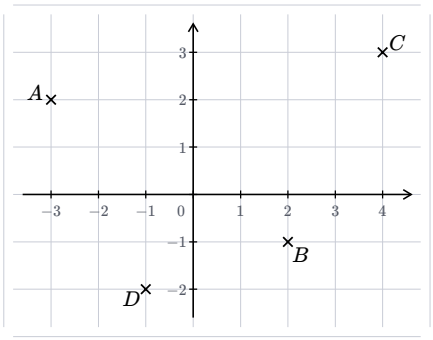
48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels : coordonnées d'un vecteur

À retenir : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$: arrivée moins départ ; $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. $k\vec{u}$: les deux coordonnées. $\overrightarrow{AM} = \vec{u}\,(x\,;\,y) : M(x_A + x\,;\, y_A + y)$. ABCD parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : extrémité moins origine** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3\,;\,2)$, $B(2\,;\,-1)$, $C(4\,;\,3)$ et $D(-1\,;\,-2)$. Calcule les coordonnées de chaque vecteur.



(a) $\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{BA}$

(c) $\overrightarrow{DC}$

(d) $\overrightarrow{DB}$

(e) $\overrightarrow{EF}$ avec $E(1{,}5\,;\,-0{,}5)$ et $F(-2\,;\,3{,}5)$

(f) $\overrightarrow{GH}$ avec $G\left(\frac{1}{3}\,;\,-2\right)$ et $H\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : somme, produit par un réel** — Dans une base orthonormée, on donne $\vec{u}\,(-2\,;\,5)$, $\vec{v}\,(3\,;\,-4)$ et $\vec{w}\,(0\,;\,-1{,}5)$. Calcule les coordonnées demandées.

(a) $3\vec{u}$

(b) $\vec{u} + \vec{v}$

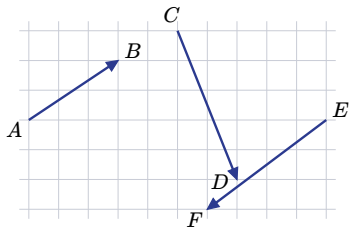
(c) $\vec{u} - \vec{v}$

(d) $-2\vec{v} + \vec{w}$

(e) $\frac{3}{4}\vec{v}$

(f) Le vecteur $\vec{t}$ tel que $\vec{t} + \vec{u} = \vec{v}$

Ex. 3 ★☆☆ **Lire des vecteurs sur un quadrillage** — Le quadrillage a des carreaux de côté 1. Lis les coordonnées des vecteurs : déplacement horizontal puis vertical, de l'origine vers la pointe de la flèche.



(a) Lis les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

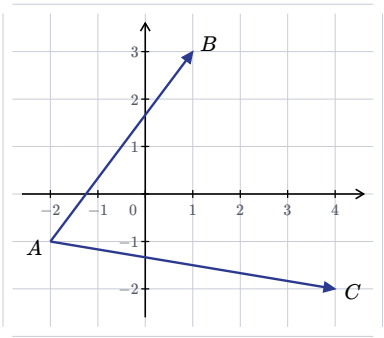
(b) Lis les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$.

(c) Lis les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$.

(d) Donne les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ sans faire de nouvelle lecture.

(e) Léa trouve $\overrightarrow{CD}\,(-2\,;\,5)$. Quelle erreur a-t-elle faite ?

Ex. 4 ★★☆ **Trouver un point défini par un vecteur** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2\,;\,-1)$, $B(1\,;\,3)$, $C(4\,;\,-2)$ et $\vec{u}\,(5\,;\,-2)$.



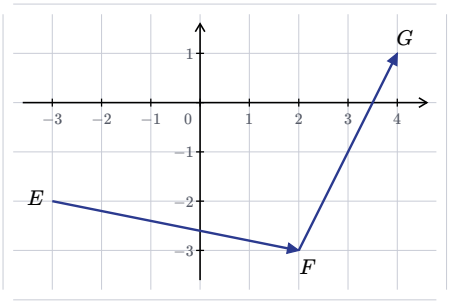
(a) Calcule les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

(b) Calcule les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NB} = \vec{u}$.

(c) Calcule les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

(d) Calcule les coordonnées du point Q tel que $\overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ex. 5 ★★☆ **Le jardin de Malik : parallélogramme et Chasles** — Sur le plan du jardin de Malik, muni d'un repère orthonormé, trois piquets sont placés en $E(-3\,;\,-2)$, $F(2\,;\,-3)$ et $G(4\,;\,1)$. Il veut un massif en forme de parallélogramme EFGH.



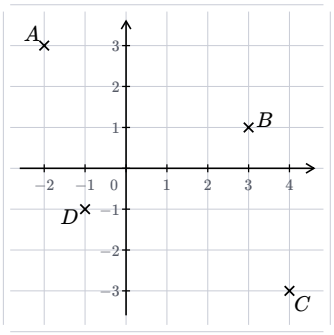
(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et de $\overrightarrow{FG}$.

(b) Calcule les coordonnées du quatrième piquet H. Contrôle avec un autre vecteur.

(c) Inès écrit $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ et trouve $H(9\,;\,0)$. Explique son erreur.

(d) Simplifie $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{EG}$ avec la relation de Chasles, puis vérifie avec les coordonnées.

Ex. 6 ★★★ **Le parallélogramme de Nolan : erreur à corriger** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2\,;\,3)$, $B(3\,;\,1)$, $C(4\,;\,-3)$ et $D(-1\,;\,-1)$. Nolan doit dire si ABCD est un parallélogramme.



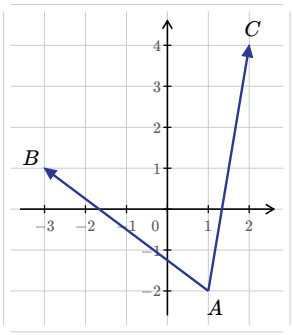
(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$. Attention aux signes.

(b) Nolan affirme : « $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, donc ABCD n'est pas un parallélogramme. » Vrai ou faux ? Justifie en citant la propriété.

(c) Contrôle ta conclusion : calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ et de $\overrightarrow{BC}$, puis conclus.

(d) Eva écrit : « $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ ». Corrige cette relation de Chasles, puis vérifie la relation corrigée avec les coordonnées.

Ex. 7 ★★★ **Des points définis par des relations vectorielles** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\,;\,-2)$, $B(-3\,;\,1)$ et $C(2\,;\,4)$.



