$.

Ex. 32 ★★★ **Sommes de cosinus sur un polygone régulier**

(a) $\omega^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$. Comme $n \geqslant 2$, on a $\frac{2\pi}{n} \in]0;\pi]$, donc $\omega \neq 1$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison ω : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$, car $\omega^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$. La partie réelle de cette somme est C_n, et sa partie imaginaire est la somme des sinus.
Donc $C_n = 0$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

(b) $\omega^{2k} = (\omega^2)^k$: c'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{n}}$. Pour $n \geqslant 3$, $\frac{4\pi}{n} \in]0;2\pi[$, donc $\omega^2 \neq 1$. La somme vaut alors $\frac{1-\omega^{2n}}{1-\omega^2} = 0$, car $\omega^{2n} = (\omega^n)^2 = 1$. Pour $n = 2$: $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $\omega^2 = 1$. La somme vaut $1 + 1 = 2$: la formule de la somme géométrique ne s'applique pas.

(c) Par la formule d'Euler, $\cos^2 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4} = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.
Donc $Q_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$. Or $\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$ est la partie réelle de ω^{2k}. Pour $n \geqslant 3$, cette somme est donc nulle d'après la question précédente. Conclusion : $Q_n = \frac{n}{2}$.

(d) Avec $n = 8$, on a $\frac{2k\pi}{8} = \frac{k\pi}{4}$, donc la première somme vaut $Q_8 = \frac{8}{2} = 4$. Avec $n = 6$, on a $\frac{k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{6}$ et $\sin^2 = 1 - \cos^2$.
Donc $\sum_{k=0}^{5} \sin^2\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 6 - Q_6 = 6 - 3 = 3$.

(e) $Q_2 = \cos^2(0) + \cos^2(\pi) = 1 + 1 = 2$, alors que $\frac{n}{2} = 1$. La formule est fausse pour $n = 2$. En effet, pour $n = 2$, $\sum_{k=0}^{1} \omega^{2k} = 2 \neq 0$, donc $Q_2 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = 2$.

5. *Module, argument et géométrie : distances, angles, alignement*

Ex. 33 ★☆☆ **Calculer des longueurs avec un module**

(a) $z_B - z_A = (6 + \mathrm{i}) - (2 - \mathrm{i}) = 4 + 2\mathrm{i}$, donc $AB = |4 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

(b) $z_D - z_C = (-1 - \mathrm{i}) - (-3 + 2\mathrm{i}) = 2 - 3\mathrm{i}$, donc $CD = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

(c) $z_E - z_F = (1 + \mathrm{i}) - (-4 + 13\mathrm{i}) = 5 - 12\mathrm{i}$, donc $EF = \sqrt{25 + 144} = 13$. Comme $z_F - z_E = -(z_E - z_F)$ et $|-w| = |w|$, on trouve aussi 13 : l'ordre ne change pas le module.

(d) Une distance est le module d'une différence, pas une différence de modules : $GH = |z_H - z_G| = |2 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$, et non 3.

(e) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Puis $z_A - z_I = -2 - \mathrm{i}$, donc $IA = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$
(c'est bien $\frac{AB}{2}$).

Ex. 34 ★★☆ **Mesurer un angle orienté avec un quotient**

(a) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\mathrm{i}}{3} = \mathrm{i}$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

(b) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+3\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

(c) Le vecteur d'arrivée $\overrightarrow{AB}$ va au numérateur : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3\mathrm{i}}{3+3\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
(c'est l'opposé de l'angle précédent).

(d) Le sommet est B et le vecteur d'arrivée $\overrightarrow{BC}$ va au numérateur : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{-2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

(e) $\arg(z_C) - \arg(z_B) = \arg\left(\frac{z_C}{z_B}\right)$ mesure $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$: c'est l'angle en O, pas en A. Il faut partir de A : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3}{3} = -1$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi\ [2\pi]$: A est entre B et C.

(f) $z_B - z_A = -2 + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Ex. 35 ★★☆ **Nature d'un triangle, puis d'un quadrilatère**

(a) $z_B - z_A = 5 + \mathrm{i}$, donc $AB^2 = 25 + 1 = 26$.
$z_C - z_A = 1 - 5\mathrm{i}$, donc $AC^2 = 1 + 25 = 26$.
$z_C - z_B = -4 - 6\mathrm{i}$, donc $BC^2 = 16 + 36 = 52$.

