## 1. Rappels : coordonnées d'un vecteur

**Ex. 1** ★☆☆ **Automatismes : extrémité moins origine**

(a) $\overrightarrow{AB}(2-(-3)\,;\,-1-2)$, donc $\overrightarrow{AB}(5\,;\,-3)$.

(b) $\overrightarrow{BA}(-3-2\,;\,2-(-1))$, donc $\overrightarrow{BA}(-5\,;\,3)$ : on retrouve bien $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

(c) $\overrightarrow{DC}(4-(-1)\,;\,3-(-2))$, donc $\overrightarrow{DC}(5\,;\,5)$.

(d) $\overrightarrow{DB}(2-(-1)\,;\,-1-(-2))$, donc $\overrightarrow{DB}(3\,;\,1)$.

(e) $\overrightarrow{EF}(-2-1{,}5\,;\,3{,}5-(-0{,}5))$, donc $\overrightarrow{EF}(-3{,}5\,;\,4)$.

(f) $\overrightarrow{GH}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{4}-(-2)\right)$, donc $\overrightarrow{GH}\left(-\frac{5}{6}\,;\,\frac{9}{4}\right)$.

**Ex. 2** ★☆☆ **Automatismes : somme, produit par un réel**

(a) On multiplie les deux coordonnées : $3\vec{u}\,(3\times(-2)\,;\,3\times5)$, donc $3\vec{u}\,(-6\,;\,15)$.

(b) $\vec{u}+\vec{v}\,(-2+3\,;\,5+(-4))$, donc $\vec{u}+\vec{v}\,(1\,;\,1)$.

(c) $\vec{u}-\vec{v}\,(-2-3\,;\,5-(-4))$, donc $\vec{u}-\vec{v}\,(-5\,;\,9)$.

(d) $-2\vec{v}\,(-6\,;\,8)$, donc $-2\vec{v}+\vec{w}\,(-6+0\,;\,8+(-1{,}5))$, soit $(-6\,;\,6{,}5)$.

(e) $\frac{3}{4}\vec{v}\left(\frac{3}{4}\times3\,;\,\frac{3}{4}\times(-4)\right)$, donc $\frac{3}{4}\vec{v}\left(\frac{9}{4}\,;\,-3\right)$.

(f) $\vec{t}=\vec{v}-\vec{u}$, donc $\vec{t}\,(3-(-2)\,;\,-4-5)$, soit $\vec{t}\,(5\,;\,-9)$. Contrôle : $5+(-2)=3$ et $-9+5=-4$.

**Ex. 3** ★☆☆ **Lire des vecteurs sur un quadrillage**

(a) De A à B : 3 carreaux vers la droite, 2 vers le haut, donc $\overrightarrow{AB}(3\,;\,2)$.

(b) De C à D : 2 carreaux vers la droite, 5 vers le bas, donc $\overrightarrow{CD}(2\,;\,-5)$.

(c) De E à F : 4 carreaux vers la gauche, 3 vers le bas, donc $\overrightarrow{EF}(-4\,;\,-3)$.

(d) $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{BA}(-3\,;\,-2)$.

(e) Léa est partie de D pour aller à C : elle a lu $\overrightarrow{DC}(-2\,;\,5)$, l'opposé de $\overrightarrow{CD}$. On lit de l'origine C vers la pointe D : $\overrightarrow{CD}(2\,;\,-5)$.

**Ex. 4** ★★☆ **Trouver un point défini par un vecteur**

(a) $x_M=x_A+5=-2+5=3$ et $y_M=y_A+(-2)=-1-2=-3$.
Donc $M(3\,;\,-3)$ (et non $(5\,;\,-2)$ : ce sont les coordonnées du vecteur).

**Ex. 4** (suite)

(b) Je pose $N(x\,;\,y)$ : $\overrightarrow{NB}(1-x\,;\,3-y)$.
Donc $1-x=5$ et $3-y=-2$, soit $x=-4$ et $y=5$ : $N(-4\,;\,5)$.

(c) $\overrightarrow{AB}(3\,;\,4)$ et $\overrightarrow{AC}(6\,;\,-1)$, donc $\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}(6-6\,;\,-1-8)$, soit $(0\,;\,-9)$. On part de B : $x_P=1+0=1$ et $y_P=3+(-9)=-6$, donc $P(1\,;\,-6)$.

(d) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(-1{,}5\,;\,-2)$.
Donc $x_Q=4-1{,}5=2{,}5$ et $y_Q=-2-2=-4$ : $Q(2{,}5\,;\,-4)$.

**Ex. 5** ★★☆ **Le jardin de Malik : parallélogramme et Chasles**

(a) $\overrightarrow{EF}(2-(-3)\,;\,-3-(-2))$, soit $(5\,;\,-1)$, et $\overrightarrow{FG}(4-2\,;\,1-(-3))$, soit $(2\,;\,4)$.

(b) EFGH est un parallélogramme $\iff\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Je pose $H(x\,;\,y)$ : $\overrightarrow{HG}(4-x\,;\,1-y)$.
Donc $4-x=5$ et $1-y=-1$ : $H(-1\,;\,2)$. Contrôle : $\overrightarrow{EH}(2\,;\,4)$, comme $\overrightarrow{FG}$.

(c) Il faut $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, pas $\overrightarrow{GH}$. Avec $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$, c'est EFHG qui est un parallélogramme : EFGH serait un quadrilatère croisé.

(d) On réordonne : $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EF}$. Contrôle : $\overrightarrow{GF}(-2\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{EG}(7\,;\,3)$, de somme $(5\,;\,-1)$, ce qui donne bien $\overrightarrow{EF}$.

**Ex. 6** ★★★ **Le parallélogramme de Nolan : erreur à corriger**

(a) Extrémité moins origine : $\overrightarrow{AB}(3-(-2)\,;\,1-3)=(5\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{CD}(-1-4\,;\,-1-(-3))=(-5\,;\,2)$.

(b) Faux. La propriété est : ABCD parallélogramme $\iff\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (et non $\overrightarrow{CD}$). On calcule $\overrightarrow{DC}(4-(-1)\,;\,-3-(-1))=(5\,;\,-2)$.
Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ : ABCD est un parallélogramme. Nolan a comparé deux vecteurs de sens contraires.

(c) $\overrightarrow{AD}(-1-(-2)\,;\,-1-3)=(1\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{BC}(4-3\,;\,-3-1)=(1\,;\,-4)$. On a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, ce qui confirme que ABCD est un parallélogramme.

**Ex. 6** **(suite)**

(d) Avec la relation de Chasles, l'extrémité du premier vecteur est l'origine du second : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Par le calcul, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\,(5+1\,;\,-2+(-4)) = (6\,;\,-6)$. Directement, $\overrightarrow{AC}\,(4-(-2)\,;\,-3-3) = (6\,;\,-6)$. Les deux résultats sont identiques.

**Ex. 7** ★★★ **Des points définis par des relations vectorielles**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(-3-1\,;\,1-(-2)) = (-4\,;\,3)$ et $\overrightarrow{AC}\,(2-1\,;\,4-(-2)) = (1\,;\,6)$.

(b) Saïd n'a multiplié que l'abscisse : il faut multiplier les deux coordonnées. $2\overrightarrow{AB}\,(2\times(-4)\,;\,2\times 3) = (-8\,;\,6)$. Donc $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\,(-8-1\,;\,6-6) = (-9\,;\,0)$.

(c) $\overrightarrow{AM}\,(-9\,;\,0)$, donc $x_M = 1+(-9) = -8$ et $y_M = -2+0 = -2$ : $M(-8\,;\,-2)$. Contrôle : $\overrightarrow{AM}\,(-8-1\,;\,-2-(-2)) = (-9\,;\,0)$.

(d) On part de $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et on retranche $\overrightarrow{AC}$ des deux côtés : $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.
Donc $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CB}$.

(e) $\overrightarrow{CB}\,(-3-2\,;\,1-4) = (-5\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{CM}\,(-8-2\,;\,-2-4) = (-10\,;\,-6)$ : on a bien $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CB}$. De plus, $\overrightarrow{BM}\,(-8-(-3)\,;\,-2-1) = (-5\,;\,-3)$, donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BM}$ : B est le milieu du segment [CM].

