1. Rappels de 5e : écrire et calculer une expression

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : les conventions d'écriture**

(a) Le nombre s'écrit devant la lettre.
Donc $y \times 9 = 9y$.

(b) $1 \times t = t$: on n'écrit pas le coefficient 1.
Donc $1 \times t = t$.

(c) On ajoute deux fois a : $a + a = 2 \times a$.
Donc $a + a = 2a$
(et pas a^2).

(d) On multiplie a par lui-même.
Donc $a \times a = a^2$
(et pas $2a$).

(e) Entre deux nombres, on ne supprime jamais le signe $\times$: $6 \times 8 = 48$. Écrire 68 serait faux.

(f) Le nombre s'écrit devant la parenthèse et on supprime le $\times$.
Donc $(x - 3) \times 4 = 4(x - 3)$.

(g) On multiplie d'abord les nombres : $2 \times 5 = 10$.
Donc $2 \times x \times 5 = 10x$.

(h) Le nombre s'écrit devant, puis les lettres.
Donc $a \times 3 \times b = 3ab$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : calculer la valeur d'une expression**

(a) $3x = 3 \times 4 = 12$ (et pas 34).
Donc $3x = 12$.

(b) $-x$ est l'opposé de x : $-(-3) = 3$.
Donc $-x = 3$.

(c) $x^2 = (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$.
Donc $x^2 = 25$.

(d) On calcule d'abord le carré, puis on prend l'opposé : $-(-5)^2 = -25$.
Donc $-x^2 = -25$.

(e) $6 \times (-2) - 7 = -12 - 7 = -19$.
Donc $6x - 7 = -19$.

(f) La puissance d'abord : $2 \times 3^2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 18 + 1 = 19$.
Donc $2x^2 + 1 = 19$.

Ex. 2 (suite)

(g) Le $\times$ avant le $-$: $4 - 0{,}5 \times 6 = 4 - 3 = 1$.
Donc $4 - 0{,}5y = 1$.

(h) $(-1)^2 + 4 \times (-1) = 1 - 4 = -3$.
Donc $t^2 + 4t = -3$.

Ex. 3 ★★☆ **Traduire une phrase et nommer une expression**

(a) La moitié de la somme : $\frac{a+8}{2}$, qui vaut $\frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$.
La somme de la moitié : $\frac{a}{2} + 8$, qui vaut $\frac{6}{2} + 8 = 3 + 8 = 11$. Les deux expressions ne sont pas égales.

(b) Le successeur de n est $n + 1$, donc son carré s'écrit $(n + 1)^2$. Pour $n = 3$: $(3 + 1)^2 = 4^2 = 16$, mais $3^2 + 1 = 10$.
Donc Lucas a tort : $n^2 + 1$ est le successeur du carré de n.

(c) Le triple du carré de x s'écrit $3x^2$. Pour $x = -6$: $3 \times (-6)^2 = 3 \times 36 = 108$.
Donc $3x^2 = 108$.

(d) A : on multiplie en dernier, donc c'est un produit de facteurs 2 et $(y + 9)$. B : on soustrait en dernier, donc c'est une différence de termes y^2 et $8y$. C : on ajoute en dernier, donc c'est une somme de termes 7 et $3y$.

Ex. 4 ★★☆ **Calculer de tête avec la distributivité**

(a) $7 \times 99 = 7 \times (100 - 1) = 700 - 7 = 693$.
Donc $7 \times 99 = 693$.

(b) Inès a oublié de multiplier le 1 par 6 : il faut des parenthèses. $6 \times 49 = 6 \times (50 - 1) = 300 - 6 = 294$.
Donc Inès a tort : $6 \times 49 = 294$.

(c) Le facteur commun est 25 : $25 \times 13 + 25 \times 7 = 25 \times (13 + 7) = 25 \times 20 = 500$.

(d) Le facteur commun est 1,5 : $1{,}5 \times (37 + 63) = 1{,}5 \times 100 = 150$.

Ex. 5 ★★★ **La copie de Lina : repérer et corriger**

(a) Lina a tort : $5x$ veut dire $5 \times x$, et 5×3 ne s'écrit pas 53. On calcule $5 \times 3 + 2 = 15 + 2 = 17$.
Donc pour $x = 3$, $5x + 2 = 17$.

(b) Lina a tort : elle a oublié les parenthèses autour de -4, et -4^2 est l'opposé de 4^2. On calcule $(-4)^2 + (-4) = 16 - 4 = 12$.
Donc pour $x = -4$, $x^2 + x = 12$.

Ex. 5 **(suite)**

(c) Lina a tort : $a + a = 2a$ mais $a \times a = a^2$. Pour $a = 3$: $3 + 3 + 3 \times 3 = 6 + 9 = 15$, alors que $3 \times 3^2 = 3 \times 9 = 27$. Comme $15 \neq 27$, son égalité est fausse.
Donc $a + a + a \times a = a^2 + 2a$.

