1. Rappels de 6e : motifs et programmes avec une lettre

Ex. 1 ★☆☆ **Traduire un programme avec une lettre**

(a) $5(n+6)$: on ajoute 6 avant de multiplier, donc il faut une parenthèse. Vérification : $(10+6)\times 5 = 80$ et $5\times(10+6) = 80$.

(b) $5n+6$: la multiplication est faite en premier, donc pas de parenthèse. Vérification : $5\times 10+6 = 56$.

(c) $8(a-3)$. Vérification : $(10-3)\times 8 = 56$.

(d) $2{,}5t-1$. Vérification : $2{,}5\times 10-1 = 24$.

(e) x^2+9. Vérification : $10\times 10+9 = 109$.

(f) $\frac{y+1}{2}$: on prend la moitié de tout le résultat. Vérification : $(10+1)\div 2 = 5{,}5$.

Ex. 2 ★☆☆ **Retrouver le programme d'après son expression**

(a) Choisir un nombre n ; le multiplier par 7 ; ajouter 1.

(b) Choisir un nombre n ; lui ajouter 1 ; multiplier le résultat par 7. Pour $n=10$: $7\times 10+1 = 71$ et $7\times(10+1) = 77$. Les deux expressions ne sont pas égales.

(c) Non. $6(a+0{,}5)$ veut dire : ajouter 0,5, puis multiplier par 6. Pour $a=10$: $6\times(10+0{,}5) = 63$, alors que le programme de Léo donne $6\times 10+0{,}5 = 60{,}5$.

(d) C'est $\frac{n+8}{2}$, car on divise tout le résultat par 2. Pour $n=10$: le programme donne $(10+8)\div 2 = 9$, et $\frac{10}{2}+8 = 13$ ne donne pas ce résultat.

(e) Choisir x ; élever au carré ; soustraire 5. Vérification avec 10 : $10\times 10-5 = 95$.

Ex. 3 ★★☆ **Pentagones d'allumettes**

(a) Dans l'ordre : étape 1 → 5, étape 2 → 9, étape 3 → 13, étape 4 → 17. On ajoute 4 allumettes à chaque étape ($9-5=4$).

(b) L'écart est 4 et le nombre fixe est $5-4=1$. La formule est $4n+1$. Vérification : $4\times 3+1 = 13$, c'est bien la valeur du tableau.

(c) Pour $n=2$, il faut trouver 9. Inès : $4\times 2+5 = 13$, elle a pris le premier terme comme nombre fixe. Hugo : $4\times 2 = 8$, il a oublié le nombre fixe 1. La bonne formule est $4n+1$.

Ex. 3 (suite)

(d) Non. À l'étape 10 : $4\times 10+1 = 41$ allumettes, et Zoé trouve $10\times 41 = 410$. Mais avec la formule, l'étape 100 compte $4\times 100+1 = 401$ allumettes. En multipliant par 10, Zoé multiplie aussi le nombre fixe 1. Elle a donc tort.

Ex. 4 ★★☆ **Deux programmes à comparer**

(a) Programme A : $2{,}5+5 = 7{,}5$, puis $7{,}5\times 2 = 15$. Programme B : $2{,}5\times 2 = 5$, puis $5+10 = 15$. Les deux programmes donnent 15.

(b) $2\times(2{,}5+10) = 2\times 12{,}5 = 25$, et non 15. Avec la parenthèse, Maël ajoute 10 avant de multiplier par 2 : il inverse l'ordre des étapes. Dans B, on multiplie d'abord, donc il n'y a pas de parenthèse. La bonne expression est $2n+10$.

(c) On ajoute 5 avant de multiplier par 2, donc l'expression de A est $(n+5)\times 2 = 2(n+5)$. En développant : $2(n+5) = 2\times n+2\times 5 = 2n+10$. C'est l'expression du programme B : les deux programmes donnent toujours le même résultat.

(d) Faux. Avec 1 : $(1+5)\times 2 = 12$. Avec son double 2 : $(2+5)\times 2 = 14$, alors que $2\times 12 = 24$. Ce contre-exemple montre que le résultat ne double pas, car le nombre fixe 10 de $2n+10$ ne double pas.

Ex. 5 ★★★ **Le banquet de Vannes**

(a) Chaque nouvelle table ajoute 4 places. Pour 3 tables : $10+4 = 14$ places. Pour 4 tables : $14+4 = 18$ places.

(b) Chaque table apporte 4 places sur ses grands côtés (2 de chaque côté), soit $4n$ places. Il reste 1 place à chaque bout de la rangée, soit 2 places. La règle est $4n+2$ (écart 4, nombre fixe $6-4=2$). Vérification pour $n=4$: $4\times 4+2 = 18$, c'est bien la valeur du tableau.

(c) Pour 10 tables : $4\times 10+2 = 42$ places. Pour 20 tables : $4\times 20+2 = 82$ places, et non $2\times 42 = 84$. Nora a tort : en doublant 42, on compterait deux fois les 2 places des bouts.

(d) $4n+2 = 2(2n+1)$: le nombre de places est toujours un multiple de 2, donc il est pair. Or 75 est impair. D'ailleurs, 18 tables donnent $4\times 18+2 = 74$ places et 19 tables en donnent $4\times 19+2 = 78$. C'est donc impossible.

Ex. 6 ★★★ **L'ordre des étapes compte**

(a) $7+4=11$, puis $11\times 3=33$, puis $33-12=21$. Le programme donne 21.

(b) $7+4\times 3-12=7+12-12=7$, et non 21. Sans parenthèses, la multiplication passe en premier : Noé multiplie seulement 4 par 3, pas tout le résultat $n+4$. La bonne expression est $3(n+4)-12$, autrement dit $(n+4)\times 3-12$.

(c) $3(n+4)-12=3n+12-12=3n$. Le programme triple le nombre de départ. Vérification : $3\times 7=21$.

(d) L'expression de Mila est $3n+4-12=3n-8$. Pour $n=7$: $3\times 7+4-12=13$, alors que le programme de la classe donne 21. Ce contre-exemple montre que les résultats ne sont pas toujours les mêmes : l'ordre des étapes compte.

(e) Le programme donne $3n$, donc il faut un nombre dont le triple vaut 54 : $54\div 3=18$. Vérification : $(18+4)\times 3-12=66-12=54$. Il faut choisir 18.

Ex. 7 ★★★ **L'allée du jardin de Colmar**

(a) De l'étape 3 à l'étape 5, le nombre de dalles blanches augmente de $16-12=4$, en 2 étapes. D'une étape à la suivante, il augmente donc de $4\div 2=2$ dalles.

(b) Pour $n=5$: $2\times 5+12=22$, alors que le tableau indique 16. Lucas a tort : 12 est le nombre de dalles à l'étape 3, ce n'est pas le nombre fixe.