(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

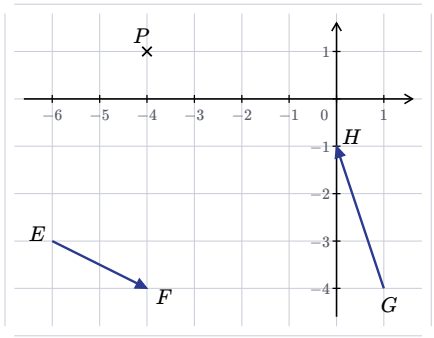
(b) Saïd calcule $2\overrightarrow{AB}$ et trouve $(-8\,;\,3)$. Explique son erreur, puis calcule les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

(c) Déduis-en les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

(d) Sans coordonnées, montre avec la relation de Chasles que $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CB}$.

(e) Vérifie cette égalité avec les coordonnées, puis précise la position du point B sur le segment [CM].

Ex. 8 ★★★ **La carte au trésor de Jade** — Sur la carte de Jade, munie d'un repère orthonormé, le palmier est en $P(-4\,;\,1)$. Le rocher R vérifie $\overrightarrow{PR}\,(6\,;\,2)$. Le trésor T vérifie $\overrightarrow{RT} = 2\vec{u} - \vec{v}$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{EF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{GH}$ représentés sur la figure.



(a) Lis sur le quadrillage les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ (déplacement horizontal puis vertical, de l'origine vers la pointe).

(b) Léo place le rocher au point de coordonnées $(6\,;\,2)$. Explique son erreur, puis calcule les coordonnées de R.

(c) Calcule les coordonnées du vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$.

(d) Déduis-en les coordonnées du trésor T.

(e) Contrôle : calcule $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT}$ avec la relation de Chasles, puis compare avec les coordonnées de $\overrightarrow{PT}$ obtenues à partir de P et T.

2. Vecteurs colinéaires

À retenir : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$. Je trouve k sur une coordonnée non nulle, puis je le vérifie sur l'autre. Exemple : $(2\,;\,-1)$ et $(-6\,;\,3)$ donnent $k = -3$, donc sens contraires. $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : trouver le coefficient de colinéarité** — Dans chaque cas, cherche k sur une coordonnée, puis vérifie-le sur l'autre. Si les vecteurs sont colinéaires, précise s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

(a) $\vec{u}\,(4\,;\,-6)$ et $\vec{v}\,(-10\,;\,15)$: trouve k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

(b) $\vec{u}\,(6\,;\,9)$ et $\vec{v}\,(8\,;\,12{,}5)$ sont-ils colinéaires ?

(c) $\vec{u}\,(0\,;\,-5)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,3)$: trouve k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

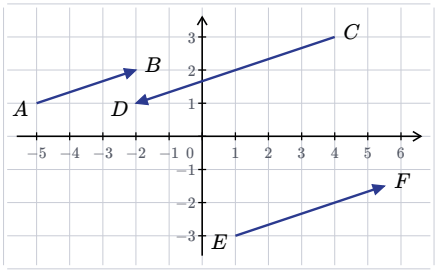
(d) Vrai ou faux ? $\vec{v}\,(-1\,;\,0{,}4)$ est colinéaire à $\vec{u}\,(2{,}5\,;\,-1)$ et de même sens. Justifie.

(e) Le vecteur nul $\vec{0}$ est-il colinéaire à $\vec{u}\,(7\,;\,-2)$? Justifie.

(f) $\vec{u}\,(3\,;\,0)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,3)$ sont-ils colinéaires ?

(g) $\vec{u}\,\left(\frac{2}{3}\,;\,-1\right)$ et $\vec{v}\,(-2\,;\,3)$: trouve k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Ex. 10 ★★☆ **Automatismes : lire des vecteurs colinéaires sur un quadrillage** — Le plan est muni d'un repère orthonormé.



(a) Lis sur le quadrillage les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

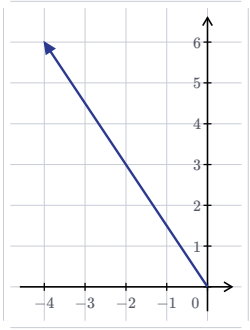
(b) Exprime $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Compare leurs sens et leurs longueurs.

(c) Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{EF} = k\,\overrightarrow{AB}$.

(d) Lis les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$. Ce vecteur est-il colinéaire à $\overrightarrow{AB}$? Justifie par un calcul.

(e) Vrai ou faux ? $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens. Justifie par un calcul.

Ex. 11 ★★☆ **Tableau de proportionnalité et réel m** — Dans une base orthonormée, le vecteur $\vec{u}$ représenté sur la figure a pour coordonnées $(-4\,;\,6)$.



(a) Recopie et complète le tableau pour que $\vec{v}$ soit colinéaire à $\vec{u}$:

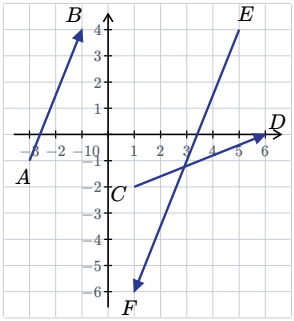
	$\vec{u}$	$\vec{v}$
abscisse	-4	14
ordonnée	6	…

(b) Trouve le réel m tel que $\vec{w}\,(m\,;\,-4{,}5)$ soit colinéaire à $\vec{u}$.

(c) Trouve le réel m tel que $\vec{t}\,(m+1\,;\,9)$ soit colinéaire à $\vec{u}$.

(d) Existe-t-il des réels m tels que $\vec{s}\,(0\,;\,m)$ soit colinéaire à $\vec{u}$? Justifie.

Ex. 12 ★★☆ **Deux élèves se trompent** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3\,;\,-1)$, $B(-1\,;\,4)$, $C(1\,;\,-2)$, $D(6\,;\,0)$, $E(5\,;\,4)$ et $F(1\,;\,-6)$.

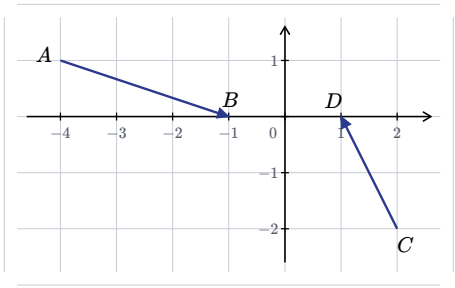


(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

(b) Léa écrit : « Pour $\overrightarrow{AB}$, $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$. Pour $\overrightarrow{CD}$, $\frac{y'}{x'} = \frac{2}{5}$. Mêmes rapports, donc ils sont colinéaires. » Explique son erreur, puis conclus correctement.

(c) Hugo écrit : « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires, car $\overrightarrow{EF}$ est plus long et de sens contraire. » Vrai ou faux ? Justifie par un calcul.