(d) Lina a tort sur le premier terme : pour $y = -2$, $-y = -(-2) = 2$. Le second terme est juste : $2 \times (-2)^2 = 2 \times 4 = 8$. On calcule $2 + 8 = 10$.
Donc pour $y = -2$, $-y + 2y^2 = 10$.

Ex. 6 ★★★ **Jade et Tom testent leurs phrases**

(a) $A = 2(t + 6)$: on calcule d'abord la somme, puis on multiplie par 2. La dernière opération est une multiplication, donc A est un produit (facteurs 2 et $(t + 6)$). $B = 2t + 6$: on ajoute en dernier, donc B est une somme (termes $2t$ et 6).

(b) Pour $t = -4$: $A = 2 \times (-4 + 6) = 2 \times 2 = 4$ et $B = 2 \times (-4) + 6 = -8 + 6 = -2$. Comme $4 \neq -2$, $t = -4$ est un contre-exemple.
Donc Jade a tort.

(c) Faux. Pour $n = 5$: $2n = 10$ et l'entier qui le suit est 11. Mais $2(n + 1) = 2 \times 6 = 12$, c'est le nombre pair suivant.
Donc le successeur de $2n$ est $2n + 1$.

(d) Le prédécesseur de $2n$ est $2n - 1$. La somme de $2n$ et de son successeur est $2n + (2n + 1)$. Pour $n = 7$: $2 \times 7 + (2 \times 7 + 1) = 14 + 15 = 29$.
Donc cette somme vaut 29.

Ex. 7 ★★★ **Un programme de calcul sous la loupe**

(a) Le carré de x est x^2 et le double de x est $2x$, donc $A = x^2 - 2x$. On soustrait en dernier, donc A est une différence : c'est aussi la somme des termes x^2 et $-2x$.

(b) Pour $x = -7$: $A = (-7)^2 - 2 \times (-7) = 49 + 14 = 63$.
Pour $x = 0{,}5$: $A = 0{,}5^2 - 2 \times 0{,}5 = 0{,}25 - 1 = -0{,}75$.
Donc on trouve 63 et $-0{,}75$.

(c) Pour $x = 98$: $A = 98^2 - 2 \times 98 = 98 \times 98 - 98 \times 2 = 98 \times (98 - 2) = 98 \times 96$, par distributivité. Ensuite $96 \times 98 = 96 \times (100 - 2) = 9\,600 - 192 = 9\,408$.
Donc pour $x = 98$, $A = 9\,408$.

(d) Emma n'a pas respecté les priorités : elle a fait $9 - 2$ avant la multiplication. La multiplication passe avant la soustraction : $3^2 - 2 \times 3 = 9 - 6 = 3$.
Donc avec 3, le programme donne 3.

2. *Développer avec la distributivité simple et des relatifs*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : distribuer un nombre**

(a) $A = 7 \times y + 7 \times 3 = 7y + 21$.
Donc $A = 7y + 21$
(le 7 multiplie aussi le 3).

(b) $B = (-9) \times t + (-9) \times (-4) = -9t + 36$.
Donc $B = -9t + 36$.

(c) $C = (-6) \times 2a + (-6) \times 4 = -12a - 24$.
Donc $C = -12a - 24$.

(d) $D = x \times 5 - 8 \times 5 = 5x - 40$.
Donc $D = 5x - 40$.

(e) $E = 0{,}5 \times 8x - 0{,}5 \times 2 = 4x - 1$.
Donc $E = 4x - 1$.

(f) $F = \frac{1}{3} \times 9y + \frac{1}{3} \times 6 = 3y + 2$.
Donc $F = 3y + 2$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : facteur littéral, signe − et trois termes**

(a) $A = x \times x + x \times 4 = x^2 + 4x$.
Donc $A = x^2 + 4x$
($x \times x = x^2$, pas $2x$).

(b) $B = 3a \times 2a - 3a \times 5 = 6a^2 - 15a$.
Donc $B = 6a^2 - 15a$.

(c) $C = (-t) \times t + (-t) \times 7 = -t^2 - 7t$.
Donc $C = -t^2 - 7t$.

(d) On change le signe de chaque terme : $D = -6x + 9$.
Donc $D = -6x + 9$.

(e) $E = y \times 5 - y \times 2y = 5y - 2y^2$.
Donc $E = 5y - 2y^2$.

(f) $F = 2 \times 3y^2 - 2 \times y + 2 \times 4 = 6y^2 - 2y + 8$.
Donc $F = 6y^2 - 2y + 8$.

(g) $G = (-4) \times x^2 + (-4) \times 2x + (-4) \times (-3) = -4x^2 - 8x + 12$.
Donc $G = -4x^2 - 8x + 12$.

Ex. 10 ★★☆ **Les erreurs de Léna**

(a) Léna a oublié de multiplier le second terme par 4. $A = 4 \times x + 4 \times 6 = 4x + 24$.
Donc $A = 4x + 24$.