(c) L'écart est de 2. À l'étape 3, on a $2\times 3=6$ et il faut 12 dalles, donc le nombre fixe est $12-6=6$. La règle est $2n+6$. Vérification : $2\times 3+6=12$, $2\times 5+6=16$ et $2\times 8+6=22$. Explication : il y a n dalles blanches au-dessus et n en dessous de la rangée, ce qui fait $2n$, plus 3 dalles à chaque bout, ce qui fait 6.

(d) $(3+6)\times 2=18$, alors qu'il faut 12 dalles. Le programme de Sacha donne $2(n+6)=2n+12$: en ajoutant 6 avant de multiplier par 2, il compte le nombre fixe 6 deux fois.

(e) Programme : 1. Choisir n. 2. Ajouter 3. 3. Multiplier le résultat par 2. Son expression est $2(n+3)=2n+6$, c'est bien la règle. Pour 50 dalles grises : $2\times 50+6=106$. Il faut 106 dalles blanches.

2. *Écrire une expression : formules et conventions d'écriture*

Ex. 8 ★☆☆ **Supprimer ou rétablir les signes ×**

(a) $t\times 8=8t$: le nombre s'écrit devant la lettre.

(b) $8ab=8\times a\times b$

(c) $0\times c+1\times d=0+d=d$: $0\times c=0$, et on n'écrit pas le facteur 1.

(d) $6\times 7\times x=42x$: on calcule $6\times 7=42$, on n'écrit surtout pas $67x$.

(e) $11(n+2)=11\times(n+2)$

(f) $y\times y+2{,}5\times y=y^2+2{,}5y$

(g) $0{,}4t^2=0{,}4\times t\times t$

(h) $9\times(x-6)=9(x-6)$

Ex. 9 ★☆☆ **Traduire une phrase par une expression**

(a) $2k+8$

(b) $2(k+8)$: la parenthèse est obligatoire, car on double toute la somme.

(c) $2(x-4)$, et pas $2x-4$.

(d) $y-6$, et pas $6-y$.

(e) $a+7$

(f) $7a$: « fois » indique une multiplication, pas une addition.

(g) $p-1$

(h) $2m$: un entier pair est le double d'un entier.

Ex. 10 ★★☆ **Repérer et corriger des erreurs**

(a) Non. Pour $x=5$: $x^2=5\times 5=25$ alors que $2x=2\times 5=10$. Comme $25\neq 10$, les deux expressions ne sont pas égales : $x^2=x\times x$ alors que $2x=x+x$. Une égalité vraie pour une seule valeur ne suffit pas.

(b) $3n$ veut dire $3\times n$, et non « 3 suivi de n ». Pour $n=4$: $3n=3\times 4=12$. Le bon résultat est 12.

(c) Le triple porte sur toute la somme, donc l'expression correcte est $3(a+6)$. Pour $a=10$: $3\times(10+6)=3\times 16=48$ alors que $3\times 10+6=36$. Les deux résultats sont différents : l'expression de Clara est fausse.

(d) Non. Pour $t=2$: $5\times 2+4=14$ et $9\times 2=18$. Comme $14\neq 18$, l'égalité n'est pas toujours vraie. On ne peut pas additionner $5t$ et 4 : ce ne sont pas des termes semblables.

Ex. 11 ★★☆ **L'enclos des chèvres**

(a) Le périmètre est $a + b + a + b$, qu'on peut écrire $2(a + b)$ ou $2a + 2b$. Ces trois écritures conviennent. Les écritures $2a + b$ et $2ab$ ne conviennent pas. Par exemple, pour $a = 3$ et $b = 1$: $2(a + b) = 8$, mais $2a + b = 7$ et $2ab = 6$.

(b) $2 \times (12{,}5 + 8) = 2 \times 20{,}5 = 41$. Le périmètre de l'enclos mesure 41 m.

(c) L'aire est $a \times b = ab$. Pour ces valeurs : $12{,}5 \times 8 = 100$. L'aire de l'enclos est de 100 m².

(d) Le prix est égal à $4 \times 2(a + b)$, c'est-à-dire $8(a + b)$ euros. On peut aussi l'écrire $8a + 8b$.

Ex. 12 ★★★ **Le carnet de Maëlys : vrai ou faux ?**

(a) Vrai. $m \times 0 = 0$, $6 \times m \times m = 6m^2$ (le nombre se met devant et $m \times m = m^2$), et $1 \times m = m$ (on n'écrit pas le facteur 1).
Donc l'expression s'écrit $0 + 6m^2 + m = 6m^2 + m$.
L'affirmation est vraie.

(b) Faux. On ne supprime jamais le $\times$ entre deux nombres : $5 \times 8 \times r = 40r$. Contre-exemple avec $r = 1$:
$5 \times 8 \times 1 = 40$, mais $58 \times 1 = 58$. L'affirmation est fausse.

(c) Faux. « p augmenté de 5 » s'écrit $p + 5$ et « 5 fois plus que p » s'écrit $5p$. Contre-exemple avec $p = 2$:
$2 + 5 = 7$, mais $5 \times 2 = 10$. Les deux nombres sont différents, donc l'affirmation est fausse.

(d) Vrai. Le périmètre est la somme des quatre côtés : $(t + 9) + (t + 9) + (t + 9) + (t + 9) = 4 \times (t + 9)$. Tout le côté est multiplié par 4, donc la parenthèse est obligatoire. On supprime le $\times$ devant la parenthèse : $4(t + 9)$. L'affirmation est vraie.

(e) Faux. En rétablissant les $\times$ cachés, $7ab = 7 \times a \times b$: c'est un produit, pas une somme. Contre-exemple avec $a = 2$ et $b = 3$: $7 \times 2 \times 3 = 42$, mais $7 + 2 + 3 = 12$. L'affirmation est fausse.

Ex. 13 ★★★ **La tombola de Pornic**

(a) Le ticket juste après (le successeur) porte le numéro $n + 1$. Le ticket juste avant (le prédécesseur) porte le numéro $n - 1$. Le nombre qui vaut 3 de moins que n est $n - 3$.

(b) Pour $n = 20$, Jules trouve $3 - 20 = -17$, alors que $20 - 3 = 17$. « 3 de moins que n », c'est partir de n et enlever 3. Jules a fait l'inverse, et un numéro négatif n'existe même pas ici. La bonne expression est $n - 3$.

Ex. 13 **(suite)**

(c) Le double porte sur toute la différence, donc le gros lot porte le numéro $2(n - 1)$. Pour $n = 20$:
$2 \times (20 - 1) = 38$, mais $2 \times 20 - 1 = 39$. Les deux résultats sont différents, donc l'expression de Léo est fausse.