Ex. 13 ★★☆ **Trajectoire d'un drone** — Dans une base orthonormée (unité : 10 m), un drone dispose de deux déplacements : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, avec $A(-4\,;\,1)$, $B(-1\,;\,0)$, $C(2\,;\,-2)$ et $D(1\,;\,0)$. Ainsi $\vec{u}\,(3\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(-1\,;\,2)$.



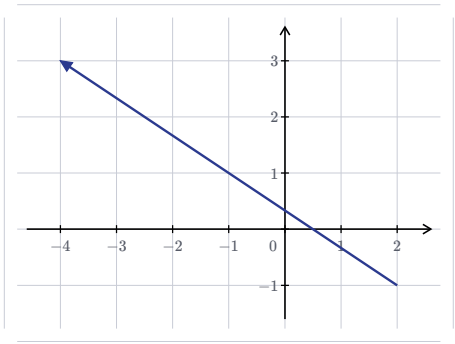
(a) Calcule les coordonnées de $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

(b) Le drone doit suivre $\vec{t}\,(-4{,}5\,;\,1{,}5)$. $\vec{t}$ est-il colinéaire à $\vec{u}$? Justifie par un calcul et, si oui, précise le sens.

(c) Calcule les coordonnées de $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{s}$ sont-ils colinéaires ? Justifie.

(d) Calcule les coordonnées de $\vec{r} = \vec{w} - 3\vec{v}$, puis trouve le réel k tel que $\vec{r} = k\,\vec{t}$.

Ex. 14 ★★★ **Vrai ou faux : colinéaires, égaux, de même sens ?** — Dans une base orthonormée, le vecteur $\vec{u}$ représenté sur la figure a pour coordonnées $(-6\,;\,4)$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie par un calcul ou par la définition.



(a) « Le vecteur $\vec{v}\,(9\,;\,-6)$ est colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens que $\vec{u}$. »

(b) « Comme $\frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$, le vecteur $\vec{w}\,(-3\,;\,1)$ est colinéaire à $\vec{u}$. »

(c) « Le vecteur $\vec{s}\,\left(\frac{3}{2}\,;\,-1\right)$ est colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{u}$ est quatre fois plus long que $\vec{s}$. »

(d) « Aucun réel k ne vérifie $\vec{u} = k\vec{0}$, donc le vecteur nul n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. »

(e) « Un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et de même longueur que $\vec{u}$ est forcément égal à $\vec{u}$. »

Ex. 15 ★★★ **Un réel m, deux valeurs, deux sens** — Dans une base orthonormée, m désigne un réel. On considère les vecteurs $\vec{u}\,(m\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(8\,;\,m)$.

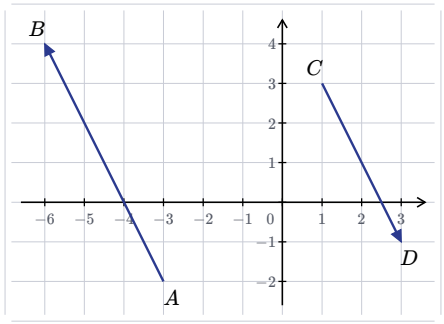
(a) On prend $m = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifie sans diviser par 0.

(b) On suppose $m \neq 0$ et qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Exprime k en fonction de m avec les ordonnées, puis montre que $m^2 = 16$.

(c) Déduis-en les valeurs possibles de m. Pour chacune, écris les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis vérifie qu'ils sont colinéaires en donnant k.

(d) Pour chaque valeur trouvée, précise si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens ou des sens contraires, et compare leurs longueurs.

Ex. 16 ★★★ **Carte au trésor : la méthode d'Inès** — Sur une carte au trésor munie d'un repère orthonormé (unité : 100 m), on repère le palmier $A(-3\,;\,-2)$, le rocher $B(-6\,;\,4)$, le puits $C(1\,;\,3)$ et la cabane $D(3\,;\,-1)$.



(a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

(b) Inès divise l'abscisse de $\overrightarrow{AB}$ par son ordonnée, puis l'ordonnée de $\overrightarrow{CD}$ par son abscisse. Elle trouve deux nombres différents et conclut : « non colinéaires ». Explique son erreur.

(c) Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, en le vérifiant. Précise leur sens et lequel est le plus long.

(d) Calcule les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$. Ce vecteur est-il colinéaire à $\overrightarrow{AB}$? Justifie.

(e) Le trésor est au point T tel que $\overrightarrow{AT} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AT}$, dis s'il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, puis donne les coordonnées de T.

3. *Déterminant et critère de colinéarité*

À retenir : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$: on met les négatifs entre parenthèses. Nul $\iff$ colinéaires, pas égaux. $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$ et $\det(k\vec{u}, \vec{v}) = k\det(\vec{u}, \vec{v})$. Ex. : $(2\,;-1)$, $(3\,;4)$: $2 \times 4 - (-1) \times 3 = 11$.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : calculer un déterminant** — Dans une base orthonormée, calcule $\det(\vec{u},\vec{v})$, puis dis si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

(a) $\vec{u}\,(3\,;\,5)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,-4)$

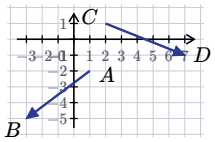
(b) $\vec{u}\,(-8\,;\,6)$ et $\vec{v}\,(12\,;\,-9)$

(c) $\vec{u}\,(0\,;\,7)$ et $\vec{v}\,(-3\,;\,2)$

(d) $\vec{u}\,(2{,}5\,;\,-1{,}5)$ et $\vec{v}\,(-5\,;\,3)$

(e) $\vec{u}\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{3}{5}\right)$

(f) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ avec $A(1\,;\,-2)$, $B(-3\,;\,-5)$, $C(2\,;\,1)$ et $D(7\,;\,-1)$.



Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : les règles du déterminant** — Dans une base orthonormée, on sait que $\det(\vec{u},\vec{v})=-6$. Sans connaître les coordonnées, réponds.

(a) Calcule $\det(\vec{v},\vec{u})$.

(b) Calcule $\det(4\vec{u},\vec{v})$.

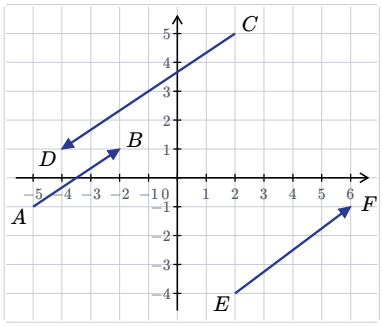
(c) Ilyès écrit : « $\det\left(\frac{1}{2}\vec{u},\frac{1}{2}\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\times(-6)=-3$. » Trouve son erreur et corrige.