(b) Avec un facteur négatif, tous les signes changent : $(-2) \times (-5) = 10$. $B = (-2) \times 3y + (-2) \times (-5) = -6y + 10$.
Donc $B = -6y + 10$.

Ex. 10 **(suite)**

(c) $5x \times 2x = 10x^2$, pas $10x$, car $x \times x = x^2$. $C = 5x \times 2x + 5x \times 3 = 10x^2 + 15x$.
Donc $C = 10x^2 + 15x$.

(d) Le développement $6t - 12$ est juste, mais $6t$ et -12 ne sont pas des termes semblables : on ne peut pas les regrouper. De plus, la consigne demandait seulement de développer.
Donc $D = 6t - 12$.

Ex. 11 ★★☆ **Retrouver le facteur**

(a) $3 \times x = 3x$: le facteur est 3. Vérification : $3(x + 5) = 3x + 15$.
Donc $3(x + 5) = 3x + 15$.

(b) $2y$ devient $-8y$: le facteur est -4. Vérification : $(-4) \times 2y + (-4) \times (-3) = -8y + 12$.
Donc $-4(2y - 3) = -8y + 12$.

(c) $a \times a = a^2$ et $a \times 6 = 6a$: le facteur est a.
Donc $a(a + 6) = a^2 + 6a$.

(d) $2t \times 7t = 14t^2$ et $2t \times 3 = 6t$: la parenthèse est $7t - 3$. Vérification : $2t(7t - 3) = 14t^2 - 6t$.
Donc la longueur du rectangle est $7t - 3$.

Ex. 12 ★★★ **Le terrain et son allée**

(a) $A = 3a(5a - 2) = 3a \times 5a - 3a \times 2 = 15a^2 - 6a$ (attention : $3a \times 5a = 15a^2$, et pas $15a$).
Donc $A = 15a^2 - 6a$.

(b) $B = 0{,}5(5a - 2) = 0{,}5 \times 5a - 0{,}5 \times 2 = 2{,}5a - 1$.
Donc $B = 2{,}5a - 1$.

(c) Mona soustrait toute l'expression B : il faut écrire $-(2{,}5a - 1)$, l'opposé d'une somme, ce qui change le signe de chaque terme. Elle a seulement changé le signe du premier terme. $A - B = 15a^2 - 6a - (2{,}5a - 1) = 15a^2 - 6a - 2{,}5a + 1$.
Donc $A - B = 15a^2 - 8{,}5a + 1$.

(d) Avec les dimensions : la largeur vaut $3 \times 4 = 12$ et la longueur $5 \times 4 - 2 = 18$, donc $A = 12 \times 18 = 216$, $B = 0{,}5 \times 18 = 9$ et $A - B = 216 - 9 = 207$. Avec l'expression réduite : $15 \times 4^2 - 8{,}5 \times 4 + 1 = 240 - 34 + 1 = 207$. Les deux calculs donnent la même aire : 207 m².

Ex. 13 ★★★ **Vrai ou faux pour toutes les valeurs ?**

(a) Faux. Le facteur -3 multiplie aussi -6 : $(x - 6) \times (-3) = -3x + 18$. Contre-exemple : pour $x = 0$, $(0 - 6) \times (-3) = 18$ alors que $-3 \times 0 - 18 = -18$.
Donc l'égalité est fausse.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Vrai. $-y(4 - y) = (-y) \times 4 + (-y) \times (-y) = -4y + y^2 = y^2 - 4y$.
Donc l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de y.

(c) Vrai. $\frac{1}{2}(4t^2 - 6t + 10) = \frac{1}{2} \times 4t^2 - \frac{1}{2} \times 6t + \frac{1}{2} \times 10 = 2t^2 - 3t + 5$.
Donc l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de t.

(d) Faux. $-2(5 - x + 3x^2) = -10 + 2x - 6x^2$: Ludo n'a pas changé le signe de $-x$. Contre-exemple : pour $x = 1$, $-2 \times (5 - 1 + 3 \times 1^2) = -2 \times 7 = -14$ alors que $-10 - 2 \times 1 - 6 \times 1^2 = -18$.
Donc Ludo a tort.

Ex. 14 ★★★ **Le programme de Sacha**

(a) Pour 5 : $5 - 3 = 2$; $2 \times (-4) = -8$; $-8 + 4 \times 5 = 12$. Pour -2 : $-2 - 3 = -5$; $(-5) \times (-4) = 20$; $20 + 4 \times (-2) = 12$. Pour 0,5 : $0{,}5 - 3 = -2{,}5$; $(-2{,}5) \times (-4) = 10$; $10 + 4 \times 0{,}5 = 12$. Les trois résultats valent 12.

(b) Conjecture : quel que soit le nombre choisi, le programme donne 12.

(c) Le résultat est $(x - 3) \times (-4) + 4x$. On développe : $x \times (-4) - 3 \times (-4) + 4x = -4x + 12 + 4x$. Le facteur -4 multiplie aussi -3 : on obtient $+12$, et pas -12.
Donc la forme développée est $-4x + 12 + 4x$.