(d) $2(n - 1) = 2 \times (n - 1)$ est le double du nombre entier $n - 1$, donc c'est toujours un nombre pair : le gros lot est toujours sur un ticket gagnant. $2n$ est pair, donc $2n - 1$, qui vient juste avant lui, est toujours impair (par exemple 39 pour $n = 20$) : avec l'expression de Léo, le ticket ne serait jamais gagnant.

Ex. 14 ★★★ **Le tapis du club de judo**

(a) L'aire du carré est $x \times x = x^2$. Pour $x = 6$:
$x^2 = 6 \times 6 = 36$, mais $2x = 6 + 6 = 12$. Les résultats sont différents : x^2 veut dire $x \times x$ et $2x$ veut dire $x + x$. L'aire du carré est donc x^2, pas $2x$.

(b) L'aire de la bande est $x \times 3 = 3x$ (le nombre se met devant). Sous forme d'un produit, l'aire du tapis vaut longueur $\times$ largeur, soit $x \times (x + 3) = x(x + 3)$. Sous forme d'une somme, c'est l'aire du carré plus celle de la bande : $x^2 + 3x$.

(c) Le périmètre, c'est la somme des quatre côtés :
$x + 3 + x + x + 3 + x$, ou deux longueurs plus deux largeurs, soit $2(x + 3) + 2x$. Ces deux écritures conviennent. Pour $x = 5$, le périmètre vaut
$2 \times (5 + 3) + 2 \times 5 = 26$, alors que $2 \times 5 + 3 = 13$ et $2 \times 5 + 3 \times 2 = 16$: les écritures $2x + 3$ et $2 \times x + 3 \times 2$ ne conviennent pas.

(d) Pour $x = 4$, le périmètre vaut $2 \times (4 + 3) + 2 \times 4 = 14 + 8 = 22$, soit 22 m. Le liseré coûte $1{,}5 \times 22 = 33$, soit 33 €.

3. *Calculer la valeur d'une expression littérale*

Ex. 15 ★☆☆ **Substituer une valeur : calculs en ligne**

(a) $n^2 = 7 \times 7 = 49$ (et non $2 \times 7 = 14$).

(b) $5a = 5 \times 0{,}4 = 2$ (et non 50,4).

(c) $2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17$: on multiplie d'abord (et non $5 \times 5 = 25$).

(d) $3 \times (4 + 2) = 3 \times 6 = 18$: la parenthèse d'abord.

(e) $0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$: on remplace x aux deux endroits.

(f) $1{,}2 \times 5 - 6 = 6 - 6 = 0$.

Ex. 15 **(suite)**

(g) $(-5)+9=4$.

(h) $15-(-6)=15+6=21$.

Ex. 16 ★☆☆ **Une expression avec deux lettres**

(a) $3\times 2-4{,}5=6-4{,}5=1{,}5$.

(b) $2\times 4{,}5=9$.

(c) $2+2\times 4{,}5=2+9=11$.

(d) $2\times(4{,}5-2)=2\times 2{,}5=5$.

(e) $4{,}5\times 4{,}5-2=20{,}25-2=18{,}25$ (et non $2\times 4{,}5-2=7$).

(f) $4\times 4{,}5-9\times 2=18-18=0$.

Ex. 17 ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) Le 3 collé à x est un facteur : $3x=3\times x$. Donc $3x=3\times 7=21$, et non 37.

(b) $x^2=x\times x$, pas $2\times x$. Donc $x^2=6\times 6=36$, et non 12.

(c) Il faut calculer la parenthèse d'abord : $2\times(4+1)=2\times 5=10$, et non 9.

(d) Lina n'a pas remplacé x partout. $3\times 3+2\times 3=9+6=15$: l'expression vaut 15.

(e) La multiplication passe avant l'addition : $1+6\times 4=1+24=25$, et non 28.

Ex. 18 ★★☆ **Location de vélos à Annecy**

(a) $P=4+2{,}5\times h$.

(b) Pour $h=1$: $4+2{,}5\times 1=6{,}5$; pour $h=2$: $4+5=9$; pour $h=4$: $4+10=14$; pour $h=6$: $4+15=19$. Les prix sont donc 6,5 €, 9 €, 14 € et 19 €.

(c) $P=4+2{,}5\times 1{,}5=4+3{,}75=7{,}75$. La location coûte 7,75 €.

(d) $P=4+2{,}5\times 8=4+20=24$. Ilan a raison : 8 heures coûtent bien 24 €.

Ex. 19 ★★★ **Le défi de Malik**

(a) Pour $x=1$: $A=1\times 1+3=1+3=4$ et $B=4\times 1=4$. Pour $x=3$: $A=3\times 3+3=9+3=12$ et $B=4\times 3=12$. Pour ces deux valeurs, A et B sont égales.

(b) x^2 veut dire $x\times x$ (et pas $2\times x$). Pour $x=0$: $0\times 0+3=3$. Pour $x=2$: $2\times 2+3=7$. Pour $x=5$: $5\times 5+3=25+3=28$ (et pas $10+3$). Pour $x=1{,}5$: $1{,}5\times 1{,}5+3=2{,}25+3=5{,}25$. Ligne A : 3 ; 7 ; 28 ; 5,25.

Ex. 19 **(suite)**

(c) Pour $x=0$: $4\times 0=0$. Pour $x=2$: $4\times 2=8$. Pour $x=5$: $4\times 5=20$. Pour $x=1{,}5$: $4\times 1{,}5=6$. Ligne B : 0 ; 8 ; 20 ; 6.

(d) Malik a tort. Pour $x=5$: $A=5\times 5+3=28$ et $B=4\times 5=20$, et $28\neq 20$. Un seul contre-exemple suffit : deux valeurs qui marchent ne prouvent pas que ça marche pour tous les nombres.

Ex. 20 ★★★ **L'enclos d'Inès à Colmar**

(a) Hugo a oublié la parenthèse : $2(x+2{,}5)$ veut dire $2\times(x+2{,}5)$, donc on calcule d'abord la parenthèse. $P=2\times(3+2{,}5)+2\times 3=2\times 5{,}5+6=11+6=17$. Il faut 17 m de grillage.

(b) $\mathcal{A}=3\times(3+2{,}5)=3\times 5{,}5=16{,}5$. L'aire de l'enclos est de 16,5 m².

(c) $P=2\times(0{,}4+2{,}5)+2\times 0{,}4=2\times 2{,}9+0{,}8=5{,}8+0{,}8=6{,}6$ m. $\mathcal{A}=0{,}4\times(0{,}4+2{,}5)=0{,}4\times 2{,}9=1{,}16$ m².

(d) Pour $x=5$: $P=2\times(5+2{,}5)+2\times 5=15+10=25$ m. Pour $x=5{,}5$: $P=2\times(5{,}5+2{,}5)+2\times 5{,}5=16+11=27$ m. Avec 25 m, elle peut choisir $x=5$ (il faut exactement 25 m), mais pas $x=5{,}5$ (il manquerait 2 m).