Ex. 35 (suite)

(b) $AB^2 = AC^2$, donc $AB = AC$. De plus $AB^2 + AC^2 = 26 + 26 = 52 = BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A. Conclusion : ABC est rectangle isocèle en A.

(c) $Z = \frac{1-5\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}} = \frac{(1-5\mathrm{i})(5-\mathrm{i})}{26} = \frac{5-\mathrm{i}-25\mathrm{i}-5}{26} = \frac{-26\mathrm{i}}{26} = -\mathrm{i}$.
Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: on retrouve bien un triangle rectangle isocèle en A ($|Z| = 1$).

(d) Le triangle ABC est rectangle en A, donc son hypoténuse $[BC]$ est un diamètre de son cercle circonscrit. Le centre K est le milieu de $[BC]$: $z_K = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{(3+2\mathrm{i})+(-1-4\mathrm{i})}{2} = 1-\mathrm{i}$. Le rayon vaut $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13}$. On vérifie : $KA = |-3+2\mathrm{i}| = \sqrt{13}$.

Ex. 36 ★★☆ Alignement et orthogonalité : vrai ou faux ?

(a) Vrai. $z_B - z_A = 2-4\mathrm{i}$ et $z_C - z_A = 3-6\mathrm{i} = \frac{3}{2}(2-4\mathrm{i})$, donc $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{3}{2}$. Ce quotient est réel, donc A, B, C sont alignés.

(b) Faux. $z_B - z_A = 2+\mathrm{i}$ et $z_D - z_C = -2+4\mathrm{i}$. Alors $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A} = \frac{(-2+4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5} = \frac{-4+2\mathrm{i}+8\mathrm{i}+4}{5} = 2\mathrm{i}$. Il est imaginaire pur, donc $(AB) \perp (CD)$, mais son module vaut 2, donc $CD = 2AB \neq AB$.

(c) Faux. Le quotient est nul si et seulement si $z_C = z_A$, c'est-à-dire $C = A$. Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ et l'angle n'est pas défini (0 n'a pas d'argument). Les trois points doivent être distincts.

(d) Faux. $\frac{z_M-z_K}{z_L-z_K} = \frac{-2-4\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = -2$ est réel : les points sont alignés. L'alignement se lit modulo π : un argument égal à π signifie que K est entre L et M.

Ex. 37 ★★☆ Les erreurs d'Inès sur un triangle

(a) $z_B - z_A = 2-2\mathrm{i}$ a une partie imaginaire négative : son argument ne peut pas être $\frac{\pi}{4}$. On a $|2-2\mathrm{i}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ et $2-2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Donc $\arg(z_B - z_A) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{2}$.

(b) $z_C - z_A = (1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$. $Z = \frac{[(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}](2+2\mathrm{i})}{8} = \frac{4+4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Comme $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(c) Non. Le vecteur d'arrivée $\overrightarrow{AC}$ doit être au numérateur : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(Z)$. Son quotient vaut $\frac{1}{Z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et donne l'angle opposé $-\frac{\pi}{3}$. La bonne mesure est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Ex. 37 (suite)

(d) $|Z| = 1$ donc $\frac{AC}{AB} = 1$, soit $AB = AC$: le triangle est isocèle en A, avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ en A. Ses deux autres angles sont égaux et valent $\frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$: ABC est équilatéral.

Ex. 38 ★★★ Du triangle au carré

(a) $z_A - z_B = -4+\mathrm{i}$ et $z_C - z_B = 1+4\mathrm{i}$.
Donc $Z = \frac{1+4\mathrm{i}}{-4+\mathrm{i}} = \frac{(1+4\mathrm{i})(-4-\mathrm{i})}{17} = \frac{-4-\mathrm{i}-16\mathrm{i}+4}{17} = -\mathrm{i}$. Le vecteur d'arrivée $\overrightarrow{BC}$ est au numérateur : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

(b) $|Z| = \frac{BC}{BA} = 1$, donc $BA = BC$. De plus $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}$. Comme $Z = -\mathrm{i}$, le triangle ABC est rectangle isocèle en B. Enfin $BA = |z_A - z_B| = |-4+\mathrm{i}| = \sqrt{17}$.