**Ex. 8** ★★★ **La carte au trésor de Jade**

(a) De E à F : 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas, donc $\vec{u}\,(2\,;\,-1)$. De G à H : 1 carreau vers la gauche et 3 vers le haut, donc $\vec{v}\,(-1\,;\,3)$.

(b) $(6\,;\,2)$ sont les coordonnées d'un déplacement, pas celles d'un point. Il faut les ajouter à celles de P : $x_R = -4+6 = 2$ et $y_R = 1+2 = 3$, donc $R(2\,;\,3)$.

(c) $2\vec{u}\,(4\,;\,-2)$ : on multiplie les deux coordonnées.
Donc $2\vec{u} - \vec{v}\,(4-(-1)\,;\,-2-3) = (5\,;\,-5)$.

(d) $\overrightarrow{RT}\,(5\,;\,-5)$, donc $x_T = 2+5 = 7$ et $y_T = 3+(-5) = -2$ : le trésor est en $T(7\,;\,-2)$.

(e) Avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT}\,(6+5\,;\,2+(-5)) = (11\,;\,-3)$. À partir des points, $\overrightarrow{PT}\,(7-(-4)\,;\,-2-1) = (11\,;\,-3)$. Les deux calculs donnent le même vecteur, ce qui confirme $T(7\,;\,-2)$.

## 2. *Vecteurs colinéaires*

**Ex. 9** ★☆☆ **Automatismes : trouver le coefficient de colinéarité**

(a) Avec les abscisses : $k = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$. Je vérifie : $\left(-\frac{5}{2}\right)\times(-6) = 15$, c'est bien l'ordonnée de $\vec{v}$.
Donc $\vec{v} = -\frac{5}{2}\vec{u}$ : les vecteurs sont colinéaires, de sens contraires car $k<0$.

(b) Avec les abscisses : $k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Mais $\frac{4}{3}\times 9 = 12 \neq 12{,}5$. Un seul quotient ne prouve rien : les coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

(c) Les abscisses sont nulles, je ne divise pas par 0. Avec les ordonnées : $k = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$. Je vérifie : $-\frac{3}{5}\times 0 = 0$.
Donc $\vec{v} = -\frac{3}{5}\vec{u}$ : colinéaires, de sens contraires.

(d) Avec les abscisses : $k = \frac{-1}{2{,}5} = -0{,}4$. Je vérifie : $(-0{,}4)\times(-1) = 0{,}4$.
Donc $\vec{v} = -0{,}4\,\vec{u}$ : les vecteurs sont bien colinéaires, mais $k<0$, donc ils sont de sens contraires.
L'affirmation est fausse.

(e) Oui : $\vec{0} = 0\times\vec{u}$, car $0\times 7 = 0$ et $0\times(-2) = 0$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

(f) L'abscisse de $\vec{u}$ n'est pas nulle : $0 = 3k$ donne $k = 0$. Mais alors $0\times 0 = 0 \neq 3$. Il n'existe pas de $k$ : les vecteurs ne sont pas colinéaires.

(g) Ici, on cherche $\vec{u} = k\vec{v}$. Avec les abscisses : $k = \frac{2}{3}\div(-2) = -\frac{1}{3}$. Je vérifie : $\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3 = -1$, c'est bien l'ordonnée de $\vec{u}$.
Donc $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}$ : les vecteurs sont colinéaires, de sens contraires.

**Ex. 10** ★☆☆ **Automatismes : lire des vecteurs colinéaires sur un quadrillage**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,1)$ : 3 à droite, 1 en haut. $\overrightarrow{CD}\,(-6\,;\,-2)$ : 6 à gauche, 2 en bas. $\overrightarrow{EF}\,(4{,}5\,;\,1{,}5)$.

(b) Avec les abscisses : $k = \frac{-6}{3} = -2$. Je vérifie : $(-2)\times 1 = -2$.
Donc $\overrightarrow{CD} = -2\,\overrightarrow{AB}$ : même direction, sens contraires, et $\overrightarrow{CD}$ est deux fois plus long.

(c) Avec les abscisses : $k = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$. Je vérifie : $1{,}5\times 1 = 1{,}5$.
Donc $\overrightarrow{EF} = 1{,}5\,\overrightarrow{AB}$ : colinéaires, de même sens.

(d) $\overrightarrow{AD}\,(-2-(-5)\,;\,1-1)$, soit $(3\,;\,0)$. Avec les abscisses : $k = \frac{3}{3} = 1$, mais $1\times 1 = 1 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

**Ex. 10** **(suite)**

(e) Je cherche $k$ tel que $\overrightarrow{EF} = k\,\overrightarrow{CD}$. Avec les abscisses : $k = \frac{4,5}{-6} = -\frac{3}{4}$. Je vérifie : $\left(-\frac{3}{4}\right) \times (-2) = 1,5$.
Donc $\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{4}\,\overrightarrow{CD}$ : comme $k < 0$, les vecteurs sont de sens contraires. L'affirmation est fausse.

**Ex. 11** ★★☆ **Tableau de proportionnalité et réel m**

(a) Le coefficient vient des abscisses : $k = \frac{14}{-4} = -\frac{7}{2}$.
L'ordonnée manquante vaut $-\frac{7}{2} \times 6 = -21$.
Donc $\vec{v}\,(14\,;\,-21)$ et $\vec{v} = -\frac{7}{2}\vec{u}$.

(b) L'ordonnée de $\vec{w}$ est connue : $k = \frac{-4,5}{6} = -\frac{3}{4}$. Alors $m = -\frac{3}{4} \times (-4) = 3$. Pour $m = 3$, $\vec{w} = -\frac{3}{4}\vec{u}$ : les vecteurs sont colinéaires.

(c) Avec les ordonnées : $k = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Il faut $m + 1 = \frac{3}{2} \times (-4) = -6$, donc $m = -7$. Alors $\vec{t}\,(-6\,;\,9) = \frac{3}{2}\vec{u}$.

(d) Si $\vec{s} = k\vec{u}$ : les abscisses donnent $0 = -4k$, donc $k = 0$, puis $m = 0 \times 6 = 0$. Si $\vec{u} = k\vec{s}$ : il faudrait $-4 = k \times 0 = 0$, ce qui est impossible. Une seule valeur convient, $m = 0$ : $\vec{s}$ est alors le vecteur nul, colinéaire à tout vecteur.

**Ex. 12** ★★☆ **Deux élèves se trompent**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(-1-(-3)\,;\,4-(-1))$, soit $(2\,;\,5)$.
$\overrightarrow{CD}\,(6-1\,;\,0-(-2))$, soit $(5\,;\,2)$. $\overrightarrow{EF}\,(1-5\,;\,-6-4)$, soit $(-4\,;\,-10)$.

(b) Léa compare $\frac{x}{y}$ d'un vecteur avec le rapport inverse $\frac{y'}{x'}$ de l'autre. Ces rapports n'ont rien à voir avec la colinéarité. Bonne méthode : avec les abscisses, $k = \frac{5}{2}$, puis $\frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2} \neq 2$. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

(c) Faux. Avec les abscisses : $k = \frac{-4}{2} = -2$. Je vérifie : $(-2) \times 5 = -10$.
Donc $\overrightarrow{EF} = -2\,\overrightarrow{AB}$ : les vecteurs sont colinéaires. Colinéaires ne veut pas dire égaux : ici, ils ont la même direction, des sens contraires et $\overrightarrow{EF}$ est deux fois plus long.

**Ex. 13** ★★☆ **Trajectoire d'un drone**

(a) $2\vec{u}\,(6\,;\,-2)$ et $3\vec{v}\,(-3\,;\,6)$.
Donc $\vec{w}\,(6+(-3)\,;\,-2+6)$, soit $\vec{w}\,(3\,;\,4)$.

(b) Avec les abscisses : $k = \frac{-4,5}{3} = -1,5$. Je vérifie : $(-1,5) \times (-1) = 1,5$.
Donc $\vec{t} = -1,5\,\vec{u}$ : colinéaires, de sens contraires. Le drone repart dans la même direction, mais en sens inverse.