(d) $-4x + 12 + 4x = -4x + 4x + 12 = 12$. Pour tout nombre x, le résultat vaut 12 : la conjecture est démontrée.

(e) Non. Le résultat devient $(x - 3) \times 4 + 4x = 4x - 12 + 4x = 8x - 12$, qui dépend de x. Par exemple, 0 donne $8 \times 0 - 12 = -12$ et 1 donne $8 \times 1 - 12 = -4$.
Donc le résultat n'est plus toujours le même.

3. *Supprimer des parenthèses précédées d'un signe –*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : l'opposé d'une somme**

(a) On change le signe de chaque terme : $-x$ et $+9$.
Donc $A = -x + 9$.

(b) On change le signe de chaque terme : -7 et $+3y$.
Donc $B = -7 + 3y$.

(c) L'opposé de $-4a$ est $4a$ et l'opposé de $+1$ est -1.
Donc $C = 4a - 1$.

(d) L'opposé de $-2x$ est $2x$ et l'opposé de $-0{,}5$ est $+0{,}5$.
Donc $D = 2x + 0{,}5$.

Ex. 15 (suite)

(e) Les trois termes changent de signe.
Donc $E = -x^2 - 3x + 1$.

(f) L'opposé de $\frac{1}{2}a$ est $-\frac{1}{2}a$ et l'opposé de -4 est $+4$.
Donc $F = -\frac{1}{2}a + 4$.

Ex. 16 ★☆☆ Automatismes : supprimer puis réduire

(a) $A = 12 - x + 5 = 17 - x$.
Donc $A = 17 - x$.

(b) Un signe $+$ ne change rien : $B = 4x + 3 - 7x = -3x + 3$.
Donc $B = -3x + 3$.

(c) $C = 6 + 2y - 9 = 2y - 3$.
Donc $C = 2y - 3$.

(d) $D = 3a - a - 2{,}5 = 2a - 2{,}5$.
Donc $D = 2a - 2{,}5$.

(e) $E = 5t - 1 - 2t + 6 = 3t + 5$.
Donc $E = 3t + 5$.

(f) Les deux parenthèses sont précédées de $-$: $F = 10 - 4 + x - x - 3 = 3$.
Donc $F = 3$.

Ex. 17 ★★☆ Les calculs d'Inès

(a) Faux : Inès n'a changé que le signe du premier terme. L'opposé de -8 est $+8$, donc $-(3x - 8) = -3x + 8$.

(b) Faux : $-(x - 4) = -x + 4$, donc $15 - (x - 4) = 15 - x + 4 = 19 - x$, et non $11 - x$.

(c) Vrai : un signe $+$ ne change rien, donc $7y + (2 - 5y) = 7y + 2 - 5y = 2y + 2$.

(d) Faux : l'opposé de $+2$ est -2, donc $-(-6a + 2) = 6a - 2$.

Ex. 18 ★★☆ Soustraire une expression

(a) $A - B = 4x + 3 - (2x - 5) = 4x + 3 - 2x + 5 = 2x + 8$.
Donc $A - B = 2x + 8$.

(b) $B - C = 2x - 5 - (-x + 7) = 2x - 5 + x - 7 = 3x - 12$.
Donc $B - C = 3x - 12$.

(c) $A + B - C = 4x + 3 + (2x - 5) - (-x + 7) = 4x + 3 + 2x - 5 + x - 7 = 7x - 9$.
Donc $A + B - C = 7x - 9$.

Ex. 18 (suite)

(d) Pour $x = -1{,}5$: $A = 4 \times (-1{,}5) + 3 = -3$ et $B = 2 \times (-1{,}5) - 5 = -8$, donc $A - B = -3 - (-8) = 5$. On retrouve la même valeur avec la forme réduite : $2 \times (-1{,}5) + 8 = 5$.
Donc $A - B = 5$.

Ex. 19 ★★★ Le programme de Noé

(a) Pour $t = 2$: $5 \times 2 + 4 = 14$; $14 - (2 \times 2 - 3) = 14 - 1 = 13$; $13 - (3 \times 2 - 1) = 13 - 5 = 8$. Pour $t = -1{,}5$: $5 \times (-1{,}5) + 4 = -3{,}5$; $-3{,}5 - (2 \times (-1{,}5) - 3) = -3{,}5 - (-6) = 2{,}5$; $2{,}5 - (3 \times (-1{,}5) - 1) = 2{,}5 - (-5{,}5) = 8$. Pour $t = 10$: $5 \times 10 + 4 = 54$; $54 - (2 \times 10 - 3) = 54 - 17 = 37$; $37 - (3 \times 10 - 1) = 37 - 29 = 8$. Le tableau contient donc : ligne $5t + 4$: 14 ; $-3{,}5$; 54 — ligne « Après l'étape 2 » : 13 ; $2{,}5$; 37 — ligne « Résultat final » : 8 ; 8 ; 8.