(d) Calcule $\det(-2\vec{u},3\vec{v})$.

(e) Calcule $\det(\vec{u},\vec{u})$ avec $\vec{u}\,(x\,;\,y)$.

(f) Inès dit : « $\det(\vec{v},\vec{u})$ n'a pas le même signe, donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont peut-être colinéaires. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 19 ★★☆ **Lire, calculer, comparer les sens** — Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a placé les points A, B, C, D, E et F.



(a) Lis sur le quadrillage les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

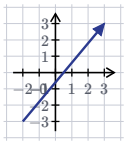
(b) Calcule $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$. Les vecteurs sont-ils colinéaires ? Si oui, donne leur coefficient de colinéarité et précise leur sens.

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ semblent parallèles. Sont-ils colinéaires ? Justifie par un calcul.

(d) À l'aide des questions 2 et 3, déduis $\det(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EF})$ sans calcul de coordonnées, puis vérifie par le calcul.

Ex. 20 ★★☆ **Trouver le réel m** — Dans une base orthonormée, trouve toutes les valeurs du réel m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il peut y avoir une seule valeur, aucune ou toutes.

(a) $\vec{u}\,(m\,;\,-3)$ et le vecteur $\vec{v}\,(5\,;\,6)$ représenté ci-dessous. Contrôle ton résultat avec un coefficient de colinéarité.



(b) $\vec{u}\,(2\,;\,m+1)$ et $\vec{v}\,(-3\,;\,4)$

(c) $\vec{u}\,(m\,;\,2m)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,5)$

(d) $\vec{u}\,(m+2\,;\,4)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,4)$

(e) $\vec{u}\,(2m\,;\,-6)$ et $\vec{v}\,(m\,;\,-3)$

Ex. 21 ★★☆ **Python : une fonction det** — Ben veut tester la colinéarité de $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ à coordonnées entières (xp et yp désignent x' et y').

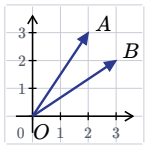
```
def det(x, y, xp, yp):
    return ...

def colineaires(x, y, xp, yp):
    return det(x, y, xp, yp) == 0
```

(a) Complète la ligne 2. Pourquoi le test « == 0 » est-il fiable ici ?

(b) Qu'affichent print(det(-3, 4, 6, -8)) et print(colineaires(-3, 4, 6, -8)) ?

(c) Noé écrit return x * xp - y * yp. Qu'affiche alors colineaires(2, 3, 3, 2) pour $\overrightarrow{OA}\,(2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{OB}\,(3\,;\,2)$? Corrige sa conclusion.



(d) Lina dit : « $\det(2, -3, 6, -9)$ vaut 0, donc $(2\,;\,-3)$ et $(6\,;\,-9)$ sont égaux. » Corrige-la.

Ex. 22 ★★★ **Compléter la démonstration du critère** — Dans une base orthonormée, soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs non nuls. On veut démontrer : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{u},\vec{v})=0$.

(a) On suppose $\vec{v}=k\vec{u}$. Écris x' et y' en fonction de k, x, y, puis complète : $xy'-yx'=x\times\ldots-y\times\ldots=\ldots$

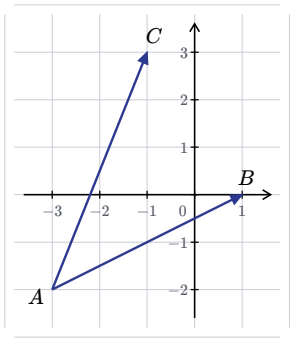
(b) Réciproque, cas $x\neq 0$: on suppose $xy'=yx'$ et on pose $k=\frac{x'}{x}$. Montre que $x'=kx$ et $y'=ky$. Conclus.

(c) Cas $x=0$: explique pourquoi $y\neq 0$, déduis de $xy'=yx'$ que $x'=0$, puis trouve un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

(d) Applique le cas $x=0$ à $\vec{u}\,(0\,;\,-4)$ et $\vec{v}\left(0\,;\,\frac{5}{2}\right)$: calcule le déterminant, puis le coefficient k, et précise le sens.

(e) La démonstration suppose les vecteurs non nuls. Calcule $\det(\vec{0},\vec{w})$ avec $\vec{w}\,(3\,;\,-7)$. Le vecteur nul est-il colinéaire à $\vec{w}$? Justifie.

Ex. 23 ★★★ **Un vecteur défini par une relation** — Dans le repère orthonormé ci-dessous, on donne $A(-3\,;\,-2)$, $B(1\,;\,0)$ et $C(-1\,;\,3)$. Le point M est défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. On donne aussi $\vec{u}\ \left(-9\,;\,\frac{3}{2}\right)$.



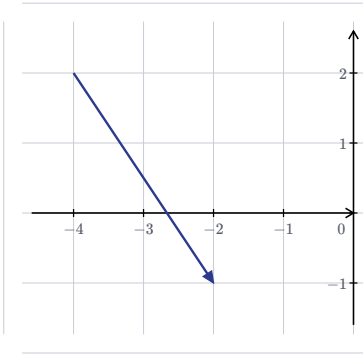
(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, puis celles de $\overrightarrow{AM}$. Déduis-en les coordonnées de M.

(b) Théo écrit : « $6 \times (-9) - (-1) \times \frac{3}{2} \neq 0$, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. » Trouve son erreur et corrige, en précisant le sens.

(c) Les points C, B et M sont-ils alignés ? Justifie par un déterminant, puis retrouve-le sans coordonnées avec la relation de Chasles.

(d) Calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Sans recalculer de coordonnées, déduis-en $\det(\overrightarrow{AC}, -2\overrightarrow{AB})$.

Ex. 24 ★★★ **Le couloir du jeu vidéo** — Zoé programme un jeu dans un repère orthonormé. Un couloir suit la direction du vecteur $\vec{c}$ représenté ci-dessous. Un déplacement est autorisé s'il est colinéaire à $\vec{c}$. Pour chaque déplacement proposé, m désigne un réel.



(a) Lis sur le quadrillage les coordonnées du vecteur $\vec{c}$.

(b) Déplacement $\vec{d_1}\ (m\,;\,6)$: trouve m pour qu'il soit autorisé. Donne le coefficient k tel que $\vec{d_1} = k\vec{c}$ et précise le sens.

(c) Le joueur enchaîne $\vec{d_1}$ (avec ce m) puis $\vec{e}\,(5{,}5\,;\,-7{,}5)$. Le déplacement total est-il autorisé ? Justifie par un calcul.

(d) Déplacement $\vec{d_3}\,(2m\,;\,-3m)$: pour quelles valeurs de m est-il autorisé ? Discute selon m le sens de $\vec{d_3}$ par rapport à $\vec{c}$.