(c) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $z_B - z_A = z_C - z_D$.
Donc $z_D = z_A + z_C - z_B = -1+2\mathrm{i}+4+5\mathrm{i}-3-\mathrm{i} = 6\mathrm{i}$. On vérifie : $z_B - z_A = 4-\mathrm{i}$ et $z_C - z_D = 4-\mathrm{i}$.
Attention à l'ordre des sommets : $z_A + z_B - z_C$ donnerait un autre parallélogramme.

(d) $ABCD$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur ($BA = BC$) : c'est un losange. Il a un angle droit en B : c'est aussi un rectangle.
Donc $ABCD$ est un carré. Son centre est le milieu de $[AC]$: $z_\Omega = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{3+7\mathrm{i}}{2}$. C'est aussi le milieu de $[BD]$: $\frac{3+\mathrm{i}+6\mathrm{i}}{2} = \frac{3+7\mathrm{i}}{2}$.

(e) $|z-4-5\mathrm{i}| = |z-z_C| = MC$ et $|z+1-2\mathrm{i}| = |z-z_A| = MA$. L'ensemble cherché est formé des points M tels que $MA = MC$: c'est la médiatrice de $[AC]$. Or $BA = BC = \sqrt{17}$, et $DA = |-1-4\mathrm{i}| = \sqrt{17}$, $DC = |4-\mathrm{i}| = \sqrt{17}$. Les points distincts B et D appartiennent donc à cette médiatrice : c'est la droite (BD).

Ex. 39 ★★★ Les points 1, z et z^2

(a) $A = M$ si et seulement si $z = 1$. $M = N$ si et seulement si $z^2 = z$, soit $z(z-1) = 0$, donc $z = 0$ ou $z = 1$. $A = N$ si et seulement si $z^2 = 1$, donc $z = 1$ ou $z = -1$. Les points ne sont pas deux à deux distincts si et seulement si $z \in \{-1\,;0\,;1\}$.

(b) Puisque $z \neq 1$: $Z = \frac{z^2-1}{z-1} = \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} = z+1$. Ce quotient est bien défini et non nul, car $z \neq 1$ et $z \neq -1$.

Ex. 39 **(suite)**

(c) A, M, N sont distincts, donc ils sont alignés si et seulement si $Z = z + 1$ est réel, c'est-à-dire si et seulement si z est réel. L'ensemble cherché est l'axe des réels privé des points d'affixes -1, 0 et 1. Par exemple, pour $z = 2$: $Z = \frac{4-1}{2-1} = 3$, qui est bien réel.

(d) On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels. Alors $Z = (x + 1) + \mathrm{i}y$, et ce nombre est non nul. On a $(AM) \perp (AN)$ si et seulement si Z est imaginaire pur, soit $x = -1$. L'ensemble est la droite d'équation $x = -1$ privée du point d'affixe -1. Le triangle est rectangle isocèle en A si et seulement si $Z = \pm\mathrm{i}$, soit $z = -1 + \mathrm{i}$ ou $z = -1 - \mathrm{i}$. Ces deux points sont bien sur cette droite.

(e) AMN est équilatéral si et seulement si $AN = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = \pm\frac{\pi}{3}$, soit $Z = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Pour $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. De même, pour $Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$: $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Ces valeurs ne sont pas exclues. Les points A, M, N sont alors les images des racines cubiques de l'unité.

Ex. 40 ★★★ **Un cercle, un diamètre et une demi-droite**

(a) $|z - z_\Omega| = \Omega M$.
Donc Γ est le cercle de centre Ω et de rayon 5.
$\Omega A = |4 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{16 + 9} = 5$, $\Omega B = |-4 - 3\mathrm{i}| = 5$ et $\Omega C = |5| = 5$: A, B, C sont sur Γ. Le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+4\mathrm{i}}{2} = 1 + 2\mathrm{i} = z_\Omega$.

(b) $z_A - z_C = -1 + 3\mathrm{i}$ et $z_B - z_C = -9 - 3\mathrm{i}$.
Donc $\frac{-1+3\mathrm{i}}{-9-3\mathrm{i}} = \frac{(-1+3\mathrm{i})(-9+3\mathrm{i})}{90} = \frac{9-3\mathrm{i}-27\mathrm{i}-9}{90} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}$. Ce quotient est imaginaire pur et non nul : $(CA) \perp (CB)$, donc ABC est rectangle en C. Le numérateur correspond à l'arrivée $\overrightarrow{CA}$, donc $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \arg\left(-\frac{1}{3}\mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le module $\frac{1}{3}$ donne $CA = \frac{CB}{3}$: le triangle n'est pas isocèle.