(b) Les trois essais donnent 8. On peut conjecturer que le résultat final vaut toujours 8, quel que soit le nombre choisi.

(c) $E = (5t + 4) - (2t - 3) - (3t - 1)$. Chaque parenthèse précédée de $-$ change le signe de chacun de ses termes : $E = 5t + 4 - 2t + 3 - 3t + 1$. On regroupe les termes semblables : $E = (5 - 2 - 3)t + (4 + 3 + 1) = 0t + 8 = 8$.
Donc le résultat vaut toujours 8 : la conjecture est démontrée.

(d) Léa n'a changé que le signe du premier terme de chaque parenthèse. Or $-(2t - 3) = -2t + 3$ et $-(3t - 1) = -3t + 1$: les deux signes changent. La bonne écriture est $E = 5t + 4 - 2t + 3 - 3t + 1$, donc $E = 8$ et non 0.

Ex. 20 ★★★ Trois expressions, des signes à surveiller

(a) $B - A = (0{,}5y - 4) - (-3y + 1) = 0{,}5y - 4 + 3y - 1$, car $-(-3y + 1) = 3y - 1$. On réduit : $B - A = (0{,}5 + 3)y + (-4 - 1)$.
Donc $B - A = 3{,}5y - 5$.

(b) $A - B - C = (-3y + 1) - (0{,}5y - 4) - (2 - y)$. Les deux signes $-$ changent le signe de chaque terme de leur parenthèse : $= -3y + 1 - 0{,}5y + 4 - 2 + y = (-3 - 0{,}5 + 1)y + (1 + 4 - 2)$.
Donc $A - B - C = -2{,}5y + 3$.

(c) $A - C = (-3y + 1) - (2 - y) = -3y + 1 - 2 + y = -2y - 1$. $C - A = (2 - y) - (-3y + 1) = 2 - y + 3y - 1 = 2y + 1$. Or $(-2y - 1) + (2y + 1) = 0$ pour tout y.
Donc c'est vrai : $A - C$ et $C - A$ sont toujours opposées.

Ex. 20 **(suite)**

(d) $D = (-3y+1) - (-5y+3) = -3y + 1 + 5y - 3 = 2y - 2$. Vérification : $A - D = (-3y+1) - (2y-2) = -3y + 1 - 2y + 2 = -5y + 3$.
Donc $D = 2y - 2$.

Ex. 21 ★★★ **Le troisième côté du triangle**

(a) $L = (9x+4) - (2x+3) - (4x-1) = 9x + 4 - 2x - 3 - 4x + 1$: chaque terme des deux parenthèses change de signe. On réduit : $L = (9 - 2 - 4)x + (4 - 3 + 1)$.
Donc $L = 3x + 2$.

(b) $2 \times 2{,}5 + 3 = 8$; $4 \times 2{,}5 - 1 = 9$;
$L = 3 \times 2{,}5 + 2 = 9{,}5$. Somme : $8 + 9 + 9{,}5 = 26{,}5$ et $9 \times 2{,}5 + 4 = 26{,}5$.
Donc la somme est bien égale au périmètre.

(c) Faux. Contre-exemple : pour $x = 2$, $4x - 1 = 4 \times 2 - 1 = 7$ et $L = 3 \times 2 + 2 = 8$; le côté $4x - 1$ est alors plus court que le troisième côté. (En effet, $(4x-1) - (3x+2) = 4x - 1 - 3x - 2 = x - 3$, qui est négatif pour $x = 2$.)

(d) Pour $x = 0{,}2$: $4 \times 0{,}2 - 1 = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$. Une longueur ne peut pas être négative, donc $x = 0{,}2$ ne convient pas.

4. *Réduire une expression*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : réduire une somme de termes**

(a) Termes en x : $9x - 3x = 6x$; nombres : $4 + 7 = 11$.
Donc $A = 6x + 11$.

(b) Termes en y : $7y - y = 7y - 1y = 6y$ (et non 6 : la lettre reste).
Donc $B = 6y + 5$.

(c) Termes en x : $-x - 4x = -1x - 4x = -5x$; nombres : $6 - 10 = -4$.
Donc $C = -5x - 4$.

(d) Termes en a : $5a - 5a = 0$; nombres : $3 + 2 = 5$.
Donc $D = 5$.

(e) Termes en a : $2a + 7a = 9a$; termes en b : $-5b + b = -5b + 1b = -4b$.
Donc $E = 9a - 4b$.

(f) Termes en t : $1{,}5t - 0{,}7t = 0{,}8t$; nombres : $4 - 2{,}5 = 1{,}5$.
Donc $F = 0{,}8t + 1{,}5$.

Ex. 22 **(suite)**

(g) Termes en x : $-5x + 3x = -2x$; le nombre 12 reste seul.
Donc $G = -2x + 12$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : réduite ou pas ?**

(a) $4x$ et 3 ne sont pas semblables : on ne peut pas les regrouper ($4x + 3 \neq 7x$).
Donc $A = 4x + 3$ est déjà réduite.