**Ex. 13** **(suite)**

(c) $\vec{s}\,(3-(-1)\,;\,-1-2)$, soit $\vec{s}\,(4\,;\,-3)$. Si $\vec{w} = k\vec{s}$, les abscisses donnent $k = \frac{3}{4}$. Mais $\frac{3}{4} \times (-3) = -\frac{9}{4} \neq 4$. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{s}$ ne sont pas colinéaires.

(d) $3\vec{v}\,(-3\,;\,6)$, donc $\vec{r}\,(3-(-3)\,;\,4-6)$, soit $\vec{r}\,(6\,;\,-2)$.
Avec les abscisses : $k = \frac{6}{-4,5} = -\frac{4}{3}$. Je vérifie : $\left(-\frac{4}{3}\right) \times 1,5 = -2$, c'est bien l'ordonnée de $\vec{r}$.
Donc $\vec{r} = -\frac{4}{3}\,\vec{t}$ : les vecteurs sont colinéaires, de sens contraires.

**Ex. 14** ★★★ **Vrai ou faux : colinéaires, égaux, de même sens ?**

(a) L'abscisse de $\vec{u}$ n'est pas nulle : $k = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$. On vérifie sur l'ordonnée : $\left(-\frac{3}{2}\right) \times 4 = -6$, c'est bien l'ordonnée de $\vec{v}$.
Donc $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ : les vecteurs sont colinéaires. Mais $k < 0$, donc ils sont de sens contraires. L'affirmation est fausse.

(b) Le quotient des abscisses donne $k = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$. Mais sur l'ordonnée, $\frac{1}{2} \times 4 = 2 \neq 1$. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. Un seul quotient ne prouve rien. L'affirmation est fausse.

(c) $k = \frac{3}{2} \div (-6) = -\frac{1}{4}$. Vérification : $\left(-\frac{1}{4}\right) \times 4 = -1$, c'est bien l'ordonnée de $\vec{s}$.
Donc $\vec{s} = -\frac{1}{4}\vec{u}$, c'est-à-dire $\vec{u} = -4\vec{s}$ (contrôle : $-4 \times \frac{3}{2} = -6$ et $-4 \times (-1) = 4$). Les vecteurs sont colinéaires et $\vec{u}$ est quatre fois plus long que $\vec{s}$ (de sens contraire). L'affirmation est vraie.

(d) La définition dit : $\vec{v} = k\vec{u}$ OU $\vec{u} = k\vec{v}$. Or $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$, puisque $0 \times (-6) = 0$ et $0 \times 4 = 0$. Le vecteur nul est donc colinéaire à $\vec{u}$ (il est même colinéaire à tout vecteur). L'affirmation est fausse.

(e) Contre-exemple : $-\vec{u}\,(6\,;\,-4)$. On a $(-1) \times (-6) = 6$ et $(-1) \times 4 = -4$, donc $-\vec{u} = (-1) \times \vec{u}$ : il est colinéaire à $\vec{u}$ et a la même longueur. Pourtant il n'est pas égal à $\vec{u}$, car ses coordonnées sont différentes (il est de sens contraire). L'affirmation est fausse.

**Ex. 15** ★★★ **Un réel m, deux valeurs, deux sens**

(a) Pour $m = 0$ : $\vec{u}\,(0\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(8\,;\,0)$. Si $\vec{v} = k\vec{u}$, l'abscisse donne $8 = k \times 0 = 0$ : impossible. Si $\vec{u} = k\vec{v}$, l'ordonnée donne $2 = k \times 0 = 0$ : impossible. Aucun réel $k$ ne convient, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

(b) Les ordonnées donnent $m = k \times 2$, donc $k = \frac{m}{2}$. Les abscisses donnent $8 = k \times m = \frac{m}{2} \times m = \frac{m^2}{2}$.
Donc $m^2 = 16$.

**Ex. 15** **(suite)**

(c) $m^2 = 16$ donne $m = 4$ ou $m = -4$. Pour $m = 4$ : $\vec{u}\,(4\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(8\,;\,4)$, $k = \frac{8}{4} = 2$ et $2 \times 2 = 4$ : $\vec{v} = 2\vec{u}$. Pour $m = -4$ : $\vec{u}\,(-4\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(8\,;\,-4)$, $k = \frac{8}{-4} = -2$ et $(-2) \times 2 = -4$ : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Dans les deux cas, les vecteurs sont colinéaires.

(d) Pour $m = 4$ : $k = 2 > 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, et $\vec{v}$ est deux fois plus long que $\vec{u}$. Pour $m = -4$ : $k = -2 < 0$, donc ils sont de sens contraires, et $\vec{v}$ est encore deux fois plus long que $\vec{u}$ (un $k$ négatif change le sens, pas la longueur).

**Ex. 16** ★★★ **Carte au trésor : la méthode d'Inès**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(-6-(-3)\,;\,4-(-2))$, donc $\overrightarrow{AB}\,(-3\,;\,6)$. $\overrightarrow{CD}\,(3-1\,;\,-1-3)$, donc $\overrightarrow{CD}\,(2\,;\,-4)$.

(b) Inès calcule $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-4}{2} = -2$. Elle fait « abscisse sur ordonnée » pour un vecteur et « ordonnée sur abscisse » pour l'autre : ce n'est pas le même rapport. Pour $\overrightarrow{CD}$, « abscisse sur ordonnée » donne $\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, la même valeur. Sa conclusion est donc fausse. Le plus sûr : chercher $k$ sur une coordonnée non nulle, puis le vérifier sur l'autre.

(c) L'abscisse de $\overrightarrow{AB}$ n'est pas nulle : $k = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$. Vérification : $\left(-\frac{2}{3}\right) \times 6 = -4$, c'est bien l'ordonnée de $\overrightarrow{CD}$.
Donc $\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ : les vecteurs sont colinéaires. Comme $k < 0$, ils sont de sens contraires. Comme $\frac{2}{3} < 1$, $\overrightarrow{CD}$ est plus court : $\overrightarrow{AB}$ est le plus long.

(d) $2\overrightarrow{AB}\,(-6\,;\,12)$ et $3\overrightarrow{CD}\,(6\,;\,-12)$. Leur somme a pour coordonnées $(-6+6\,;\,12+(-12))$, soit $(0\,;\,0)$ : c'est le vecteur nul. Or $\vec{0} = 0 \times \overrightarrow{AB}$ : il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, comme à tout vecteur.

(e) $\overrightarrow{AT}\,(3 \times (-3) + 2 \times 2\,;\,3 \times 6 + 2 \times (-4))$, donc $\overrightarrow{AT}\,(-5\,;\,10)$. Avec les abscisses : $k = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$. Vérification : $\frac{5}{3} \times 6 = 10$.
Donc $\overrightarrow{AT} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ : les vecteurs sont colinéaires, de même sens. On obtient $T(-3+(-5)\,;\,-2+10)$, donc $T(-8\,;\,8)$.

## 3. *Déterminant et critère de colinéarité*

**Ex. 17** ★☆☆ **Automatismes : calculer un déterminant**

(a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 3 \times (-4) - 5 \times 2 = -12 - 10 = -22$. Le déterminant n'est pas nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

(b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = (-8) \times (-9) - 6 \times 12 = 72 - 72 = 0$. Le déterminant est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ici $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$).

(c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \times 2 - 7 \times (-3) = 0 + 21 = 21$. Attention au « $-(-\ldots)$ ». Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

(d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 2{,}5 \times 3 - (-1{,}5) \times (-5) = 7{,}5 - 7{,}5 = 0$. Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires (ici $\vec{v} = -2\vec{u}$).

(e) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5} + \frac{1}{8} = \frac{16}{40} + \frac{5}{40} = \frac{21}{40}$. Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

(f) $\overrightarrow{AB}\,(-3-1\,;\,-5-(-2)) = (-4\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{CD}\,(7-2\,;\,-1-1) = (5\,;\,-2)$. $\det = (-4) \times (-2) - (-3) \times 5 = 8 + 15 = 23$. Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

**Ex. 18** ★☆☆ **Automatismes : les règles du déterminant**

(a) On échange les vecteurs, donc le signe change : $\det(\vec{v},\vec{u}) = -(-6) = 6$.

(b) $\det(4\vec{u},\vec{v}) = 4 \times \det(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times (-6) = -24$.