(c) $\arg(z - z_\Omega) = (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = \pi\ [2\pi]$: le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ a le sens de $-\vec{u}$.
Donc Δ est la demi-droite ouverte d'origine Ω, parallèle à l'axe des réels et dirigée vers la gauche. C'est l'ensemble des points d'affixe $x + 2\mathrm{i}$ avec $x < 1$. Pour un tel point, $\Omega M = |x - 1| = 5$ et $x < 1$, donc $x = -4$. Ainsi $z_D = -4 + 2\mathrm{i}$.

Ex. 40 **(suite)**

(d) $z_C - z_A = 1 - 3\mathrm{i}$ et $z_B - z_D = -3 - \mathrm{i} + 4 - 2\mathrm{i} = 1 - 3\mathrm{i}$. Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ et $ACBD$ est un parallélogramme. Il a un angle droit en C d'après la question 2 : c'est un rectangle. Or $CA = |-1 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{10}$ et $CB = |-9 - 3\mathrm{i}| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$. Ses côtés consécutifs n'ont pas la même longueur : $ACBD$ n'est pas un carré.

6. *Ensembles de points*

Ex. 41 ★☆☆ **Cercles et disques**

(a) $|z - (3 - 4\mathrm{i})| = 2$: $\Omega M = 2$ avec $\Omega(3 - 4\mathrm{i})$. C'est le cercle de centre le point d'affixe $3 - 4\mathrm{i}$ et de rayon 2. Contrôle : $5 - 4\mathrm{i}$ convient, car $|2| = 2$.

(b) $|z - (-5 + 2\mathrm{i})| \leqslant 3$: c'est le disque fermé de centre le point d'affixe $-5 + 2\mathrm{i}$ (et non $5 - 2\mathrm{i}$) et de rayon 3. Contrôle : $-2 + 2\mathrm{i}$ est sur le bord, car $|3| = 3$.

(c) $|2z - 6\mathrm{i}| = 2 \times |z - 3\mathrm{i}|$, donc la condition s'écrit $|z - 3\mathrm{i}| = 5$: c'est le cercle de centre le point d'affixe $3\mathrm{i}$ et de rayon 5
(et non 10).

(d) $|\overline{z} - (1 + 2\mathrm{i})| = |\overline{z - (1 - 2\mathrm{i})}| = |z - (1 - 2\mathrm{i})|$. La condition s'écrit $|z - (1 - 2\mathrm{i})| = 4$: c'est le cercle de centre le point d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ et de rayon 4.

(e) Un module est toujours positif ou nul : $|z + 1| = -2$ n'a aucune solution. L'ensemble est vide.

(f) $|\mathrm{i}z + 2| = |\mathrm{i}| \times \left|z + \frac{2}{\mathrm{i}}\right| = |z - 2\mathrm{i}|$ car $|\mathrm{i}| = 1$ et $\frac{2}{\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$. La condition s'écrit $|z - 2\mathrm{i}| = 6$: c'est le cercle de centre le point d'affixe $2\mathrm{i}$ et de rayon 6.

Ex. 42 ★☆☆ **Les demi-droites de Sacha**

(a) Modulo 2π, seule la direction $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ convient, pas son opposée. Avec $A(2)$, $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$: c'est la demi-droite ouverte d'origine A qui contient le point d'affixe $3 + \mathrm{i}$, soit $y = x - 2$ avec $x > 2$.

(b) $z + 1 - \mathrm{i} = z - (-1 + \mathrm{i})$: l'origine est le point $A(-1 + \mathrm{i})$. C'est la demi-droite ouverte d'origine A, dirigée vers le haut : $x = -1$ et $y > 1$
(par exemple $-1 + 2\mathrm{i}$).

(c) Modulo π, la direction opposée convient aussi : on obtient la droite passant par $A(3\mathrm{i})$ de vecteur directeur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, privée de A, soit $y = \sqrt{3}\,x + 3$ avec $x \neq 0$.