Ex. 21 ★★★ **Trois expressions, quatre défis**

(a) On multiplie d'abord : $E=1+5\times 1{,}2=1+6=7$. On calcule d'abord la parenthèse : $F=1{,}2\times(1{,}2+4)=1{,}2\times 5{,}2=6{,}24$. $G=12-1{,}2=10{,}8$. Pour $a=1{,}2$: $E=7$, $F=6{,}24$ et $G=10{,}8$.

(b) Pour obtenir 0, il faut enlever 12 à 12, donc $a=12$. Vérification : $G=12-12=0$. Pour obtenir 15,5, qui est plus grand que 12, il faut soustraire un nombre négatif : $a=-3{,}5$. Vérification : $G=12-(-3{,}5)=12+3{,}5=15{,}5$. Donc G vaut 0 pour $a=12$ et 15,5 pour $a=-3{,}5$.

(c) C'est faux. Pour $a=1{,}2$, E est bien plus grand que F, mais un seul exemple ne prouve rien. Contre-exemple : pour $a=3$, $E=1+5\times 3=16$ et $F=3\times(3+4)=3\times 7=21$. Comme $21>16$, E n'est pas plus grand que F pour $a=3$: l'affirmation de Lou est fausse.

(d) Pour $a=0{,}8$: $E=1+5\times 0{,}8=1+4=5$; $F=0{,}8\times(0{,}8+4)=0{,}8\times 4{,}8=3{,}84$; $G=12-0{,}8=11{,}2$. C'est donc E qui vaut 5.

4. *Tester une égalité, trouver un contre-exemple*

Ex. 22 ★☆☆ **Tester une égalité pour une valeur**

(a) À gauche : $5 \times 5 - 7 = 18$; à droite : $2 \times 5 + 8 = 18$. Vraie pour $x = 5$.

(b) À gauche : $3 \times 3 + 4 = 13$; à droite : $6 \times 3 - 2 = 16$. $13 \neq 16$: fausse pour $a = 3$.

(c) À gauche : $0{,}5 \times 10 + 6 = 11$; à droite : $10 + 1 = 11$. Vraie pour $t = 10$.

(d) À gauche : $3^2 + 1 = 10$; à droite : $4 \times 3 - 2 = 10$. Vraie pour $n = 3$.

(e) À gauche : $2 \times (4 + 3) = 14$; à droite : $3 \times 4 + 1 = 13$. $14 \neq 13$: fausse pour $y = 4$.

(f) À gauche : $-3 + 9 = 6$; à droite : $12 - (-3) = 15$. $6 \neq 15$: fausse pour $x = -3$.

(g) À gauche : $1{,}2 \times 5 + 3 = 9$; à droite : $2 \times 5 - 1 = 9$. Vraie pour $a = 5$.

Ex. 23 ★☆☆ **Choisir un bon contre-exemple**

(a) $b = 0 : 0 + 0 = 0$ et $0^2 = 0$. $b = 2 : 2 + 2 = 4$ et $2^2 = 4$. $b = 4 : 4 + 4 = 8$ mais $4^2 = 16$. Seul $b = 4$ est un contre-exemple : 0 et 2 étaient de mauvais choix.

(b) $a = 0 : 0 + 7 = 7$ et $7 - 0 = 7$, ça marche. $a = 2{,}5$: $2{,}5 + 7 = 9{,}5$ mais $7 - 2{,}5 = 4{,}5$. Le contre-exemple est $a = 2{,}5$.

(c) $t = 0 : 4 \times (0 + 1) = 4$ mais $4 \times 0 + 1 = 1$. $t = 3 : 16$ mais 13. Les deux sont des contre-exemples ; un seul suffisait.

(d) $y = 1{,}25 : 1{,}25 + 5 = 6{,}25$ et $5 \times 1{,}25 = 6{,}25$, ça marche. $y = 2 : 7$ mais 10. Le contre-exemple est $y = 2$.

(e) $x = 1 : 1{,}5 \times 1 + 2 = 3{,}5$ et $2 \times 1 + 1{,}5 = 3{,}5$, ça marche. $x = 3 : 1{,}5 \times 3 + 2 = 6{,}5$ mais $2 \times 3 + 1{,}5 = 7{,}5$. Le contre-exemple est $x = 3$.

(f) $n = 3 : 2 \times 3 + 3 \times 3 = 15$ mais $5 \times 3^2 = 45$. $n = 1$: $2 \times 1 + 3 \times 1 = 5$ et $5 \times 1^2 = 5$, ça marche. Le contre-exemple est $n = 3$ (en réduisant, $2n + 3n = 5n$, et non $5n^2$).

Ex. 24 ★★☆ **Deux essais ne suffisent pas**

(a) Pour $n = 2$: à gauche $2^2 + 6 = 10$; à droite $5 \times 2 = 10$. Pour $n = 3$: à gauche $3^2 + 6 = 15$; à droite $5 \times 3 = 15$. L'égalité est vraie pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

(b) À gauche : $4^2 + 6 = 22$; à droite : $5 \times 4 = 20$. Comme $22 \neq 20$, l'égalité est fausse pour $n = 4$.

Ex. 24 (suite)

(c) Non. Deux exemples qui marchent ne prouvent rien pour les autres nombres. $n = 4$ est un contre-exemple, et un seul suffit : l'égalité n'est pas vraie pour tous les nombres.

(d) À gauche : $2{,}5^2 + 6 = 6{,}25 + 6 = 12{,}25$; à droite : $5 \times 2{,}5 = 12{,}5$. Comme $12{,}25 \neq 12{,}5$, l'égalité est fausse pour $n = 2{,}5$.

Ex. 25 ★★☆ **Vraie une seule fois ou vraie à chaque fois ?**

(a) Ligne $3a + 5$: 8 ; 11 ; 14 ; 17. Ligne $a + 11$: 12 ; 13 ; 14 ; 15. Ligne $2(a + 4)$: 10 ; 12 ; 14 ; 16. Ligne $2a + 8$: 10 ; 12 ; 14 ; 16.

(b) On compare les lignes $3a + 5$ et $a + 11$: elles ne donnent le même nombre (14) que pour $a = 3$. Dans le tableau, l'égalité est vraie seulement pour $a = 3$.

(c) À gauche : $3 \times 0{,}5 + 5 = 6{,}5$; à droite : $0{,}5 + 11 = 11{,}5$. Comme $6{,}5 \neq 11{,}5$, l'égalité est fausse pour $a = 0{,}5$.

(d) Non. Le tableau montre seulement que l'égalité est vraie pour les valeurs testées : on ne peut pas essayer tous les nombres. Pour le prouver, il faut développer : $2(a + 4) = 2a + 8$, quel que soit a.