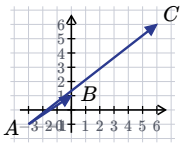
4. *Alignement de trois points*

À retenir : A, B, C alignés $\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ (même origine A). Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$: $0 < k < 1$, C entre A et B ; $k > 1$, B entre A et C ; $k < 0$, A entre B et C. Une figure ne prouve rien ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ colinéaires donne seulement $(AB) \parallel (CD)$.

Ex. 25 ★☆☆ **Alignés ou non : le déterminant tranche** — Pour chaque cas, calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ puis conclus par une phrase : les points A, B et C sont-ils alignés ?

(a) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{BC}\,(4\,;\,6)$: utilise la relation de Chasles pour obtenir $\overrightarrow{AC}$.

(b) Lis sur le quadrillage les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, puis calcule le déterminant.



(c) $A(-2\,;\,3)$, $B(0\,;\,-1)$ et $C(3\,;\,-6)$.

(d) $A(1{,}5\,;\,-1)$, $B(2{,}5\,;\,0{,}5)$ et $C(4{,}5\,;\,3{,}5)$.

(e) $A\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $B\left(1\,;\,\frac{4}{3}\right)$ et $C(2\,;\,3)$.

(f) $A(-3\,;\,2)$, $B(1\,;\,2)$ et $C(6\,;\,2{,}5)$.

(g) On sait seulement que $\overrightarrow{AB}\,(-4\,;\,6)$ et $\overrightarrow{AC}\,(6\,;\,-9)$.

Ex. 26 ★☆☆ **Qui est entre les deux autres ?** — Dans chaque cas, les points A, B et C sont alignés. Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, puis dis lequel des trois points est entre les deux autres.

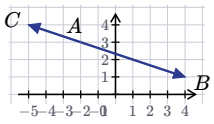
(a) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-6)$ et $\overrightarrow{AC}\,(5\,;\,-15)$.

(b) $\overrightarrow{AB}\,(-6\,;\,9)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;\,3)$.

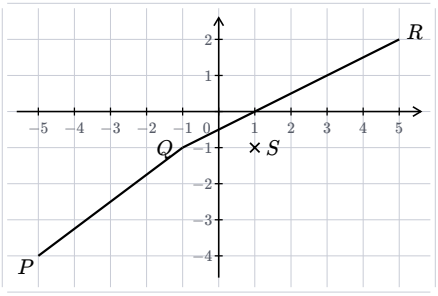
(c) $A(2\,;\,-1)$, $B(6\,;\,0)$ et $C(-6\,;\,-3)$.

(d) $\overrightarrow{AB}\,(0{,}8\,;\,-1{,}2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(0{,}6\,;\,-0{,}9)$.

(e) Lis sur le quadrillage les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.



Ex. 27 ★★☆ **Les poteaux d'Inès** — Dans son jardin, Inès plante des poteaux en $P(-5\,;\,-4)$, $Q(-1\,;\,-1)$, $R(5\,;\,2)$ et $S(1\,;\,-1)$ (unité : le mètre). Sur le plan, Sami trouve que P, Q et R semblent alignés.



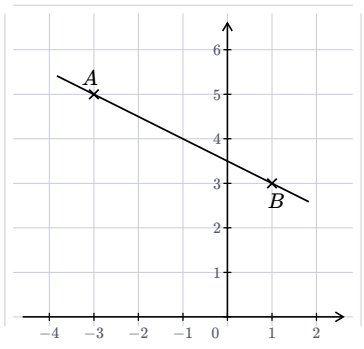
(a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.

(b) Calcule $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$. Sami a-t-il raison ? Conclus par une phrase.

(c) Nora calcule $\overrightarrow{RS}$ et $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS})$, trouve 0 et conclut que P, Q, R, S sont alignés. Refais son calcul, puis explique son erreur.

(d) Que prouve vraiment le calcul de Nora ? Précise la position des droites (PQ) et (RS) en justifiant.

Ex. 28 ★★☆ **Le rayon laser** — Dans un repère orthonormé, un laser placé en $A(-3\,;\,5)$ envoie un rayon qui passe par $B(1\,;\,3)$. L'axe des abscisses représente le sol et l'axe des ordonnées un mur.



(a) Le rayon touche le sol en $M(x\,;\,0)$. Donne les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AM}$, en fonction de x.

(b) Traduis « $M \in (AB)$ » par une équation en x, puis donne les coordonnées de M.

(c) La droite (AB) coupe le mur en $N(0\,;\,y)$. Trouve y par le même critère.

(d) Un miroir est placé en $C(-7\,;\,7)$. Le point C est-il sur (AB) ? Le rayon, qui part de A et passe par B, l'atteint-il ? Justifie.

Ex. 29 ★★☆ **Un programme qui teste l'alignement** — La fonction ci-dessous doit renvoyer True si les points $A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$ et $C(x_C\,;\,y_C)$ sont alignés, False sinon.

```
def alignes(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
    ux = xB - xA
    uy = yB - yA
    vx = ...
    vy = ...
    d = ...
    return d == 0
print(alignes(-3, 1, 2, 3, 7, 5))
print(alignes(0, 4, 2, 1, 5, -3))
```

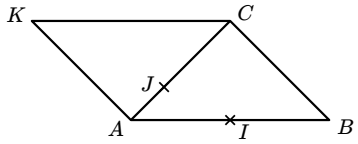
(a) Complète les trois lignes contenant « … ».

(b) Qu'affiche ce programme ? Justifie par le calcul des deux déterminants.

(c) Lucas écrit d = ux * vx - uy * vy. Qu'afficherait alors la première ligne ? Explique son erreur.

(d) Pourquoi le test d == 0 est-il fiable ici ? Que faut-il écrire avec des coordonnées décimales ?

Ex. 30 ★★★ **Un alignement sans repère** — ABC est un triangle. I est le milieu de $[AB]$, J est le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et K est le point tel que $ABCK$ est un parallélogramme. On ne dispose d'aucun repère : on travaille avec la relation de Chasles.



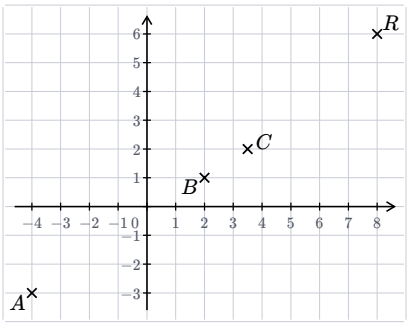
(a) Justifie que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC}$, puis exprime $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles.

(b) Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(c) Exprime $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les points I, J et K sont-ils alignés ? Justifie en citant le critère.