(d) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$, donc $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. C'est la demi-droite ouverte d'origine O qui contient le point d'affixe $\sqrt{3} - \mathrm{i}$
(et non $\sqrt{3} + \mathrm{i}$).

Ex. 42 **(suite)**

(e) Le point $A(1-2\mathrm{i})$ doit être exclu, car $\arg(0)$ n'est pas défini. $z-(1-2\mathrm{i})$ est un réel strictement négatif : $y=-2$ et $x<1$. C'est une demi-droite ouverte.

Ex. 43 ★★☆ **Une médiatrice et son équation**

(a) $|z-(1+3\mathrm{i})|=|z-(-5+\mathrm{i})|$. Avec $A(1+3\mathrm{i})$ et $B(-5+\mathrm{i})$, la condition s'écrit $AM=BM$. E est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

(b) Les modules étant positifs, on compare leurs carrés : $(x-1)^2+(y-3)^2=(x+5)^2+(y-1)^2$, soit $-2x+1-6y+9=10x+25-2y+1$. On obtient $-12x-4y-16=0$. Une équation de E est donc $3x+y+4=0$.

(c) Le milieu I de $[AB]$ appartient à la médiatrice. Son affixe vaut $\frac{(1+3\mathrm{i})+(-5+\mathrm{i})}{2}=-2+2\mathrm{i}$, et $3\times(-2)+2+4=0$: l'équation est cohérente. On a bien $IA=|-3-\mathrm{i}|=\sqrt{10}$ et $IB=|3+\mathrm{i}|=\sqrt{10}$.

(d) Avec $y=0$: $3x+4=0$, donc $x=-\frac{4}{3}$. Le point cherché a pour affixe $-\frac{4}{3}$. Vérification : $|-\frac{7}{3}-3\mathrm{i}|^2=\frac{49}{9}+9=\frac{130}{9}$ et $|\frac{11}{3}-\mathrm{i}|^2=\frac{121}{9}+1=\frac{130}{9}$. Les deux distances sont égales.

Ex. 44 ★★☆ **Un quotient réel ou imaginaire pur**

(a) $Z=\frac{z-(2-\mathrm{i})}{z-(-2+3\mathrm{i})}$, donc $z_A=2-\mathrm{i}$ et $z_B=-2+3\mathrm{i}$. Le dénominateur s'annule pour $z=-2+3\mathrm{i}$: Z n'est pas défini au point B.

(b) Pour $M\neq A$ et $M\neq B$, $\arg(Z)=(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})\ [2\pi]$. Z est donc réel non nul si et seulement si $M\in(AB)$. En A, $Z=0$ est réel. F est la droite (AB) privée de B. On a $\overrightarrow{AB}(-4\,;4)$, de pente -1, qui passe par $A(2\,;-1)$: $x+y-1=0$. Contrôle : $z=3-2\mathrm{i}$ donne $Z=\frac{1-\mathrm{i}}{5-5\mathrm{i}}=\frac{1}{5}$.

(c) Z est imaginaire pur non nul si et seulement si l'angle $\widehat{AMB}$ est droit. En A, $Z=0$ est aussi imaginaire pur. G est donc le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B. Son centre est le milieu de $[AB]$, d'affixe $\frac{(2-\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})}{2}=\mathrm{i}$. Son rayon vaut $\frac{|-4+4\mathrm{i}|}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

(d) $Z=\frac{2+3\mathrm{i}-2+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}}=\frac{4\mathrm{i}}{4}=\mathrm{i}$: Z est imaginaire pur. C'est cohérent, car la distance de ce point au centre vaut $|2+3\mathrm{i}-\mathrm{i}|=|2+2\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$: le point est bien sur le cercle G.

Ex. 45 ★★☆ **Vrai ou faux : ensembles de points**

(a) Faux. $|-2z+4\mathrm{i}|=|-2|\times|z-2\mathrm{i}|$, donc la condition s'écrit $|z-2\mathrm{i}|=4$: c'est le cercle de centre le point d'affixe $2\mathrm{i}$ et de rayon 4. Contrôle : $z=4+2\mathrm{i}$ donne $|-8|=8$.

(b) Vrai. Pour $z=-5+2\mathrm{i}$, $z+3=-2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$: son argument vaut bien $\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

(c) Faux. $\arg(z-\mathrm{i})=0\ [\pi]$ signifie que $z-\mathrm{i}$ est un réel non nul. Le point d'affixe i est exclu, car $\arg(0)$ n'est pas défini. L'ensemble est la droite d'équation $y=1$ privée du point d'affixe i.