Ex. 26 ★★★ **Le rectangle et le carré de Léo**

(a) Pour $x = 3$: le rectangle mesure 8 sur 3, son périmètre vaut $2 \times (8 + 3) = 22$ cm ; le carré a pour côté 5,5, son périmètre vaut $4 \times 5{,}5 = 22$ cm. Pour $x = 1{,}5$: rectangle $2 \times (6{,}5 + 1{,}5) = 16$ cm ; carré de côté $4 : 4 \times 4 = 16$ cm. Pour ces deux valeurs, les périmètres sont égaux.

(b) Non. Deux exemples qui marchent ne prouvent rien pour les autres nombres : on ne peut pas essayer toutes les valeurs de x. Tout ce qu'on peut dire, c'est que l'égalité est vraie pour les valeurs testées.

(c) Rectangle : $2(x + 5 + x) = 2(2x + 5) = 4x + 10$. Carré : $4(x + 2{,}5) = 4x + 10$. Les deux expressions sont les mêmes : les deux périmètres sont égaux pour toutes les valeurs de x. Cette fois, c'est prouvé.

(d) Faux. Pour $x = 3$, l'aire du rectangle vaut $8 \times 3 = 24$ cm² et celle du carré vaut $5{,}5 \times 5{,}5 = 30{,}25$ cm². Comme $24 \neq 30{,}25$, $x = 3$ est un contre-exemple : les aires ne sont pas toujours égales.

Ex. 27 ★★★ **Ni toujours vraie, ni jamais vraie**

(a) Pour $a = 2$: à gauche $4 \times 2 - 3 = 5$; à droite $2 \times 2 + 7 = 11$. $5 \neq 11$: fausse. Pour $a = 5$: à gauche $4 \times 5 - 3 = 17$; à droite $2 \times 5 + 7 = 17$: vraie. Pour $a = 7{,}5$: à gauche $4 \times 7{,}5 - 3 = 27$; à droite $2 \times 7{,}5 + 7 = 22$. $27 \neq 22$: fausse.

(b) Non. L'égalité est fausse pour $a = 2$, mais elle est vraie pour $a = 5$ (les deux membres valent 17). Une valeur qui ne marche pas ne dit rien sur les autres valeurs.

(c) Non. Un exemple qui marche ne prouve rien. Pour $a = 2$, les membres valent 5 et 11 : $a = 2$ est un contre-exemple, donc l'égalité n'est pas vraie pour tous les nombres. Elle est vraie pour certaines valeurs seulement.

(d) Le membre de gauche augmente de 4 (le coefficient de a est 4) et celui de droite de 2. Pour $a = 5$, les deux membres valent 17. Ensuite, le membre de gauche grandit plus vite que celui de droite : il devient plus grand et ne peut plus lui être égal. L'égalité est donc fausse pour tout a plus grand que 5.

Ex. 28 ★★★ **Quatre affirmations à trancher**

(a) Faux. Pour $y = 2$: à gauche $5 \times 2 - 2 = 8$; à droite 5. $8 \neq 5$: $y = 2$ est un contre-exemple. En réduisant, on trouve $5y - y = 4y$, et non 5.
(L'égalité marche pour $y = 1{,}25$, mais une seule valeur ne suffit pas.)

(b) Faux. Pour $y = 0$: $y + 6 = 0 + 6 = 6$ et $6 - y = 6 - 0 = 6$. Les deux nombres sont égaux, donc $y + 6$ n'est pas plus grand que $6 - y$: $y = 0$ est un contre-exemple.

(c) Vrai. On développe : $2(y + 1{,}5) = 2 \times y + 2 \times 1{,}5 = 2y + 3$. Le calcul est valable pour tous les nombres y, pas seulement pour quelques exemples.

(d) Faux. Pour $y = 0{,}5$: $y^2 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$, et 0,25 est plus petit que 0,5. $y = 0{,}5$ est un contre-exemple : l'affirmation est fausse.

5. *Somme ou produit ? Développer et factoriser $k(a + b)$*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : somme, différence ou produit ?**

(a) On calcule d'abord $x + 8$, puis on multiplie par 5 : c'est un produit, de facteurs 5 et $(x + 8)$.

(b) On calcule d'abord $5x = 5 \times x$, puis on ajoute 8 : c'est une somme, de termes $5x$ et 8.

Ex. 29 (suite)

(c) La multiplication est prioritaire : on calcule $7 \times a$, puis on ajoute 2. C'est une somme.

(d) On calcule d'abord $n - 4$, puis on multiplie par 9 : c'est un produit, de facteurs $(n - 4)$ et 9, même si le facteur 9 est écrit à droite.

(e) On calcule $3t = 3 \times t$, puis on soustrait 11 : c'est une différence.

(f) On calcule $y + 6$, puis on multiplie par 2, et on finit en ajoutant 1 : c'est une somme.

(g) $6ab = 6 \times a \times b$: il n'y a que des multiplications, c'est un produit.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : développer**

(a) $9(x + 4) = 9 \times x + 9 \times 4 = 9x + 36$
(le 4 est lui aussi multiplié par 9).

(b) $6(3n + 5) = 6 \times 3n + 6 \times 5 = 18n + 30$
(on fait $6 \times 3 = 18$, on n'écrit pas $63n$).

(c) $7(t - 2) = 7 \times t - 7 \times 2 = 7t - 14$: le signe $-$ reste.

(d) $(a + 8) \times 5 = a \times 5 + 8 \times 5 = 5a + 40$.

(e) $0{,}5(8x + 14) = 0{,}5 \times 8x + 0{,}5 \times 14 = 4x + 7$.

(f) $x(x + 6) = x \times x + x \times 6 = x^2 + 6x$.

(g) $1{,}2(5y - 10) = 1{,}2 \times 5y - 1{,}2 \times 10 = 6y - 12$.

Ex. 31 ★☆☆ **Factoriser**

(a) $5x + 35 = 5 \times x + 5 \times 7 = 5(x + 7)$. Vérification : $5(x + 7) = 5x + 35$.

(b) $15a - 15 = 15 \times a - 15 \times 1 = 15(a - 1)$: on écrit 1 dans la parenthèse, pas 0. Vérification : $15(a - 1) = 15a - 15$.

(c) $8n + 12 = 4 \times 2n + 4 \times 3 = 4(2n + 3)$. Avec $2(4n + 6)$, ce n'est pas fini : $4n$ et 6 ont encore 2 en commun. Vérification : $4(2n + 3) = 8n + 12$.

(d) $a^2 + 13a = a \times a + a \times 13 = a(a + 13)$. Vérification : $a(a + 13) = a^2 + 13a$.

(e) $14t - 21 = 7 \times 2t - 7 \times 3 = 7(2t - 3)$. Vérification : $7(2t - 3) = 14t - 21$.

(f) $10 + 10y = 10 \times 1 + 10 \times y = 10(1 + y)$. Vérification : $10(1 + y) = 10 + 10y$.