(c) Ilyès n'a sorti le coefficient $\frac{1}{2}$ qu'une seule fois. Or chacun des deux vecteurs est multiplié par $\frac{1}{2}$, donc on sort deux fois ce facteur : $\det\left(\frac{1}{2}\vec{u},\frac{1}{2}\vec{v}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (-6) = -\frac{3}{2}$.

(d) $\det(-2\vec{u},3\vec{v}) = (-2) \times 3 \times (-6) = 36$.

(e) $\det(\vec{u},\vec{u}) = xy - yx = 0$ : un vecteur est toujours colinéaire à lui-même.

(f) Faux. $\det(\vec{v},\vec{u}) = 6 \neq 0$. Le déterminant n'est pas nul, donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. Échanger les vecteurs change le signe, pas la conclusion.

**Ex. 19** ★★☆ **Lire, calculer, comparer les sens**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(-2-(-5)\,;\,1-(-1)) = (3\,;\,2)$, $\overrightarrow{CD}\,(-4-2\,;\,1-5) = (-6\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{EF}\,(6-2\,;\,-1-(-4)) = (4\,;\,3)$.

**Ex. 19** **(suite)**

(b) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 3\times(-4) - 2\times(-6) = -12+12 = 0$. Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires. On a $\overrightarrow{CD} = -2\,\overrightarrow{AB}$ car $\frac{-6}{3} = -2$ et $\frac{-4}{2} = -2$. Comme $k = -2 < 0$, ils sont de sens contraires.

(c) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}) = 3\times 3 - 2\times 4 = 9-8 = 1$. Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : la figure trompe.

(d) $\overrightarrow{CD} = -2\,\overrightarrow{AB}$, donc $\det(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EF}) = -2\times \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}) = -2\times 1 = -2$. Vérification : $(-6)\times 3 - (-4)\times 4 = -18+16 = -2$.

**Ex. 20** ★★☆ **Trouver le réel m**

(a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = m\times 6 - (-3)\times 5 = 6m+15$. Il est nul si et seulement si $6m = -15$, soit $m = -\frac{5}{2}$. Contrôle : $\vec{u}\left(-\frac{5}{2}\,;\,-3\right)$ et $-\frac{1}{2}\times 5 = -\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2}\times 6 = -3$, donc $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$.

(b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 2\times 4 - (m+1)\times(-3) = 8+3m+3 = 3m+11$. Il est nul si et seulement si $m = -\frac{11}{3}$.

(c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = m\times 5 - 2m\times 3 = 5m-6m = -m$. Il est nul si et seulement si $m = 0$ : alors $\vec{u} = \vec{0}$, colinéaire à tout vecteur.

(d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = (m+2)\times 4 - 4\times m = 4m+8-4m = 8$. Le déterminant vaut toujours $8 \neq 0$ : aucune valeur de $m$ ne convient.

(e) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 2m\times(-3) - (-6)\times m = -6m+6m = 0$. Le déterminant est nul pour tout $m$ : toutes les valeurs conviennent (en fait $\vec{u} = 2\vec{v}$).

**Ex. 21** ★★☆ **Python : une fonction det**

(a) Ligne 2 : return x * yp - y * xp. Programme complet :

```
def det(x, y, xp, yp):
    return x * yp - y * xp

def colineaires(x, y, xp, yp):
    return det(x, y, xp, yp) == 0
```

Les coordonnées sont entières, donc le calcul est exact et le test d'égalité à 0 est fiable.

(b) $(-3)\times(-8) - 4\times 6 = 24-24 = 0$ : le programme affiche 0 puis True.

(c) Version de Noé : $2\times 3 - 3\times 2 = 0$, donc il affiche True. Or il calcule $xx' - yy'$ au lieu de $xy' - yx'$. Le vrai déterminant vaut $2\times 2 - 3\times 3 = 4-9 = -5 \neq 0$ : les vecteurs ne sont pas colinéaires (le programme corrigé affiche False).

**Ex. 21** **(suite)**

(d) $2\times(-9) - (-3)\times 6 = -18+18 = 0$. Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires, pas égaux : $(6\,;\,-9) = 3\times(2\,;\,-3)$. Comme $k = 3 > 0$, ils ont même direction et même sens, mais $6 \neq 2$ : ils ne sont pas égaux.

**Ex. 22** ★★★ **Compléter la démonstration du critère**

(a) $\vec{v} = k\vec{u}$ donne $x' = kx$ et $y' = ky$.
Donc $xy' - yx' = x\times ky - y\times kx = kxy - kxy = 0$ : deux vecteurs colinéaires ont un déterminant nul.

(b) Avec $k = \frac{x'}{x}$, on a bien $kx = x'$. En divisant $xy' = yx'$ par $x \neq 0$, on obtient $y' = y\times\frac{x'}{x} = ky$.
Donc $\vec{v}\,(x'\,;\,y') = (kx\,;\,ky) = k\vec{u}$ : les vecteurs sont colinéaires.

(c) $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc ses deux coordonnées ne sont pas nulles en même temps. Comme $x = 0$, on a $y \neq 0$. L'égalité devient $0\times y' = yx'$, soit $yx' = 0$, donc $x' = 0$ (car $y \neq 0$). On pose $k = \frac{y'}{y}$ : $ky = y'$ et $kx = k\times 0 = 0 = x'$.
Donc $\vec{v} = k\vec{u}$ : les vecteurs sont colinéaires.

(d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0\times\frac{5}{2} - (-4)\times 0 = 0$ : les vecteurs sont colinéaires. $k = \frac{y'}{y} = \frac{5/2}{-4} = -\frac{5}{8}$. Contrôle : $-\frac{5}{8}\times(-4) = \frac{5}{2}$, et $-\frac{5}{8}\times 0 = 0$.
Donc $\vec{v} = -\frac{5}{8}\vec{u}$ : comme $k < 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

(e) $\det(\vec{0},\vec{w}) = 0\times(-7) - 0\times 3 = 0$. Oui : $\vec{0} = 0\times\vec{w}$, donc le vecteur nul est colinéaire à $\vec{w}$, et le critère reste vrai dans ce cas. L'hypothèse « non nuls » sert seulement dans la démonstration : elle garantit qu'une coordonnée de $\vec{u}$ n'est pas nulle (par exemple $y \neq 0$ quand $x = 0$), ce qui permet de diviser.

**Ex. 23** ★★★ **Un vecteur défini par une relation**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(1-(-3)\,;\,0-(-2)) = (4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-1-(-3)\,;\,3-(-2)) = (2\,;\,5)$. $\overrightarrow{AM}\,(2\times 4-2\,;\,2\times 2-5) = (6\,;\,-1)$.
Donc $x_M = -3+6 = 3$ et $y_M = -2+(-1) = -3$ : $M(3\,;\,-3)$.

(b) Théo a calculé $xx' - yy'$ au lieu de $xy' - yx'$. Correct : $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 6\times\frac{3}{2} - (-1)\times(-9) = 9-9 = 0$. Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. $k = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}\times(-1) = \frac{3}{2}$ : $\vec{u} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$. Comme $k < 0$, ils sont de sens contraires.

**Ex. 23** **(suite)**

(c) $\overrightarrow{BC}(-1-1\,;\,3-0)=(-2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{BM}(3-1\,;\,-3-0)=(2\,;\,-3)$. $\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM})=(-2)\times(-3)-3\times 2=6-6=0$. Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires : C, B et M sont alignés. Sans coordonnées : $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}$ par la relation de Chasles. Ainsi B est le milieu de [CM].

(d) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=4\times 5-2\times 2=20-4=16$ (non nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires). Échanger les vecteurs change le signe : $\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=-16$. Puis $\det(\overrightarrow{AC},-2\overrightarrow{AB})=-2\times(-16)=32$.

**Ex. 24** ★★★ **Le couloir du jeu vidéo**

(a) De la flèche, on lit un déplacement de 2 vers la droite et de 3 vers le bas : $\vec{c}\,(2\,;\,-3)$.

(b) $\det(\vec{d_1},\vec{c})=m\times(-3)-6\times 2=-3m-12$. Il est nul si et seulement si $-3m=12$, soit $m=-4$. Contrôle : $-2\times 2=-4$ et $-2\times(-3)=6$, donc $\vec{d_1}=-2\vec{c}$ : $k=-2<0$, sens contraires.