(b) x^2 et $5x$ ne sont pas semblables : $x^2 + 5x \neq 6x^2$ et $x^2 + 5x \neq 6x^3$.
Donc $B = x^2 + 5x$ est déjà réduite.

(c) Non réduite. Termes en x^2 : $2x^2 - x^2 = x^2$; termes en x : $7x - 3x = 4x$.
Donc $C = x^2 + 4x$.

(d) Non réduite. Termes en x^2 : $3x^2$; termes en x : $-x + 4x = -1x + 4x = 3x$; nombre : 6.
Donc $D = 3x^2 + 3x + 6$.

(e) Non réduite. Termes en x^2 : $5x^2 - 5x^2 = 0$; il reste $-2x$ et 9.
Donc $E = -2x + 9$.

(f) Non réduite. Termes en x^2 : $0{,}4x^2 - 1{,}2x^2 = -0{,}8x^2$; terme en x : x ; nombre : 2,5.
Donc $F = -0{,}8x^2 + x + 2{,}5$.

Ex. 24 ★★☆ **Développer, puis réduire**

(a) $A = 8x - 12 - 7x + 7$ (le facteur -7 multiplie x et -1), puis $8x - 7x = 1x = x$ et $-12 + 7 = -5$.
Donc $A = x - 5$.

(b) $B = 3x + 18 - 4x + 9$ (l'opposé de $4x - 9$ est $-4x + 9$), puis $3x - 4x = -x$ et $18 + 9 = 27$.
Donc $B = -x + 27$.

(c) $C = x^2 - 4x + 6x + 2$, puis $-4x + 6x = 2x$.
Donc $C = x^2 + 2x + 2$.

(d) $D = 6y^2 + 10y - 6y^2 - 7y$, puis $6y^2 - 6y^2 = 0$ et $10y - 7y = 3y$.
Donc $D = 3y$.

(e) $E = -t + 6 + 3t + 6$ (car $-2 \times 0{,}5t = -t$ et $-2 \times (-3) = 6$), puis $-t + 3t = 2t$ et $6 + 6 = 12$.
Donc $E = 2t + 12$.

Ex. 25 ★★☆ **Les réductions de Nolan**

(a) Il a tort : $3x^2$ et $4x$ ne sont pas semblables, on ne peut pas les regrouper. Pour $x = 2$: $3 \times 2^2 + 4 \times 2 = 20$ mais $7 \times 2^2 = 28$. L'expression $3x^2 + 4x$ est déjà réduite.

Ex. 25 **(suite)**

(b) Il a tort : il a oublié le signe $-$ placé devant $2t$. Le terme est $-2t$, donc $-2t+4t=2t$; nombres : $5-3=2$.
Donc $5-2t+4t-3=2t+2$.

(c) Il a tort : il a oublié de changer le signe de -5. L'opposé de $2x-5$ est $-2x+5$, donc $7x-(2x-5)=7x-2x+5=5x+5$.

(d) Pour $x=10$: $A=2\times 100-30+4-100+50=124$ et $x^2+2x+4=100+20+4=124$. Les deux valeurs sont égales : le contrôle ne détecte pas d'erreur. En effet $2x^2-x^2=x^2$, $-3x+5x=2x$, donc $A=x^2+2x+4$: Nolan a raison.

Ex. 26 ★★★ **Le terrain de Maëlys**

(a) $P=2(3x+4)+2x=6x+8+2x=8x+8$.
Donc $P=8x+8$.

(b) $G=x(3x+4)-3(x-1)$. Le facteur -3 multiplie x et -1 : $G=3x^2+4x-3x+3$. On a $4x-3x=1x=x$ (et non 1).
Donc $G=3x^2+x+3$. Cette expression est réduite : $3x^2$, x et 3 ne sont pas semblables, on ne peut écrire ni $4x^2$ ni $7x^2$.

(c) Pour $x=10$: $P=2\times(3\times 10+4)+2\times 10=68+20=88$ et $8\times 10+8=88$. Puis $G=10\times 34-3\times 9=340-27=313$ et $3\times 10^2+10+3=313$. Les valeurs sont égales, ce qui confirme les deux réductions.

(d) Nouvelle aire du gazon : $H=x(3x+4)-5(x-1)=3x^2+4x-5x+5=3x^2-x+5$ (car $4x-5x=-1x=-x$). Diminution : $G-H=3x^2+x+3-(3x^2-x+5)=3x^2+x+3-3x^2+x-5=2x-2$. L'aire du gazon diminue donc de $2x-2$ m².

Ex. 27 ★★★ **Le devoir de Yanis**

(a) La parenthèse est précédée de $-$: on la remplace par l'opposé de la somme. $B=4{,}5a-2b+3-a-1{,}5a+6b-3$. Termes en a : $4{,}5-1-1{,}5=2$, donc $2a$ (le terme $-a$ a pour coefficient -1). Termes en b : $-2b+6b=4b$. Nombres : $3-3=0$.
Donc $B=2a+4b$.