(g) $3x^2 - 4x = x \times 3x - x \times 4 = x(3x - 4)$. Vérification : $x(3x - 4) = 3x^2 - 4x$.

Ex. 32 ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) Faux. Contre-exemple avec $x = 1$: $3(1 + 9) = 30$ mais $3 \times 1 + 9 = 12$. Lina n'a pas multiplié le 9 par 3. La bonne réponse est $3(x + 9) = 3x + 27$.

(b) Faux. Contre-exemple avec $a = 1$: $4 \times 6 \times 1 = 24$ mais $46 \times 1 = 46$. On ne colle pas les chiffres, on multiplie : $4 \times 6a = 4 \times 6 \times a = 24a$.

(c) Faux. Contre-exemple avec $x = 2$: $16 \times 2 - 16 = 16$ mais $16 \times (2 - 0) = 32$. En redéveloppant, $16(x - 0) = 16x$: on ne retrouve pas $16x - 16$. Comme $16 = 16 \times 1$, on a $16x - 16 = 16(x - 1)$.

(d) Elle n'a pas complètement raison. L'égalité est juste, car $2(9x + 6) = 18x + 12$. Mais $9x$ et 6 ont encore 3 en commun : le plus grand facteur commun est 6, et $18x + 12 = 6(3x + 2)$.

(e) Faux. Contre-exemple avec $x = 3$: $3 \times (3 + 4) = 21$ mais $2 \times 3 + 4 \times 3 = 18$. Lina a écrit $x \times x = 2x$, alors que $x \times x = x^2$. La bonne réponse est $x(x + 4) = x^2 + 4x$.

Ex. 33 ★★★ **Les parcelles de Maëlys**

(a) Aire de A $= 5(3x + 4) = 5 \times 3x + 5 \times 4 = 15x + 20$. On multiplie 5 par 3 : $5 \times 3x = 15x$, et pas $53x$. L'aire de A est $15x + 20$ m².

(b) $x^2 + 9x = x \times x + x \times 9 = x(x + 9)$. Comme l'aire vaut largeur × longueur et que la largeur est x, la longueur de la parcelle B est $x + 9$.

(c) Aire de A : $15 \times 4 + 20 = 60 + 20 = 80$. Aire de B : $4^2 + 9 \times 4 = 16 + 36 = 52$. Aire totale : $80 + 52 = 132$. Les deux parcelles mesurent 132 m² au total.

(d) $P = 2(3x + 4) + 2 \times 5 = 6x + 8 + 10 = 6x + 18$. Le plus grand facteur commun de $6x$ et 18 est 6 : $6x + 18 = 6(x + 3)$. Vérification : $6(x + 3) = 6x + 18$. Le périmètre est $6(x + 3)$ m. Attention : $2(3x + 9)$ ou $3(2x + 6)$ ne prennent pas le plus grand facteur.

(e) Elle a raison. On a $P = 6(x + 3)$. Si x est entier, $x + 3$ est aussi un entier, donc P vaut 6 fois un entier. Le périmètre de A est donc toujours un multiple de 6.

Ex. 34 ★★★ **Deux programmes jumeaux ?**

(a) Programme A : $7 \times 4 = 28$, puis $28 + 10 = 38$, puis $38 \times 0{,}5 = 19$. Programme B : $7 - 3 = 4$, puis $4 \times 2 = 8$, puis $8 + 11 = 19$. Les deux programmes donnent 19.

Ex. 34 **(suite)**

(b) Résultat de A : $0{,}5(4t + 10) = 0{,}5 \times 4t + 0{,}5 \times 10 = 2t + 5$. Le facteur 0,5 multiplie les deux termes, 10 compris.

(c) Résultat de B : $(t - 3) \times 2 + 11 = t \times 2 - 3 \times 2 + 11 = 2t - 6 + 11 = 2t + 5$. Le signe $-$ est conservé quand on développe.

(d) Les deux programmes donnent le même résultat. En effet, pour tout nombre t, A donne $2t + 5$ et B donne aussi $2t + 5$. Les deux programmes donnent donc toujours le même résultat.

(e) Elle se trompe. On calcule d'abord $t - 3$, puis on multiplie par 2, et on termine en ajoutant 11. La dernière opération est une addition, donc l'expression est une somme (de termes $(t - 3) \times 2$ et 11).

Ex. 35 ★★★ **Enquête sur les entiers consécutifs**

(a) L'entier qui suit n est $n + 1$. Celui qui vient juste après est $n + 2$.

(b) $S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + n + 1 + 2 = 3n + 3$.

(c) $3n + 3 = 3 \times n + 3 \times 1 = 3(n + 1)$. Il reste 1 dans la parenthèse, pas 0. Vérification : $3(n + 1) = 3n + 3$. Donc $S = 3(n + 1)$.

(d) $27 + 28 + 29 = 84$ et, pour $n = 27$, $3(27 + 1) = 3 \times 28 = 84$. On a bien le même résultat. Comme $n + 1$ est un entier, $S = 3(n + 1)$ vaut 3 fois un entier. La somme de trois entiers consécutifs est donc toujours un multiple de 3 (c'est le triple de l'entier du milieu).

(e) C'est faux. Contre-exemple : $5 + 6 + 7 + 8 = 26$ et $26 = 4 \times 6 + 2$, donc 26 n'est pas un multiple de 4. D'ailleurs, pour tout n : $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 4(n + 1) + 2$. Le reste est toujours 2, donc cette somme n'est jamais un multiple de 4.

6. *Réduire une expression*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : regrouper les termes semblables**

(a) $a + 6a = 1a + 6a = 7a$ (le coefficient de a est 1 : ce n'est pas $6a^2$).

(b) $7p - p = 7p - 1p = 6p$.

(c) $5n - 5n = 0n = 0$.

(d) $1{,}4x + 2{,}9x = (1{,}4 + 2{,}9)x = 4{,}3x$.

Ex. 36 **(suite)**

(e) Les termes en y : $3y + 4y = 7y$; les nombres : $8 - 5 = 3$.
Donc $8 + 3y - 5 + 4y = 7y + 3$.

(f) Les termes en b : $4b + 0{,}5b = 4{,}5b$; le nombre 7 reste seul.
Donc $4b + 7 + 0{,}5b = 4{,}5b + 7$.

(g) $6m - 6m = 0$, il reste le nombre : $6m + 2 - 6m = 2$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : réduite ou pas ?**

(a) $x + x = 1x + 1x = 2x$ (une addition).

(b) $x \times x = x^2$
(une multiplication : ce n'est pas $2x$).

(c) Déjà réduite : un terme en x et un nombre seul ne s'ajoutent pas. Ce n'est pas $11x$: pour $x = 2$, $6 \times 2 + 5 = 17$ alors que $11 \times 2 = 22$.