(c) Avec $m=-4$, $\vec{d_1}\,(-4\,;\,6)$. Le déplacement total est $\vec{d_1}+\vec{e}\,(-4+5{,}5\,;\,6+(-7{,}5))=(1{,}5\,;\,-1{,}5)$. $\det(\vec{d_1}+\vec{e},\vec{c})=1{,}5\times(-3)-(-1{,}5)\times 2=-4{,}5+3=-1{,}5$. Le déterminant n'est pas nul, donc le déplacement total n'est pas colinéaire à $\vec{c}$ : il n'est pas autorisé.

(d) $\det(\vec{d_3},\vec{c})=2m\times(-3)-(-3m)\times 2=-6m+6m=0$ pour tout $m$ : le déplacement est toujours autorisé. En effet $\vec{d_3}=m\vec{c}$. Si $m>0$, même sens que $\vec{c}$ ; si $m<0$, sens contraires ; si $m=0$, $\vec{d_3}=\vec{0}$ (colinéaire à $\vec{c}$, mais pas de sens).

## 4. *Alignement de trois points*

**Ex. 25** ★☆☆ **Alignés ou non : le déterminant tranche**

(a) Relation de Chasles : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AC}(2+4\,;\,3+6)$, soit $\overrightarrow{AC}(6\,;\,9)$. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=2\times 9-3\times 6=18-18=0$. Le déterminant est nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : les points A, B et C sont alignés.

(b) On lit $\overrightarrow{AB}(3\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}(9\,;\,7)$. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=3\times 7-2\times 9=21-18=3\neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés, même si la figure peut le faire croire.

**Ex. 25** **(suite)**

(c) $\overrightarrow{AB}(2\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;\,-9)$. $\det=2\times(-9)-(-4)\times 5=-18+20=2\neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B et C ne sont pas alignés.

(d) $\overrightarrow{AB}(1\,;\,1{,}5)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;\,4{,}5)$. $\det=1\times 4{,}5-1{,}5\times 3=4{,}5-4{,}5=0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc A, B et C sont alignés.

(e) $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(\frac{3}{2}\,;\,2\right)$. $\det=\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B et C ne sont pas alignés.

(f) $\overrightarrow{AB}(4\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AC}(9\,;\,0{,}5)$. $\det=4\times 0{,}5-0\times 9=2\neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B et C ne sont pas alignés.

(g) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(-4)\times(-9)-6\times 6=36-36=0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc A, B et C sont alignés.

**Ex. 26** ★★☆ **Qui est entre les deux autres ?**

(a) $k=\frac{5}{2}=2{,}5$ ; contrôle : $\frac{5}{2}\times(-6)=-15$. Comme $k>1$, B est entre A et C.

(b) $k=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$ ; contrôle : $\frac{1}{3}\times 9=3$. Comme $0<k<1$, C est entre A et B.

(c) $\overrightarrow{AB}(4\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-8\,;\,-2)$, donc $k=\frac{-8}{4}=-2$ ; contrôle : $-2\times 1=-2$. Comme $k<0$, A est entre B et C.

(d) $k=\frac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$ ; contrôle : $0{,}75\times(-1{,}2)=-0{,}9$. Comme $0<k<1$, C est entre A et B.

(e) On lit $\overrightarrow{AB}(6\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;\,1)$, donc $k=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$ ; contrôle : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$. Comme $k<0$, A est entre B et C.

**Ex. 27** ★★☆ **Les poteaux d'Inès**

(a) $\overrightarrow{PQ}(-1-(-5)\,;\,-1-(-4))$, soit $\overrightarrow{PQ}(4\,;\,3)$ ; $\overrightarrow{PR}(5-(-5)\,;\,2-(-4))$, soit $\overrightarrow{PR}(10\,;\,6)$.

(b) $\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=4\times 6-3\times 10=24-30=-6\neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas colinéaires, donc P, Q et R ne sont pas alignés : Sami a tort, le plan ne prouve rien.

(c) $\overrightarrow{RS}(1-5\,;\,-1-2)$, soit $\overrightarrow{RS}(-4\,;\,-3)$, et $\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS})=4\times(-3)-3\times(-4)=-12+12=0$. Le calcul est juste, mais $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ n'ont pas la même origine : leur colinéarité ne donne pas un alignement.

**Ex. 27** **(suite)**

(d) Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires, donc $(PQ) \parallel (RS)$. D'après la question 2, R n'est pas sur $(PQ)$ : les droites $(PQ)$ et $(RS)$ sont strictement parallèles, pas confondues.

**Ex. 28** ★★☆ **Le rayon laser**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(1-(-3)\,;\,3-5)$, soit $\overrightarrow{AB}\,(4\,;\,-2)$, et $\overrightarrow{AM}\,(x+3\,;\,-5)$.

(b) $M \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = 0 \iff 4\times(-5) - (-2)(x+3) = 0 \iff 2x - 14 = 0 \iff x = 7$.
Donc $M(7\,;\,0)$. Contrôle : $\overrightarrow{AM}\,(10\,;\,-5) = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

(c) $\overrightarrow{AN}\,(3\,;\,y-5)$. $N \in (AB) \iff 4(y-5) - (-2)\times 3 = 0 \iff 4y - 14 = 0 \iff y = \frac{7}{2}$.
Donc $N(0\,;\,3{,}5)$. Contrôle : $\overrightarrow{AN}\,(3\,;\,-1{,}5) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

(d) $\overrightarrow{AC}\,(-4\,;\,2)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 4\times 2 - (-2)\times(-4) = 8 - 8 = 0$ : les vecteurs sont colinéaires, donc C est sur $(AB)$. Mais $\overrightarrow{AC} = -1\times\overrightarrow{AB}$ avec $k = -1 < 0$ : A est entre B et C, donc C est derrière le laser et le rayon ne l'atteint pas.

**Ex. 29** ★★☆ **Un programme qui teste l'alignement**

(a)

```
def alignes(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
    ux = xB - xA
    uy = yB - yA
    vx = xC - xA
    vy = yC - yA
    d = ux * vy - uy * vx
    return d == 0
print(alignes(-3, 1, 2, 3, 7, 5))
print(alignes(0, 4, 2, 1, 5, -3))
```

On compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (même origine A) et d est leur déterminant $xy' - yx'$.

(b) Premier appel : $\overrightarrow{AB}\,(5\,;\,2)$, $\overrightarrow{AC}\,(10\,;\,4)$, $d = 5\times 4 - 2\times 10 = 0$ : affiche True (points alignés). Second appel : $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-3)$, $\overrightarrow{AC}\,(5\,;\,-7)$, $d = 2\times(-7) - (-3)\times 5 = 1 \neq 0$ : affiche False
(points non alignés).

(c) Avec sa formule, $d = 5\times 10 - 2\times 4 = 42$ : la ligne affiche False alors que les points sont alignés. Lucas a calculé $xx' - yy'$ au lieu de $xy' - yx'$ : il faut d = ux * vy - uy * vx.

(d) Avec des coordonnées entières, d est un entier calculé exactement, donc l'égalité d == 0 est sûre. Avec des décimaux, l'ordinateur arrondit : on écrit return abs(d) < 1e-9
(d très proche de 0).

**Ex. 30** ★★★ **Un alignement sans repère**

(a) $ABCK$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC}$. Avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

(b) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, car $I$ est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(c) $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Or $3\overrightarrow{IJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ : les coefficients sont proportionnels ($\frac{-3/2}{-1/2} = 3$ et $\frac{1}{1/3} = 3$), donc $\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IJ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, qui ont la même origine $I$, sont colinéaires : les points $I$, $J$ et $K$ sont alignés.

(d) $\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IJ}$ avec $3 > 1$ : $K$ est plus loin de $I$ que $J$, dans le même sens. C'est donc $J$ qui est entre $I$ et $K$.

**Ex. 31** ★★★ **La carte au trésor de Noé**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(2-(-4)\,;\,1-(-3))$, soit $\overrightarrow{AB}\,(6\,;\,4)$, et $\overrightarrow{AR}\,(12\,;\,9)$. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AR}) = 6\times 9 - 4\times 12 = 54 - 48 = 6 \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AR}$ ne sont pas colinéaires, donc $A$, $B$ et $R$ ne sont pas alignés : la carte trompe Noé.