(d) Lequel des trois points I, J, K est situé entre les deux autres ? Justifie.

Ex. 31 ★★★ **La carte au trésor de Noé** — Sur la carte au trésor de Noé (repère orthonormé), le puits est en $A(-4\,;\,-3)$, l'arbre en $B(2\,;\,1)$, un rocher en $R(8\,;\,6)$ et une cabane en $C(3{,}5\,;\,2)$. La légende dit que le trésor est sur la droite (AB).



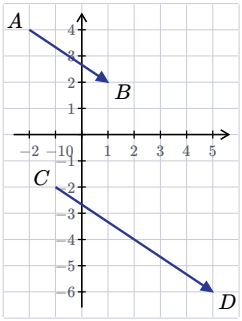
(a) Sur la carte, Noé trouve que A, B et R semblent alignés. Calcule $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR}$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AR})$, puis conclus par une phrase.

(b) Le trésor T est aussi sur l'axe des ordonnées : $T(0\,;\,y)$. Écris la condition d'alignement de A, B, T et trouve y.

(c) Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{AT} = k\overrightarrow{AB}$, contrôle-le, puis dis si le trésor est entre le puits et l'arbre.

(d) La cabane C est-elle sur la droite (AB) ? Justifie par un calcul. Si oui, dis lequel des points A, B, C est entre les deux autres.

Ex. 32 ★★★ **Deux copies à corriger** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2\,;\,4)$, $B(1\,;\,2)$, $C(-1\,;\,-2)$ et $D(5\,;\,-6)$. Léa a trouvé que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et en conclut que les quatre points A, B, C, D sont alignés.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et leur déterminant. Que prouve exactement le résultat pour les droites (AB) et (CD) ?

(b) Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifie par un calcul, puis dis si Léa a raison et précise la position des droites (AB) et (CD).

(c) Pour $E(7\,;\,-2)$, Hugo écrit : $\overrightarrow{AE}\,(7-2\,;\,-2-4)$, soit $(5\,;\,-6)$, puis $\det = 3\times(-6)-(-2)\times 5 = -8 \neq 0$, donc non alignés. Trouve son erreur et corrige.

(d) Trouve le réel m tel que $F(m\,;\,8)$ soit sur la droite (AB), puis précise lequel des points A, B, F est entre les deux autres.

5. *Parallélisme de deux droites*

À retenir : $(AB) \parallel (CD) \iff \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0$; confondues si en plus $C \in (AB)$. Ex. : $(2\,;-1)$ et $(-6\,;3)$: $6-6=0$. Trapèze : une paire de côtés opposés parallèles ; parallélogramme $ABCD \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ex. 33 ★★★ **Parallèles ou non ?** — Automatismes. Dans chaque cas, calcule un vecteur pour chaque droite, puis leur déterminant. Les droites sont-elles parallèles ? Justifie.

(a) $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$, $C(-2\,;0)$, $D(4\,;2)$: (AB) et (CD).

(b) $E(-1\,;3)$, $F(2\,;-1{,}5)$, $G(0\,;0)$, $H(-2\,;3{,}5)$: (EF) et (GH).

(c) $K\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$, $L(2\,;0)$, $M(-3\,;2)$, $N(0\,;0)$: (KL) et (MN).

(d) $P(-2\,;-3)$, $Q(1\,;3)$, $R(0\,;4)$, $S(2\,;9)$: (PQ) et (RS).

(e) $U(3\,;-1)$, $V(3\,;5)$, $W(-2\,;0)$, $Z(-2\,;-4)$: (UV) et (WZ).

(f) $\overrightarrow{AB}\,(4\,;-6)$, $C(1\,;2)$ et $D(-1\,;5)$: (AB) et (CD).

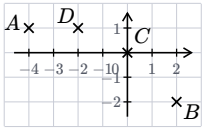
Ex. 34 ★★★ **Strictement parallèles ou confondues ?** — Automatismes. Dans chaque cas, $(AB) \parallel (CD)$ (admis). Calcule $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ pour savoir si C est sur (AB), puis conclus : droites confondues ou strictement parallèles ?

(a) $A(0\,;1)$, $B(2\,;2)$, $C(4\,;3)$, $D(8\,;5)$.

(b) $A(-1\,;-2)$, $B(1\,;4)$, $C(0\,;3)$, $D(2\,;9)$.

(c) $A(3\,;0)$, $B(3\,;-2)$, $C(3\,;5)$, $D(3\,;7)$.

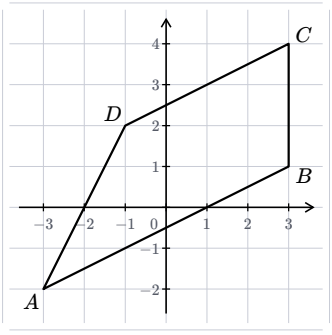
(d) $A(-4\,;1)$, $B(2\,;-2)$, $C(0\,;0)$, $D(-2\,;1)$.



(e) $A\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$, $B\left(\frac{3}{2}\,;2\right)$, $C(0\,;-1)$, $D(2\,;3)$.

(f) $A(-1\,;0{,}5)$, $B(1\,;1{,}5)$, $C(3\,;1{,}5)$, $D(5\,;2{,}5)$.

Ex. 35 ★★★ **Trapèze ou parallélogramme ?** — On donne $A(-3\,;-2)$, $B(3\,;1)$, $C(3\,;4)$ et $D(-1\,;2)$.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ? Justifie.

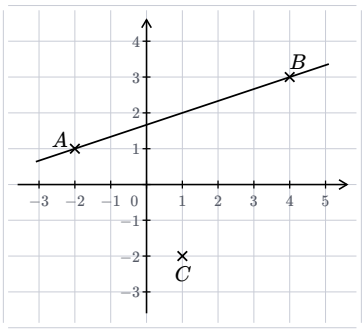
Ex. 35 **(suite)**

(b) Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifie par un calcul.

(c) Déduis-en la nature du quadrilatère $ABCD$. Est-ce un parallélogramme ?

(d) Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{DC} = k\,\overrightarrow{AB}$. Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ ont-ils la même longueur ?

Ex. 36 ★★☆ **Une allée parallèle dans le jardin** — Sur le plan du jardin de Sacha (unité : le mètre), une allée suit la droite (AB) avec $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;3)$. Le robinet est en $C(1\,;-2)$. Le mur est l'axe des abscisses, la haie l'axe des ordonnées.