(d) Déjà réduite : x^2 et x ne sont pas semblables. Ce n'est pas $8x^3$: pour $x = 2$, $2 \times 2^2 + 6 \times 2 = 8 + 12 = 20$ alors que $8 \times 2^3 = 64$.

(e) Les deux termes sont en x^2 : $2x^2 + 5x^2 = 7x^2$.

(f) $t + t + t = 3t$.

(g) Déjà réduite : ce n'est pas $13n$
(pour $n = 3$, $8 + 5 \times 3 = 23$ alors que $13 \times 3 = 39$).

Ex. 38 ★★☆ **Développer d'abord, puis réduire**

(a) $A = 5x + 10 + 3x = 8x + 10$. La forme réduite est $A = 8x + 10$.

(b) $B = 3a + 12 + 6a + 6$; les termes en a : $3a + 6a = 9a$; les nombres : $12 + 6 = 18$.
Donc $B = 9a + 18$.

(c) $C = 2{,}5n - 5 + 1{,}5n$; les termes en n : $2{,}5n + 1{,}5n = 4n$.
Donc $C = 4n - 5$.

(d) Inès n'a pas multiplié 7 par 4 : $4(t + 7) = 4t + 28$.
Donc $4(t + 7) + t = 4t + 28 + t = 5t + 28$.

Ex. 39 ★★☆ **Un programme de calcul à réduire**

(a) $5 + 3 = 8$; $8 \times 4 = 32$; le double de 5 est 10 ; $32 + 10 = 42$. Le programme donne 42.

(b) Après l'étape 2 : $x + 3$; après l'étape 3 : $4(x + 3)$; après l'étape 4 : $4(x + 3) + 2x$.

(c) $4(x + 3) + 2x = 4x + 12 + 2x = 6x + 12$. Le résultat du programme est $6x + 12$.

Ex. 39 **(suite)**

(d) Pour $x = 5$: $6 \times 5 + 12 = 30 + 12 = 42$. On retrouve 42, la forme réduite est cohérente.

Ex. 40 ★★★ **Le brouillon de Léna**

(a) Membre de gauche : $7 \times 2 + 3 = 14 + 3 = 17$. Membre de droite : $10 \times 2 = 20$. Comme $17 \neq 20$, l'égalité (1) est fausse. $7t + 3$ est déjà réduite : on n'ajoute pas un terme en t et un nombre seul.

(b) Pour $t = 2$: membre de gauche $2 + 5 \times 2 = 2 + 10 = 12$; membre de droite $5 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$. Comme $12 \neq 20$, l'égalité (2) est fausse. En fait, $t + 5t = 1t + 5t = 6t$: il y a un coefficient 1 caché devant t.

(c) Non. Pour $t = 2$: membre de gauche $4 \times 2^2 + 3 \times 2 = 16 + 6 = 22$; membre de droite $7 \times 2^3 = 7 \times 8 = 56$. Comme $22 \neq 56$, l'égalité (3) est fausse. Un essai qui marche ne prouve rien. t^2 et t ne sont pas des termes semblables : $4t^2 + 3t$ est déjà réduite.

(d) $9t - t = 9t - 1t = (9 - 1)t = 8t$. Léna a oublié que $t = 1t$: elle a enlevé la lettre au lieu d'enlever 1 au coefficient. Vérification pour $t = 3$: $9 \times 3 - 3 = 27 - 3 = 24$ et $8 \times 3 = 24$. Les deux valeurs sont égales.

(e) $t \times t = t^2$; les termes en t : $3t + t + t = 5t$; les nombres : $8 - 2 = 6$.
Donc $B = t^2 + 5t + 6$. Vérification pour $t = 2$: $8 + 2 \times 2 - 2 + 3 \times 2 + 2 + 2 = 8 + 4 - 2 + 6 + 2 + 2 = 20$ et $2^2 + 5 \times 2 + 6 = 4 + 10 + 6 = 20$. Le résultat est juste.

Ex. 41 ★★★ **Le potager de Chloé**

(a) Le périmètre d'un rectangle vaut 2× longueur + 2× largeur, donc $P = 2(2a + 3) + 2(a + 1{,}5)$.

(b) $P = 2 \times 2a + 2 \times 3 + 2 \times a + 2 \times 1{,}5 = 4a + 6 + 2a + 3$. Les termes en a : $4a + 2a = 6a$; les nombres : $6 + 3 = 9$.
Donc $P = 6a + 9$.

(c) Longueur : $2 \times 4 + 3 = 11$ m. Largeur : $4 + 1{,}5 = 5{,}5$ m. Périmètre : $2 \times 11 + 2 \times 5{,}5 = 22 + 11 = 33$ m. Forme réduite : $6 \times 4 + 9 = 24 + 9 = 33$. On trouve la même valeur, ce qui confirme le calcul.

(d) Le périmètre du carré vaut $4(1{,}5a + 2{,}25) = 4 \times 1{,}5a + 4 \times 2{,}25 = 6a + 9$. C'est la même expression réduite que P, donc les deux périmètres sont égaux, quel que soit a.

Ex. 41 (suite)

(e) Non. Pour $a = 2$: $6 \times 2 + 9 = 12 + 9 = 21$, alors que $15 \times 2 = 30$. Comme $21 \neq 30$, Tom a tort : il a ajouté $6a$ et 9, qui ne sont pas des termes semblables. $6a + 9$ est déjà réduite.

Ex. 42 ★★★ Trois programmes à comparer

(a) Programme A : $3 \times 3 = 9$; $9 + 7 = 16$; $16 \times 2 = 32$. Programme B : $3 + 4 = 7$; $7 \times 5 = 35$; $35 + 3 = 38$; $38 - 6 = 32$. Les deux programmes donnent 32.

(b) Un essai ne prouve rien pour tous les nombres, il faut utiliser une lettre. Programme A : $2(3n + 7) = 2 \times 3n + 2 \times 7 = 6n + 14$. Le résultat de A est $6n + 14$.

(c) Programme B : $5(n + 4) + n - 6 = 5n + 20 + n - 6$. Les termes en n : $5n + n = 6n$; les nombres : $20 - 6 = 14$.
Donc B donne $6n + 14$. A et B ont la même expression réduite, donc Yanis a raison : les deux programmes donnent toujours le même résultat. Mais c'est le calcul littéral qui le prouve, pas son essai.

(d) Avec la forme réduite : $6 \times 2{,}5 + 14 = 15 + 14 = 29$. Avec le programme A : $3 \times 2{,}5 = 7{,}5$; $7{,}5 + 7 = 14{,}5$; $14{,}5 \times 2 = 29$. On trouve bien 29 les deux fois.

(e) Avec n : $7n + 20 - 7n$. Les termes en n : $7n - 7n = 0n = 0$. Il reste 20. Quel que soit le nombre choisi, le programme C donne toujours 20.

7. *Problèmes : périmètres, aires et formules*

Ex. 43 ★☆☆ Périmètre ou aire ?