(b) $\overrightarrow{AT}\,(0-(-4)\,;\,y+3)$, soit $\overrightarrow{AT}\,(4\,;\,y+3)$. $T \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT}) = 0 \iff 6(y+3) - 4\times 4 = 0 \iff 6y + 2 = 0 \iff y = -\frac{1}{3}$.
Donc $T\left(0\,;\,-\frac{1}{3}\right)$.

(c) $\overrightarrow{AT}\left(4\,;\,\frac{8}{3}\right)$ et $k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Contrôle : $\frac{2}{3}\times 4 = \frac{8}{3}$. Comme $0 < k < 1$, le trésor $T$ est entre le puits $A$ et l'arbre $B$.

(d) $\overrightarrow{AC}\,(7{,}5\,;\,5)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 6\times 5 - 4\times 7{,}5 = 30 - 30 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc $A$, $B$, $C$ sont alignés : $C$ est sur $(AB)$. De plus $\overrightarrow{AC} = 1{,}25\,\overrightarrow{AB}$ ($\frac{7{,}5}{6} = 1{,}25$) avec $1{,}25 > 1$ : c'est $B$ qui est entre $A$ et $C$.

**Ex. 32** ★★★ **Deux copies à corriger**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(1-(-2)\,;\,2-4)$, soit $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,-2)$, et $\overrightarrow{CD}\,(5-(-1)\,;\,-6-(-2))$, soit $\overrightarrow{CD}\,(6\,;\,-4)$.
$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 3\times(-4) - (-2)\times 6 = -12 + 12 = 0$.
Les vecteurs sont colinéaires ($\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$), donc les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles. Cela ne prouve aucun alignement, car les deux vecteurs n'ont pas la même origine.

(b) $\overrightarrow{AC}\,(1\,;\,-6)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 3\times(-6) - (-2)\times 1 = -18 + 2 = -16 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $A$, $B$, $C$ ne sont pas alignés : Léa a tort. $C$ n'est pas sur $(AB)$, donc les droites parallèles $(AB)$ et $(CD)$ sont strictement parallèles.

**Ex. 32** **(suite)**

(c) Hugo a mal soustrait l'abscisse négative de $A$ : $x_E - x_A = 7 - (-2) = 9$, et non $7 - 2$.
Donc $\overrightarrow{AE}\,(9\,;\,-6)$ et $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 3 \times (-6) - (-2) \times 9 = -18 + 18 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$), donc $A$, $B$ et $E$ sont alignés.

(d) $\overrightarrow{AF}\,(m+2\,;\,4)$. $F \in (AB) \iff 3 \times 4 - (-2)(m+2) = 0 \iff 2m + 16 = 0 \iff m = -8$.
Donc $F(-8\,;\,8)$ et $\overrightarrow{AF}\,(-6\,;\,4) = -2\overrightarrow{AB}$. Comme $k = -2 < 0$, c'est $A$ qui est entre $B$ et $F$.

## 5. *Parallélisme de deux droites*

**Ex. 33** ★☆☆ **Parallèles ou non ?**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(3\,;1)$, $\overrightarrow{CD}\,(6\,;2)$ ; $\det = 3 \times 2 - 1 \times 6 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB) \parallel (CD)$.

(b) $\overrightarrow{EF}\,(3\,;-4{,}5)$, $\overrightarrow{GH}\,(-2\,;3{,}5)$ ; $\det = 3 \times 3{,}5 - (-4{,}5) \times (-2) = 10{,}5 - 9 = 1{,}5 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : $(EF)$ et $(GH)$ ne sont pas parallèles.

(c) $\overrightarrow{KL}\,\left(\frac{3}{2}\,;-1\right)$, $\overrightarrow{MN}\,(3\,;-2)$ ; $\det = \frac{3}{2} \times (-2) - (-1) \times 3 = -3 + 3 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(KL) \parallel (MN)$.

(d) $\overrightarrow{PQ}\,(3\,;6)$, $\overrightarrow{RS}\,(2\,;5)$ ; $\det = 3 \times 5 - 6 \times 2 = 3 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : $(PQ)$ et $(RS)$ ne sont pas parallèles.

(e) $\overrightarrow{UV}\,(0\,;6)$, $\overrightarrow{WZ}\,(0\,;-4)$ ; $\det = 0 \times (-4) - 6 \times 0 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(UV) \parallel (WZ)$.

(f) $\overrightarrow{CD}\,(-2\,;3)$ ; $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 4 \times 3 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB) \parallel (CD)$.

**Ex. 34** ★☆☆ **Strictement parallèles ou confondues ?**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;1)$, $\overrightarrow{AC}\,(4\,;2)$ ; $\det = 2 \times 2 - 1 \times 4 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $C \in (AB)$ : les droites sont confondues.

(b) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;6)$, $\overrightarrow{AC}\,(1\,;5)$ ; $\det = 2 \times 5 - 6 \times 1 = 4 \neq 0$.
Donc $C \notin (AB)$ : les droites sont strictement parallèles.

(c) $\overrightarrow{AB}\,(0\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}\,(0\,;5)$ ; $\det = 0 \times 5 - (-2) \times 0 = 0$.
Donc $C \in (AB)$ : les droites sont confondues.

(d) $\overrightarrow{AB}\,(6\,;-3)$, $\overrightarrow{AC}\,(4\,;-1)$ ; $\det = 6 \times (-1) - (-3) \times 4 = -6 + 12 = 6 \neq 0$.
Donc $C \notin (AB)$ : les droites sont strictement parallèles.

**Ex. 34** **(suite)**

(e) $\overrightarrow{AB}\,(1\,;2)$, $\overrightarrow{AC}\,\left(-\frac{1}{2}\,;-1\right)$ ; $\det = 1 \times (-1) - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 = 0$.
Donc $C \in (AB)$ : les droites sont confondues.

(f) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;1)$, $\overrightarrow{AC}\,(4\,;1)$ ; $\det = 2 \times 1 - 1 \times 4 = -2 \neq 0$.
Donc $C \notin (AB)$ : les droites sont strictement parallèles.

**Ex. 35** ★★☆ **Trapèze ou parallélogramme ?**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(6\,;3)$ et $\overrightarrow{DC}\,(4\,;2)$ ; $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 6 \times 2 - 3 \times 4 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB) \parallel (DC)$.

(b) $\overrightarrow{AD}\,(2\,;4)$ et $\overrightarrow{BC}\,(0\,;3)$ ; $\det = 2 \times 3 - 4 \times 0 = 6 \neq 0$.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires : $(AD)$ et $(BC)$ ne sont pas parallèles.

(c) Une seule paire de côtés opposés est parallèle : $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, mais pas un parallélogramme.

(d) $4 = k \times 6$ donne $k = \frac{2}{3}$, et on vérifie : $\frac{2}{3} \times 3 = 2$.
Donc $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ : $DC$ vaut les deux tiers de $AB$, les longueurs ne sont pas égales.

**Ex. 36** ★★☆ **Une allée parallèle dans le jardin**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(6\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}\,(x-1\,;2)$. $(CD) \parallel (AB) \iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \iff 6 \times 2 - 2(x-1) = 0 \iff 14 - 2x = 0 \iff x = 7$.
Donc $D(7\,;0)$.

(b) $\overrightarrow{AC}\,(3\,;-3)$ ; $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 6 \times (-3) - 2 \times 3 = -24 \neq 0$. $C$ n'est pas sur $(AB)$ : les allées sont strictement parallèles.

(c) $E(0\,;y)$, $\overrightarrow{CE}\,(-1\,;y+2)$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}) = 6(y+2) - 2 \times (-1) = 6y + 14 = 0 \iff y = -\frac{7}{3}$.
Donc $E\left(0\,;-\frac{7}{3}\right)$.

(d) $\overrightarrow{CD}\,(7-1\,;0-(-2))$, soit $(6\,;2)$ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

**Ex. 37** ★★☆ **Deux erreurs à corriger**

(a) Noé a calculé $xx' - yy'$. Le déterminant est $xy' - yx'$ : $\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QP}) = 2 \times 2 - 3 \times 3 = -5 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : $(MN)$ et $(QP)$ ne sont pas parallèles.