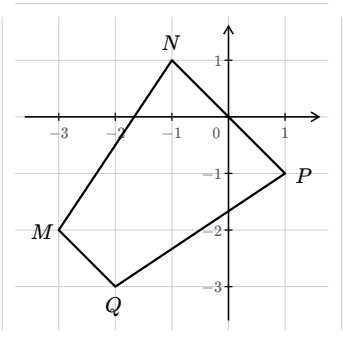
(a) Sacha veut une deuxième allée passant par C, parallèle à (AB), qui touche le mur en $D(x\,;0)$. Trouve x.

(b) Les deux allées sont-elles confondues ou strictement parallèles ? Justifie par un calcul.

(c) Trouve le point E de la haie (axe des ordonnées) tel que $(CE) \parallel (AB)$.

(d) Le massif $ABDC$ est-il un parallélogramme ? Justifie par une égalité de vecteurs.

Ex. 37 ★★☆ **Deux erreurs à corriger** — On donne $M(-3\,;-2)$, $N(-1\,;1)$, $P(1\,;-1)$ et $Q(-2\,;-3)$. Noé et Lucas étudient le quadrilatère $MNPQ$.



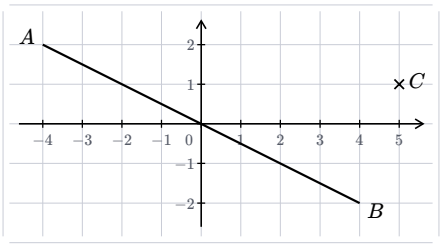
(a) Noé écrit : « $\overrightarrow{MN}\,(2\,;3)$, $\overrightarrow{QP}\,(3\,;2)$ et $2\times 3 - 3\times 2 = 0$, donc $(MN) \parallel (QP)$. » Trouve son erreur et conclus correctement.

(b) Lucas écrit : « $\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}) = -10 \neq 0$, donc $MNPQ$ n'est pas un trapèze. » Pourquoi sa méthode est-elle fausse ?

Ex. 37 **(suite)**

(c) Lucas a-t-il raison de dire que $MNPQ$ n'est pas un trapèze ? Justifie par un calcul et donne la nature de $MNPQ$.

Ex. 38 ★★★ **Le quatrième sommet** — On donne $A(-4\,;\,2)$, $B(4\,;\,-2)$ et $C(5\,;\,1)$. Ben cherche un point $D(x\,;\,4)$ tel que $(CD) \parallel (AB)$.



(a) Calcule $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{CD}$ en fonction de x. Trouve x pour que $(CD) \parallel (AB)$.

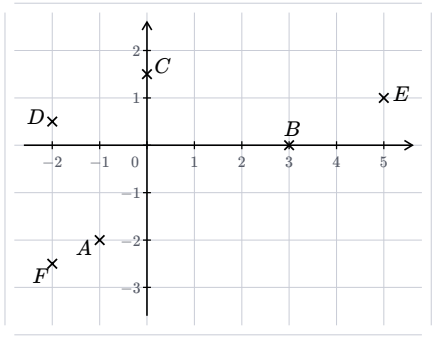
(b) Avec ce point D, quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifie avec les deux paires de côtés opposés.

(c) Ali affirme : « $(AB) \parallel (DC)$, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. » Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$, puis corrige Ali.

(d) Calcule les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.

(e) Les points C, D et E sont-ils alignés ? Justifie par un calcul.

Ex. 39 ★★★ **Trois rayons laser** — Dans le jeu vidéo de Maé, trois rayons laser suivent les droites (AB), (CD) et (EF), avec $A(-1\,;\,-2)$, $B(3\,;\,0)$, $C(0\,;\,1{,}5)$, $D(-2\,;\,0{,}5)$, $E(5\,;\,1)$ et $F(-2\,;\,-2{,}5)$.



(a) Pour savoir si $(AB) \parallel (CD)$, Maé calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 12$ et conclut : « pas parallèles ». Explique son erreur, puis fais le bon calcul.

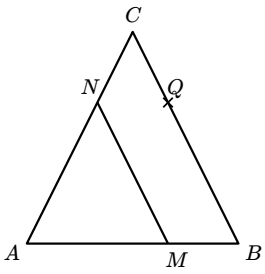
(b) Le calcul de Maé sert quand même. Que permet-il de conclure sur les droites (AB) et (CD) ? Justifie.

(c) Les droites (AB) et (EF) sont-elles parallèles ? Si oui, sont-elles strictement parallèles ou confondues ? Justifie par des calculs.

Ex. 39 **(suite)**

(d) Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{AB}$. Vrai ou faux : « Comme $\overrightarrow{EF} \neq \overrightarrow{AB}$, ces deux rayons ne peuvent pas être confondus » ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Un trapèze et un parallélogramme sans repère** — ABC est un triangle. Les points M, N et Q sont définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On travaille sans repère, avec la relation de Chasles.



(a) Écris $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, puis exprime $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Que peux-tu en déduire pour les droites (MN) et (BC) ?

(b) Jade affirme : « $(MN) \parallel (BC)$, donc $MNCB$ est un parallélogramme. » Explique son erreur, puis donne la nature de $MNCB$ en justifiant.

(c) Démontre que $MNQB$ est un parallélogramme.

(d) Déduis de la question 3 l'expression de $\overrightarrow{NQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Les droites (NQ) et (AB) sont-elles strictement parallèles ou confondues ? Justifie.

6. *Décomposer un vecteur sur deux vecteurs non colinéaires*

À retenir : Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, tout $\vec{w}$ s'écrit de façon unique $a\vec{u} + b\vec{v}$, de coordonnées $(ax + bx' \,;\, ay + by')$ si $\vec{u}\,(x\,;\,y)$, $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$: on résout coordonnée par coordonnée. Ex. : $\vec{u}\,(1\,;\,0)$, $\vec{v}\,(4\,;\,1)$ donnent $2\vec{u} - \vec{v}\,(-2\,;\,-1)$. Sans repère : relation de Chasles.

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : combinaisons avec des coordonnées** — Dans une base orthonormée, on donne $\vec{u}\,(2\,;\,-3)$ et $\vec{v}\,(-1\,;\,4)$.

(a) Calcule les coordonnées de $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

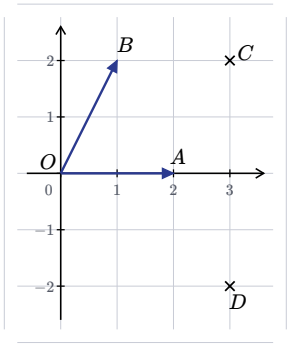
(b) Calcule les coordonnées de $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

(c) Trouve le réel b tel que le vecteur $2\vec{u} + b\vec{v}$ ait pour abscisse 7.

(d) Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

(e) Déduis-en les réels a et b tels que $(a-1)\vec{u} + (b+2)\vec{v} = \vec{0}$.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : lire une combinaison sur le quadrillage** — Dans le repère orthonormé ci-dessous, on note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Lis sur la figure les coordonnées dont tu as besoin.