(a) $t + t + t + t = 4t$.

(b) $t \times t = t^2$.

(c) $4(a + 6) = 4 \times a + 4 \times 6 = 4a + 24$
(c'est un produit, pas une somme de côtés).

(d) $2(a + 6) + 2 \times 4 = 2a + 12 + 8 = 2a + 20$.

(e) $2x \times x = 2x^2$.

(f) $3 \times 1{,}5n = 4{,}5n$.

Ex. 44 ★☆☆ Factoriser des formules

(a) $6x + 18 = 6 \times x + 6 \times 3 = 6(x + 3)$.

(b) $14a - 7 = 7 \times 2a - 7 \times 1 = 7(2a - 1)$.

(c) $15 + 10n = 5 \times 3 + 5 \times 2n = 5(3 + 2n)$.

(d) $0{,}5t + 3 = 0{,}5 \times t + 0{,}5 \times 6 = 0{,}5(t + 6)$.

(e) $x^2 + 7x = x \times x + x \times 7 = x(x + 7)$.

Ex. 44 (suite)

(f) $11 = 11 \times 1$, donc il reste 1 et pas 0 : $11y + 11 = 11(y + 1)$. D'ailleurs, $11(y + 0) = 11y$, pas $11y + 11$.

(g) $4x + 20 = 4 \times x + 4 \times 5 = 4(x + 5)$. Le périmètre vaut 4 fois le côté, donc le côté du carré mesure $x + 5$.

Ex. 45 ★★☆ Le potager de Nadia

(a) Le côté commun n'est pas sur le bord. Il reste 3 côtés du carré et 3 côtés du rectangle : $P = 3x + x + 2{,}5 + 2{,}5 = 4x + 5$.

(b) $A = x^2 + 2{,}5x = x(x + 2{,}5)$.

(c) Pour $x = 4$: $4 \times 4 + 5 = 21$. Pour $x = 7{,}5$: $4 \times 7{,}5 + 5 = 35$. Le périmètre mesure 21 m, puis 35 m.

(d) $4^2 + 2{,}5 \times 4 = 16 + 10 = 26$. L'aire de la figure est de 26 m².

(e) On convertit d'abord : 150 cm = 1,5 m. $4 \times 1{,}5 + 5 = 6 + 5 = 11$. Le périmètre mesure 11 m.

Ex. 46 ★★☆ Location de vélos à Annecy

(a) Le prix comprend le forfait et 3,5 € pour chacune des n heures : $P = 7 + 3{,}5n$
(en €).

(b) Un seul essai ne prouve rien. On développe : $3{,}5(n + 2) = 3{,}5n + 3{,}5 \times 2 = 3{,}5n + 7$. C'est la même forme réduite que $7 + 3{,}5n$, donc Malo a raison pour toutes les valeurs de n.

(c) Faux. Contre-exemple pour $n = 2$: $10{,}5 \times 2 = 21$, mais $7 + 3{,}5 \times 2 = 7 + 7 = 14$. Comme $21 \neq 14$, la formule de Lina est fausse
(elle ajoute le forfait aux 3,5 € avant de multiplier).

(d) $7 + 3{,}5 \times 3 = 7 + 10{,}5 = 17{,}5$ et $7 + 3{,}5 \times 6 = 7 + 21 = 28$. On paie 17,50 € pour 3 h et 28 € pour 6 h.

Ex. 47 ★★★ Le jardin de Rodez

(a) $P = (x + 7) + 5 + (x + 7) + 5 = x + x + 7 + 7 + 5 + 5 = 2x + 24$. Le périmètre du jardin est $P = 2x + 24$ (en m).

(b) $A = 5(x + 7) = 5 \times x + 5 \times 7 = 5x + 35$. L'aire du jardin est $A = 5x + 35$ (en m²). Attention : le 5 multiplie les deux termes de la parenthèse.

(c) Pour $x = 1$: $5 \times 1 + 7 = 12$, mais $5(1 + 7) = 5 \times 8 = 40$. Comme $12 \neq 40$, Yanis a tort : il a oublié de multiplier 7 par 5. L'aire est $5x + 35$.

Ex. 47 **(suite)**

(d) $2x + 24 = 2 \times x + 2 \times 12 = 2(x + 12)$. Vérification : $2(x + 12)$ redonne bien $2x + 24$.
Donc $P = 2(x + 12)$.

(e) $1\,300$ cm $= 13$ m, donc $x = 13$. $P = 2 \times 13 + 24 = 26 + 24 = 50$ et $A = 5 \times 13 + 35 = 65 + 35 = 100$. Le jardin a un périmètre de 50 m et une aire de 100 m².

Ex. 48 ★★★ **Le défi des entiers consécutifs**

(a) Le successeur de n est $n + 1$; le successeur de $n + 1$ est $n + 2$. Les trois entiers sont n, $n + 1$ et $n + 2$.

(b) $S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + n + 1 + 2 = 3n + 3$. La somme des trois entiers est $S = 3n + 3$.

(c) $3n + 3 = 3 \times n + 3 \times 1 = 3(n + 1)$ (il reste 1, pas 0). S s'écrit $3\times$ un entier, donc S est toujours un multiple de 3.

(d) L'entier du milieu est $n + 1$ et $S = 3(n + 1)$: la somme est donc toujours le triple de l'entier du milieu. Par exemple, $14 + 15 + 16 = 45 = 3 \times 15$, mais c'est la forme factorisée qui le prouve pour tout n.

(e) Faux. Contre-exemple : $3 + 4 = 7$, et 7 n'est pas un multiple de 2. En effet, $n + (n + 1) = 2n + 1$: c'est un nombre impair.

Ex. 49 ★★★ **Les deux tarifs du théâtre de Dijon**

(a) Le prix comprend l'adhésion fixe et 4,5 € pour chacun des n spectacles : $A = 4{,}5n + 12$ (en €).

(b) Pour $n = 2$: $12 \times 2 + 4{,}5 = 28{,}5$, mais le vrai prix est $4{,}5 \times 2 + 12 = 9 + 12 = 21$. Comme $28{,}5 \neq 21$, Hugo se trompe : il a inversé l'adhésion et le prix d'un spectacle.

(c) $B = 1{,}5 \times 3n + 1{,}5 \times 8 = 4{,}5n + 12$. On obtient exactement A : les deux formules sont égales pour toutes les valeurs de n, donc elles donnent toujours le même prix.

(d) Pour $n = 2$: 21 ; pour $n = 4$: $4{,}5 \times 4 + 12 = 30$; pour $n = 6$: $4{,}5 \times 6 + 12 = 39$; pour $n = 10$: $4{,}5 \times 10 + 12 = 57$.

(e) Dans le tableau, le prix 57 € correspond à $n = 10$. Zoé a vu 10 spectacles dans l'année.