(b) Première erreur : il n'a pas compté le terme $-a$. Il a fait $4{,}5a-1{,}5a=3a$, alors que $-a$ compte pour $-1a$: on obtient $2a$. Deuxième erreur : en supprimant la parenthèse précédée de $-$, il n'a changé que le signe du premier terme. Il aurait dû écrire $-1{,}5a+6b-3$, et pas $-1{,}5a-6b+3$. Cela lui a donné $-8b$ au lieu de $4b$, et 6 au lieu de 0.

Ex. 27 **(suite)**

(c) Expression de départ : $45-20+3-10-(15-60+3)=18-(-42)=60$. Ma forme réduite : $2\times 10+4\times 10=60$. Celle de Yanis : $30-80+6=-44$. Comme $-44\neq 60$, la forme de Yanis est fausse, et la mienne donne bien la même valeur que l'expression de départ.

(d) Avec $B=2a+4b$: $B=2\times 0{,}5+4\times(-1{,}5)=1-6=-5$.
Donc $B=-5$.

Ex. 28 ★★★ **Le programme de calcul de Chloé**

(a) Pour 3 : $3\times(3+6)-(3^2+3)=27-12=15$. Pour -2 : $(-2)\times(-2+6)-((-2)^2+(-2))=-8-2=-10$. Les résultats sont 15 et -10.

(b) Le résultat s'écrit $x(x+6)-(x^2+x)$. On obtient x^2+6x-x^2-x. Les termes x^2 et $-x^2$ s'annulent, et $6x-x=6x-1x=5x$.
Donc le résultat est $5x$.

(c) Théo a tort : avec 3, le programme donne 15, pas 6. Le résultat est $5x$. Théo a sans doute écrit $6x-x=6$ en enlevant la lettre. Or x compte pour $1x$, donc $6x-x=5x$.

(d) Le résultat s'écrit $x(x+6)-2x^2+7=x^2+6x-2x^2+7$. Termes en x^2 : $x^2-2x^2=-x^2$ (coefficient -1).
Donc le résultat est $-x^2+6x+7$. Contrôle avec $x=-1$: $(-1)\times(-1+6)-2\times(-1)^2+7=-5-2+7=0$, et $-(-1)^2+6\times(-1)+7=-1-6+7=0$. Les deux valeurs sont égales, la réduction est confirmée.

5. *Factoriser par un facteur commun*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : un nombre en facteur**

(a) $14x+21=7\times 2x+7\times 3$.
Donc $14x+21=7(2x+3)$.

(b) $9a-9=9\times a-9\times 1$.
Donc $9a-9=9(a-1)$: le 1 ne disparaît pas.

(c) Le plus grand facteur commun de 24 et 16 est 8 : $24t+16=8\times 3t+8\times 2$.
Donc $24t+16=8(3t+2)$.

(d) $-10y-15=(-5)\times 2y+(-5)\times 3$.
Donc $-10y-15=-5(2y+3)$.

(e) $12x+18y-30=6\times 2x+6\times 3y-6\times 5$.
Donc $12x+18y-30=6(2x+3y-5)$.

Ex. 29 **(suite)**

(f) $35 - 20x = 5 \times 7 - 5 \times 4x$.
Donc $35 - 20x = 5(7 - 4x)$.

(g) $2{,}5x + 2{,}5 = 2{,}5 \times x + 2{,}5 \times 1$.
Donc $2{,}5x + 2{,}5 = 2{,}5(x + 1)$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : une lettre en facteur**

(a) $x^2 + 6x = x \times x + x \times 6$.
Donc $x^2 + 6x = x(x + 6)$.

(b) $4a^2 - 7a = a \times 4a - a \times 7$.
Donc $4a^2 - 7a = a(4a - 7)$.

(c) Facteur commun : $4t$. $12t^2 + 8t = 4t \times 3t + 4t \times 2$.
Donc $12t^2 + 8t = 4t(3t + 2)$.

(d) Facteur commun : $5y$. $15y - 25y^2 = 5y \times 3 - 5y \times 5y$.
Donc $15y - 25y^2 = 5y(3 - 5y)$.

(e) Facteur commun : $6x$. $6x^2 + 6x = 6x \times x + 6x \times 1$.
Donc $6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$.

(f) Facteur commun : $3x$. $9xy - 12x = 3x \times 3y - 3x \times 4$.
Donc $9xy - 12x = 3x(3y - 4)$.

Ex. 31 ★★☆ **Erreurs d'élèves**

(a) $5(4x + 35) = 20x + 175 \neq 20x + 35$: Lina a tort, elle n'a pas divisé 35 par 5. $20x + 35 = 5 \times 4x + 5 \times 7$, donc $20x + 35 = 5(4x + 7)$.