(b) $[MN]$ et $[NP]$ sont deux côtés consécutifs : ils se coupent en $N$, ils ne sont jamais parallèles. Pour un trapèze, il faut tester les côtés opposés : $[MN]$ et $[QP]$, puis $[MQ]$ et $[NP]$.

**Ex. 37** **(suite)**

(c) $\overrightarrow{MQ}\,(1\,;-1)$ et $\overrightarrow{NP}\,(2\,;-2)$ ; $\det = 1\times(-2)-(-1)\times 2 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(MQ)\parallel(NP)$. Avec la question 1, une seule paire de côtés opposés est parallèle : $MNPQ$ est un trapèze de bases $[MQ]$ et $[NP]$. Lucas a tort.

**Ex. 38** ★★★ **Le quatrième sommet**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(4-(-4)\,;\,-2-2)$, soit $\overrightarrow{AB}\,(8\,;\,-4)$, et $\overrightarrow{CD}\,(x-5\,;\,4-1)$, soit $\overrightarrow{CD}\,(x-5\,;\,3)$. Les droites sont parallèles si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0$. Or $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 8\times 3-(-4)\times(x-5) = 24+4x-20 = 4x+4$.
Donc $4x+4=0$, ce qui donne $x=-1$ : $D(-1\,;\,4)$.

(b) $\overrightarrow{DC}\,(6\,;\,-3)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}) = 8\times(-3)-(-4)\times 6 = -24+24 = 0$ : les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB)\parallel(DC)$. $\overrightarrow{AD}\,(3\,;\,2)$, $\overrightarrow{BC}\,(1\,;\,3)$ et $\det(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}) = 3\times 3-2\times 1 = 7\neq 0$ : les droites $(AD)$ et $(BC)$ ne sont pas parallèles. Une seule paire de côtés opposés est parallèle : $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, mais pas un parallélogramme.

(c) $6=\frac{3}{4}\times 8$ et $-3=\frac{3}{4}\times(-4)$, donc $\overrightarrow{DC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $k=\frac{3}{4}$. Les vecteurs sont colinéaires, mais pas égaux : $DC$ mesure les trois quarts de $AB$. Ali confond « parallèles » et « égaux » : des droites parallèles ne donnent pas des côtés de même longueur.

(d) $ABCE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$. Comme $\overrightarrow{EC}\,(5-x_E\,;\,1-y_E)$, on veut $5-x_E=8$ et $1-y_E=-4$.
Donc $x_E=-3$ et $y_E=5$ : $E(-3\,;\,5)$.

(e) $\overrightarrow{CD}\,(-6\,;\,3)$ et $\overrightarrow{CE}\,(-8\,;\,4)$. $\det(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}) = (-6)\times 4-3\times(-8) = -24+24 = 0$. Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires : les points $C$, $D$ et $E$ sont alignés. C'est logique : $(CD)$ et $(CE)$ sont toutes les deux parallèles à $(AB)$ et passent par $C$, donc elles sont confondues.

**Ex. 39** ★★★ **Trois rayons laser**

(a) Pour tester le parallélisme de $(AB)$ et $(CD)$, il faut un vecteur pour chaque droite : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ne dirige pas $(CD)$. $\overrightarrow{AB}\,(4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{CD}\,(-2\,;\,-1)$.
$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 4\times(-1)-2\times(-2) = -4+4 = 0$.
Les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB)\parallel(CD)$.

**Ex. 39** **(suite)**

(b) $\overrightarrow{AC}\,(1\,;\,3{,}5)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 4\times 3{,}5-2\times 1 = 12\neq 0$ : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc $C$ n'est pas sur $(AB)$. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles, mais $C$ est sur $(CD)$ et pas sur $(AB)$ : elles sont strictement parallèles.

(c) $\overrightarrow{EF}\,(-2-5\,;\,-2{,}5-1)$, soit $\overrightarrow{EF}\,(-7\,;\,-3{,}5)$.
$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}) = 4\times(-3{,}5)-2\times(-7) = -14+14 = 0$ : les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB)\parallel(EF)$. On teste le point $E$ : $\overrightarrow{AE}\,(6\,;\,3)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}) = 4\times 3-2\times 6 = 0$, donc $E$ est sur $(AB)$. Les droites $(AB)$ et $(EF)$ sont confondues.

(d) $-7=-\frac{7}{4}\times 4$ et $-3{,}5=-\frac{7}{4}\times 2$, donc $\overrightarrow{EF}=-\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$ et $k=-\frac{7}{4}$. L'affirmation est fausse : les vecteurs ne sont pas égaux (longueurs différentes, sens contraires), mais d'après la question précédente les droites sont confondues. Des droites parallèles, ou même confondues, n'ont pas besoin de vecteurs égaux.

**Ex. 40** ★★★ **Un trapèze et un parallélogramme sans repère**

(a) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles). Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $(MN)\parallel(BC)$.

(b) Une seule paire de côtés opposés parallèles ne suffit pas. Dans $MNCB$, les côtés opposés sont $[MN]$ et $[CB]$, puis $[NC]$ et $[BM]$. $(NC)$ est la droite $(AC)$ et $(BM)$ est la droite $(AB)$ : comme $ABC$ est un triangle, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc ces droites ne sont pas parallèles. De plus, $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ : les côtés $[MN]$ et $[BC]$ n'ont pas la même longueur. $MNCB$ est un trapèze de bases $[MN]$ et $[BC]$, mais pas un parallélogramme.

(c) D'après la question 1, $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, et par définition $\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Donc $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BQ}$. Or $MNQB$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BQ}$ (les points $M$, $N$, $Q$, $B$ ne sont pas alignés, car $M$ est sur $(AB)$ et $N$ n'y est pas).
Donc $MNQB$ est un parallélogramme.

(d) D'après la question 3, $MNQB$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MB}$. Or $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Donc $\overrightarrow{NQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ : les vecteurs sont colinéaires, donc $(NQ)\parallel(AB)$. $N$ est sur $(AC)$ et $N\neq A$, car $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$. Or $(AC)$ ne coupe $(AB)$ qu'en $A$, donc $N\notin(AB)$ : les droites sont strictement parallèles.

## 6. *Décomposer un vecteur sur deux vecteurs non colinéaires*

**Ex. 41** ★☆☆ **Automatismes : combinaisons avec des coordonnées**

(a) $3\vec{u} - 2\vec{v}$ a pour coordonnées $(3 \times 2 - 2 \times (-1)\,;\, 3 \times (-3) - 2 \times 4) = (8\,;\, -17)$.

(b) $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ a pour coordonnées $(-2 + \frac{1}{2} \times (-1)\,;\, 3 + \frac{1}{2} \times 4) = (-2{,}5\,;\, 5)$.

(c) L'abscisse de $2\vec{u} + b\vec{v}$ vaut $2 \times 2 + b \times (-1) = 4 - b$. On résout $4 - b = 7$, donc $b = -3$.

(d) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 4 - (-3) \times (-1) = 8 - 3 = 5$. Le déterminant n'est pas nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

(e) Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, une combinaison égale à $\vec{0}$ a ses deux coefficients nuls : $a - 1 = 0$ et $b + 2 = 0$, donc $a = 1$ et $b = -2$.

**Ex. 42** ★☆☆ **Automatismes : lire une combinaison sur le quadrillage**

(a) $\vec{u}\,(2\,;\,0)$ et $\vec{v}\,(1\,;\,2)$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 2 - 0 \times 1 = 4 \neq 0$ : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc l'écriture $a\vec{u} + b\vec{v}$ d'un vecteur est unique.

(b) $\overrightarrow{OC}\,(3\,;\,2)$ et $a\vec{u} + b\vec{v}\,(2a + b\,;\,2b)$. L'ordonnée donne $2b = 2$, donc $b = 1$ ; l'abscisse donne $2a + 1 = 3$, donc $a = 1$. Ainsi $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$ : on suit $\vec{u}$ une fois, puis $\vec{v}$ une fois.

(c) $\overrightarrow{CD}\,(3 - 3\,;\,-2 - 2) = (0\,;\,-4)$. L'ordonnée donne $2b = -4$, donc $b = -2$ ; l'abscisse donne $2a - 2 = 0$, donc $a = 1$. Ainsi $\overrightarrow{CD} = \vec{u} - 2\vec{v}$ (et non $-2\vec{v}$ seul : l'abscisse nulle ne veut pas dire $a = 0$).