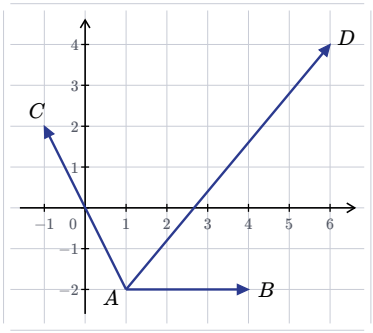
(a) Lis les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, puis calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

(b) Écris $\overrightarrow{OC}$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$.

(c) Écris $\overrightarrow{CD}$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$. Attention aux signes.

(d) Donne les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{OE} = -\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$, puis place-le.

Ex. 43 ★★☆ **Décomposer un vecteur et contrôler** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\,;\,-2)$, $B(4\,;\,-2)$, $C(-1\,;\,2)$ et $D(6\,;\,4)$.



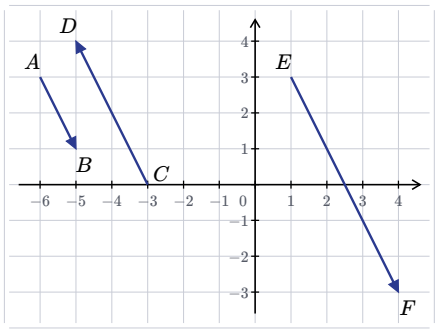
(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ? Justifie par un calcul.

(c) Détermine les réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Commence par l'ordonnée.

(d) Contrôle ton résultat en recalculant les coordonnées de $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

Ex. 44 ★★☆ **L'erreur de Nadia : une écriture vraiment unique ?** — On donne $A(-6\,;\,3)$, $B(-5\,;\,1)$, $C(-3\,;\,0)$, $D(-5\,;\,4)$, $E(1\,;\,3)$, $F(4\,;\,-3)$, et on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$. Nadia écrit : « $\vec{w} = -\vec{u} - 2\vec{v}$, et c'est la seule écriture de $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. »



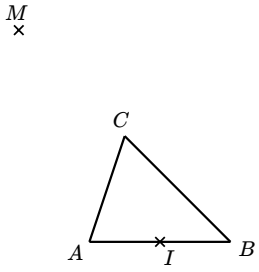
(a) Calcule les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

(b) Vérifie avec les coordonnées l'égalité écrite par Nadia.

(c) Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Que peux-tu en conclure pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

(d) Trouve le réel a tel que $\vec{w} = a\vec{u}$, puis explique l'erreur de Nadia.

Ex. 45 ★★☆ **Dans un triangle, sans repère** — ABC est un triangle, I est le milieu de $[AB]$ et M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.



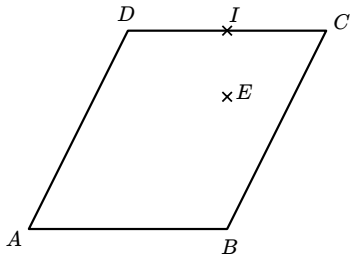
(a) Exprime $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(b) Exprime $\overrightarrow{IM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(c) Lucas écrit : « $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ ». Trouve son erreur et corrige-la.

(d) Le point P vérifie $\overrightarrow{AP} = (m-1)\overrightarrow{AB} + (m+2)\overrightarrow{AC}$. Trouve le réel m pour que P soit confondu avec M.

Ex. 46 ★★★ **Dans un parallélogramme : un alignement démontré sans repère** — $ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu de $[CD]$, J est le milieu de $[BC]$ et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On travaille sans repère avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.



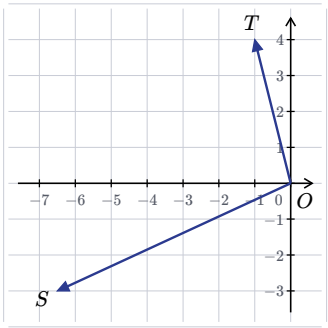
(a) Justifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Exprime ensuite $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

(b) Avec la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

(c) Démontre que les points B, E et I sont alignés. Précise la position de E sur le segment $[BI]$.

(d) Exprime $\overrightarrow{DJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Les droites (DJ) et (BI) sont-elles parallèles ? Justifie.

Ex. 47 ★★★ **Les deux commandes d'un drone** — Dans un repère orthonormé, un drone part de $O(0\,;\,0)$. La commande U le déplace de $\vec{u}\,(3\,;\,2)$, la commande V de $\vec{v}\,(-2\,;\,0)$. Dosées, elles le déplacent de $a\vec{u} + b\vec{v}$ (a, b réels) ; un coefficient négatif signifie une marche arrière. Les cibles sont $T(-1\,;\,4)$ et $S(-6{,}5\,;\,-3)$.



(a) Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Qu'en déduis-tu pour l'écriture d'un déplacement sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$?

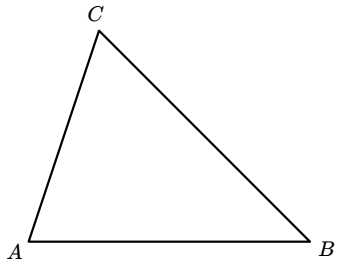
(b) Trouve a et b tels que $\overrightarrow{OT} = a\vec{u} + b\vec{v}$, puis contrôle ton résultat en recalculant les coordonnées.

(c) Décompose $\overrightarrow{OS}$ sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour atteindre S, quelle commande est jouée en marche arrière ?

(d) Le point $P(m\,;\,5)$ est atteint en utilisant seulement la commande U. Trouve la valeur de m.

(e) Léo propose de remplacer la commande V par un déplacement de $\vec{v}'\,(6\,;\,4)$. Avec U et cette nouvelle commande, le drone peut-il encore atteindre T ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Identifier les coefficients : preuve et applications** — $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires. ABC est un triangle et m est un réel. On définit les points M, N et P par $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = (m+1)\overrightarrow{AB} + (2m-5)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP} = (m-1)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.



(a) On suppose que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$. Démontre que $a = b = 0$ (raisonne par l'absurde en supposant $a \neq 0$).

(b) Déduis-en que si $a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$, alors $a = a'$ et $b = b'$.

(c) Existe-t-il un réel m pour lequel les points M et N sont confondus ? Justifie.

(d) Trouve la valeur de m pour laquelle les droites (AP) et (BC) sont parallèles.

(e) Zoé écrit : « Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v'} = -2\overrightarrow{AB}$, on a $2\vec{u} + \vec{v'} = \vec{0}$, donc la question 1 est fausse. » Explique son erreur.