(d) Vrai. $|z-1+2\mathrm{i}|=|z-(1-2\mathrm{i})|$: c'est le disque fermé de centre $\Omega(1-2\mathrm{i})$ et de rayon $\sqrt{5}$. Pour $z=0$: $|-1+2\mathrm{i}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\leqslant\sqrt{5}$. O est sur le bord du disque. L'inégalité est large, donc le bord est inclus : O appartient à l'ensemble.

Ex. 46 ★★★ **Un quotient étudié en coordonnées**

(a) $z-6=(x-6)+\mathrm{i}y$ et $z-4\mathrm{i}=x+\mathrm{i}(y-4)$. On multiplie par le conjugué du dénominateur : $Z=\frac{[(x-6)+\mathrm{i}y][x-\mathrm{i}(y-4)]}{x^2+(y-4)^2}$. Au numérateur : $x^2-6x+y^2-4y+\mathrm{i}[xy-(x-6)(y-4)]=x^2+y^2-6x-4y+\mathrm{i}(4x+6y-24)$. Avec $D=x^2+(y-4)^2\neq0$: $\mathrm{Re}(Z)=\frac{x^2+y^2-6x-4y}{D}$ et $\mathrm{Im}(Z)=\frac{4x+6y-24}{D}$. Contrôle avec $z=1+\mathrm{i}$: $Z=\frac{-5+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=-0{,}8-1{,}4\mathrm{i}$, et les formules donnent bien $\frac{-8}{10}$ et $\frac{-14}{10}$.

(b) Z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(Z)=0$, c'est-à-dire $4x+6y-24=0$, soit $2x+3y-12=0$. $A(6\,;0)$ vérifie $12-12=0$ et $B(0\,;4)$ vérifie $12-12=0$.
Donc E_1 est la droite (AB) privée de B. Le point A est gardé : il donne $Z=0$, qui est réel.

(c) Z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(Z)=0$, c'est-à-dire $x^2+y^2-6x-4y=0$, soit $(x-3)^2-9+(y-2)^2-4=0$, d'où $(x-3)^2+(y-2)^2=13$. C'est le cercle de centre $\Omega(3+2\mathrm{i})$ et de rayon $\sqrt{13}$. Il passe par B $(9+4=13)$, et B est exclu.
Donc E_2 est ce cercle privé de B. On retrouve le cercle de diamètre $[AB]$: Ω est le milieu de $[AB]$ et $AB=|4\mathrm{i}-6|=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

(d) $Z=\frac{5+5\mathrm{i}-6}{5+5\mathrm{i}-4\mathrm{i}}=\frac{-1+5\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}=\frac{(-1+5\mathrm{i})(5-\mathrm{i})}{26}=\frac{-5+\mathrm{i}+25\mathrm{i}+5}{26}=\mathrm{i}$. Z est imaginaire pur, donc $C\in E_2$. Avec l'équation : $(5-3)^2+(5-2)^2=4+9=13$. Les deux méthodes concordent.

Ex. 46 **(suite)**

(e) $|Z| = 1$ si et seulement si $|z-6| = |z-4\mathrm{i}|$, c'est-à-dire $AM = BM$. E_3 est donc la médiatrice de $[AB]$ (B n'en fait pas partie). Avec les carrés des modules : $(x-6)^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2$, soit $-12x + 36 = -8y + 16$, d'où $3x - 2y - 5 = 0$. Contrôle : le milieu $(3\,;2)$ de $[AB]$ vérifie $9 - 4 - 5 = 0$.

Ex. 47 ★★★ **Les cercles déguisés de Maëlle**

(a) Non, elle a tort. On factorise le coefficient de z : $2z - 4 + 6\mathrm{i} = 2(z - 2 + 3\mathrm{i}) = 2\,(z - (2 - 3\mathrm{i}))$.
Donc $|2z - 4 + 6\mathrm{i}| = 6 \iff 2|z - (2-3\mathrm{i})| = 6 \iff |z - (2-3\mathrm{i})| = 3$. Γ_1 est le cercle de centre $\Omega_1(2 - 3\mathrm{i})$ et de rayon 3.