(d) $\overrightarrow{OE}$ a pour coordonnées $(-2 + \frac{3}{2} \times 1\,;\, 0 + \frac{3}{2} \times 2) = (-0{,}5\,;\, 3)$. Comme $O$ est l'origine, $E(-0{,}5\,;\, 3)$.

**Ex. 43** ★★☆ **Décomposer un vecteur et contrôler**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(4 - 1\,;\,-2 - (-2)) = (3\,;\,0)$, $\overrightarrow{AC}\,(-1 - 1\,;\,2 - (-2)) = (-2\,;\,4)$ et $\overrightarrow{AD}\,(6 - 1\,;\,4 - (-2)) = (5\,;\,6)$.

(b) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times 4 - 0 \times (-2) = 12$. Le déterminant n'est pas nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : la décomposition existe et elle est unique.

(c) $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(3a - 2b\,;\,4b)$. L'ordonnée donne $4b = 6$, donc $b = \frac{3}{2}$. L'abscisse donne $3a - 2 \times \frac{3}{2} = 5$, soit $3a = 8$, donc $a = \frac{8}{3}$. Ainsi $\overrightarrow{AD} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

**Ex. 43 (suite)**

(d) $\frac{8}{3} \times 3 + \frac{3}{2} \times (-2) = 8 - 3 = 5$ et $\frac{8}{3} \times 0 + \frac{3}{2} \times 4 = 6$ : on retrouve bien $\overrightarrow{AD}\,(5\,;\,6)$.

**Ex. 44** ★★☆ **L'erreur de Nadia : une écriture vraiment unique ?**

(a) $\vec{u}\,(-5 - (-6)\,;\,1 - 3) = (1\,;\,-2)$, $\vec{v}\,(-5 - (-3)\,;\,4 - 0) = (-2\,;\,4)$ et $\vec{w}\,(4 - 1\,;\,-3 - 3) = (3\,;\,-6)$.

(b) $-\vec{u} - 2\vec{v}$ a pour coordonnées $(-1 - 2 \times (-2)\,;\,-(-2) - 2 \times 4) = (3\,;\,-6)$ : l'égalité de Nadia est juste.

(c) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times 4 - (-2) \times (-2) = 4 - 4 = 0$. Le déterminant est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ici $\vec{v} = -2\vec{u}$).

(d) L'abscisse donne $a \times 1 = 3$, donc $a = 3$ ; contrôle : $3 \times (-2) = -6$. Ainsi $\vec{w} = 3\vec{u} + 0\vec{v}$, une autre écriture. L'écriture $a\vec{u} + b\vec{v}$ n'est unique que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : ici il y en a une infinité, Nadia a tort.

**Ex. 45** ★★☆ **Dans un triangle, sans repère**

(a) Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}$. Comme $I$ est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Donc $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

(b) $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

(c) Lucas a écrit $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ : c'est faux, car $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (même direction, sens contraires). Correction : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

(d) $\overrightarrow{AM} = -1\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, l'écriture est unique : on identifie les coefficients, $m - 1 = -1$ et $m + 2 = 2$. Les deux conditions donnent $m = 0$.

**Ex. 46** ★★★ **Dans un parallélogramme : un alignement démontré sans repère**

(a) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $A$, $B$ et $D$ ne sont pas alignés : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Comme $I$ est le milieu de $[DC]$ et que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. De même, $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

**Ex. 46** **(suite)**

(c) On compare les coefficients : $\frac{-1/3}{-1/2} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$. Ils sont proportionnels, donc $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires, donc les points $B$, $E$ et $I$ sont alignés. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, le point $E$ est sur $[BI]$, aux deux tiers du segment en partant de $B$.

(d) $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, car $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Supposons que $\overrightarrow{DJ} = k\overrightarrow{BI}$. Comme l'écriture est unique, on identifie les coefficients : $k \times (-\frac{1}{2}) = 1$ donne $k = -2$, et $k \times 1 = -\frac{1}{2}$ donne $k = -\frac{1}{2}$. C'est impossible, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites $(DJ)$ et $(BI)$ ne sont pas parallèles.

**Ex. 47** ★★★ **Les deux commandes d'un drone**

(a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 0 - 2 \times (-2) = 4 \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Tout déplacement s'écrit donc de façon unique sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$.

(b) $a\vec{u} + b\vec{v}$ a pour coordonnées $(3a - 2b\,;\, 2a)$ et $\overrightarrow{OT}\,(-1\,;\,4)$. Avec l'ordonnée, $2a = 4$, donc $a = 2$. Avec l'abscisse, $6 - 2b = -1$, donc $b = \frac{7}{2}$. Ainsi $\overrightarrow{OT} = 2\vec{u} + \frac{7}{2}\vec{v}$. Contrôle : $3 \times 2 - 2 \times \frac{7}{2} = -1$ et $2 \times 2 = 4$.

(c) $\overrightarrow{OS}\,(-6{,}5\,;\,-3)$. Avec l'ordonnée, $2a = -3$, donc $a = -\frac{3}{2}$. Avec l'abscisse, $3 \times (-\frac{3}{2}) - 2b = -6{,}5$, soit $-4{,}5 - 2b = -6{,}5$, donc $b = 1$. Ainsi $\overrightarrow{OS} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \vec{v}$. Le coefficient $a$ est négatif : c'est la commande $U$ qui est jouée en marche arrière.

(d) On utilise seulement $U$, donc $b = 0$ et $\overrightarrow{OP} = a\vec{u}$ a pour coordonnées $(3a\,;\,2a)$. Avec l'ordonnée, $2a = 5$, donc $a = \frac{5}{2}$. On en déduit $m = 3 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

(e) $\det(\vec{u}, \vec{v}') = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$, donc $\vec{v}'$ est colinéaire à $\vec{u}$ : on a $\vec{v}' = 2\vec{u}$. Tout déplacement $a\vec{u} + b\vec{v}' = (a + 2b)\vec{u}$ est donc colinéaire à $\vec{u}$. Or $\det(\vec{u}, \overrightarrow{OT}) = 3 \times 4 - 2 \times (-1) = 14 \neq 0$, donc $\overrightarrow{OT}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. Le drone ne peut plus atteindre $T$ : avec deux vecteurs colinéaires, la décomposition n'est plus possible en général.

**Ex. 48** ★★★ **Identifier les coefficients : preuve et applications**

(a) Supposons $a \neq 0$. Alors $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. C'est impossible, donc $a = 0$. Il reste $b\vec{v} = \vec{0}$. Or $\vec{v} \neq \vec{0}$ : sinon $\vec{v}$ serait colinéaire à $\vec{u}$ (le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur). On en déduit $b = 0$.

**Ex. 48** **(suite)**

(b) On a $a\vec{u} + b\vec{v} - a'\vec{u} - b'\vec{v} = \vec{0}$, soit $(a - a')\vec{u} + (b - b')\vec{v} = \vec{0}$. D'après la question 1, $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$, donc $a = a'$ et $b = b'$ : l'écriture est unique.

(c) Le triangle $ABC$ n'est pas aplati, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. $M = N$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$. Par unicité de l'écriture, on identifie les coefficients : $m + 1 = 3$ et $2m - 5 = -2$. La première égalité donne $m = 2$, la seconde $m = \frac{3}{2}$. Les deux conditions sont incompatibles : aucun réel $m$ ne convient, $M$ et $N$ ne sont jamais confondus.

(d) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Les droites sont parallèles si $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC}$. On identifie les coefficients : sur $\overrightarrow{AC}$, $k = 3$ ; sur $\overrightarrow{AB}$, $m - 1 = -3$, donc $m = -2$. Pour $m = -2$, $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$, donc $(AP) \parallel (BC)$.

(e) La propriété exige que les deux vecteurs ne soient pas colinéaires. Ici $\det(\vec{u}, \vec{v}')$ serait nul, car $\vec{v}' = -2\vec{u}$ : les vecteurs sont colinéaires. On ne peut donc pas identifier les coefficients, et l'exemple de Zoé ne contredit pas la question 1.