(b) Par le calcul direct : $|2 \times 2 - 4 + 6\mathrm{i}| = |6\mathrm{i}| = 6$. Par la géométrie : $\Omega_1 P = |2 - (2 - 3\mathrm{i})| = |3\mathrm{i}| = 3$, qui est le rayon.
Donc $P \in \Gamma_1$.

(c) $\overline{z} + 3 + \mathrm{i} = \overline{z + 3 - \mathrm{i}}$, et un complexe a le même module que son conjugué.
Donc $|\overline{z} + 3 + \mathrm{i}| = |z + 3 - \mathrm{i}| = |z - (-3 + \mathrm{i})|$. Γ_2 est le cercle de centre $\Omega_2(-3 + \mathrm{i})$ et de rayon 2. Contrôle avec $z = -1 + \mathrm{i}$: $|-1 - \mathrm{i} + 3 + \mathrm{i}| = |2| = 2$.

(d) $\Omega_1\Omega_2 = |(2 - 3\mathrm{i}) - (-3 + \mathrm{i})| = |5 - 4\mathrm{i}| = \sqrt{41}$. S'il existait un point M commun, l'inégalité triangulaire donnerait $\Omega_1\Omega_2 \leqslant \Omega_1 M + M\Omega_2 = 3 + 2 = 5$. Or $\sqrt{41} > \sqrt{25} = 5$. Les deux cercles n'ont donc aucun point commun : ils sont extérieurs l'un à l'autre.

(e) $|z - 1 + \mathrm{i}| = |z - (1 - \mathrm{i})| = KM$, avec $K(1 - \mathrm{i})$. Si $m > 4$, F_m est le cercle de centre K et de rayon $m - 4$. Si $m = 4$, $KM = 0$ et F_4 est réduit au point K. Si $m < 4$, un module ne peut pas être strictement négatif : F_m est vide.

Ex. 48 ★★★ **Le couloir de vol du drone de Yanis**

(a) $z + 1 - 2\mathrm{i} = z - z_A$. La condition équivaut à $z - z_A = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ avec $r > 0$, soit $x + 1 = r\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y - 2 = r\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $y - 2 = x + 1$ et $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $y = x + 3$ avec $x > -1$. D_1 est la demi-droite ouverte d'origine A (point A exclu), dirigée par le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(1\,;1)$.

(b) Non, il a tort. Modulo π, la condition équivaut à $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$: on ajoute la demi-droite opposée. Par exemple, $z = -2 + \mathrm{i}$ donne $z - z_A = -1 - \mathrm{i}$, d'argument $-\frac{3\pi}{4}$, donc $M \in D_2$, alors que $x = -2 < -1$ donc $M \notin D_1$. D_2 est la droite d'équation $y = x + 3$ privée de A.

Ex. 48 **(suite)**

(c) $|z - (-1 + 2\mathrm{i})| = |z - (5 + 2\mathrm{i})|$ équivaut à $AM = CM$: Δ est la médiatrice de $[AC]$. Avec les carrés des modules : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2$, soit $2x + 1 = -10x + 25$, d'où $x = 2$. Contrôle : le milieu de $[AC]$, d'affixe $2 + 2\mathrm{i}$, vérifie $x = 2$.

(d) On résout $x = 2$ et $y = x + 3$ avec $x > -1$: $y = 5$, donc $z_B = 2 + 5\mathrm{i}$. On a $AB = |3 + 3\mathrm{i}| = 3\sqrt{2}$, $CB = |-3 + 3\mathrm{i}| = 3\sqrt{2}$ et $AC = |6| = 6$. Comme $AB^2 + CB^2 = 18 + 18 = 36 = AC^2$, la réciproque du théorème de Pythagore s'applique. Le triangle ABC est donc rectangle isocèle en B.

(e) Pour $M \in D_1$, on a $z - z_A = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ avec $r = AM > 0$. La condition donne $0 < r \leqslant 2\sqrt{2}$. Pour $r = 2\sqrt{2}$: $z = -1 + 2\mathrm{i} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = -1 + 2\mathrm{i} + 2 + 2\mathrm{i} = 1 + 4\mathrm{i}$.
L'ensemble est le segment $]AE]$ avec $E(1 + 4\mathrm{i})$: A est exclu et E est inclus.