(b) $4(4a + 6) = 16a + 24$: c'est juste, mais pas factorisé au maximum, car $4a + 6$ se factorise encore par 2. Le plus grand facteur commun est 8 : $16a + 24 = 8(2a + 3)$.

(c) $3(4x + 2) + 3 = 12x + 6 + 3 = 12x + 9$: l'égalité est juste, mais c'est une somme, pas un produit, donc ce n'est pas factorisé. $12x + 9 = 3 \times 4x + 3 \times 3 = 3(4x + 3)$.

(d) $7(x + 10) = 7x + 70 \neq 7x + 10$: Tom a tort. 7 et 10 n'ont pas d'autre facteur commun que 1, et il n'y a pas de lettre commune : $7x + 10$ ne se factorise pas.

(e) $-4(2t - 3) = -8t + 12 \neq -8t - 12$: Eva a tort, elle s'est trompée de signe. $-8t - 12 = (-4) \times 2t + (-4) \times 3$, donc $-8t - 12 = -4(2t + 3)$.

Ex. 32 ★★☆ **Factoriser pour calculer ou pour démontrer**

(a) $43 \times 17 - 43 \times 7 = 43 \times (17 - 7) = 43 \times 10 = 430$.

(b) $2{,}6 \times 58 + 2{,}6 \times 42 = 2{,}6 \times (58 + 42) = 2{,}6 \times 100 = 260$.

(c) $19 = 19 \times 1$, donc $19 \times 99 + 19 = 19 \times (99 + 1) = 19 \times 100 = 1\,900$.

Ex. 32 **(suite)**

(d) $15n + 20 = 5 \times 3n + 5 \times 4 = 5(3n + 4)$. Comme $3n + 4$ est un nombre entier, $15n + 20$ est 5 fois un entier : c'est un multiple de 5.

(e) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \times n + 3 \times 1 = 3(n + 1)$. Comme $n + 1$ est un entier, la somme est un multiple de 3.

Ex. 33 ★★★ **Réduire, puis factoriser au maximum**

(a) $A = 12x + 8 + 6x + 10 = 18x + 18$. Le plus grand facteur commun est 18 : $18x + 18 = 18 \times x + 18 \times 1$.
Attention : $2(9x + 9)$ et $6(3x + 3)$ ne sont pas factorisées au maximum. Vérification : $18(x + 1) = 18x + 18$.
Donc $A = 18(x + 1)$.

(b) Le signe $-$ devant la parenthèse change le signe de chaque terme : $B = 7a^2 - 3a^2 - 6a = 4a^2 - 6a$. Facteur commun : $2a$, car $4a^2 = 2a \times 2a$ et $6a = 2a \times 3$.
Vérification : $2a(2a - 3) = 4a^2 - 6a$.
Donc $B = 2a(2a - 3)$.

(c) $C = 4t - 12 - 10t - 2 = -6t - 14$. Les deux termes sont négatifs, donc on met -2 en facteur : $-6t = (-2) \times 3t$ et $-14 = (-2) \times 7$. Vérification : $-2(3t + 7) = -6t - 14$.
Donc $C = -2(3t + 7)$ (ou $2(-3t - 7)$).

(d) Le facteur cherché contient y et il est négatif : $-9y^2 = (-3y) \times 3y$ et $12y = (-3y) \times (-4)$. Vérification : $-3y(3y - 4) = -9y^2 + 12y$.
Donc $-9y^2 + 12y = -3y(3y - 4)$.

Ex. 34 ★★★ **Retrouver les dimensions d'un rectangle**

(a) $6x^2 = 3x \times 2x$ et $15x = 3x \times 5$, donc $6x^2 + 15x = 3x(2x + 5)$. Vérification : $3x \times 2x + 3x \times 5 = 6x^2 + 15x$.
Donc la longueur est $2x + 5$.

(b) Non. Si la longueur était x, l'aire serait $8 \times x = 8x$, et non $8x + 8$. On factorise : $8x + 8 = 8 \times x + 8 \times 1 = 8(x + 1)$. Le 1 ne disparaît pas.
Donc la longueur est $x + 1$.

(c) $12x^2 = 6 \times 2x^2$, $18x = 6 \times 3x$ et $6 = 6 \times 1$, donc $12x^2 + 18x + 6 = 6(2x^2 + 3x + 1)$.
Donc la longueur est $2x^2 + 3x + 1$.

Ex. 34 **(suite)**

(d) $P = 2(x + 4 + 3x + 8) = 2(4x + 12) = 8x + 24$. Si on s'arrête à $2(4x + 12)$, la factorisation n'est pas au maximum : le plus grand facteur commun de 8 et 24 est 8.
Donc $P = 8x + 24 = 8(x + 3)$.

Ex. 35 ★★★ **Un programme de calcul à démontrer**

(a) Pour 2 : $9 \times 2 + 3 \times (2 + 1) = 18 + 9 = 27$. Pour -5 : $9 \times (-5) + 3 \times (-5 + 1) = -45 + (-12) = -57$.
Donc on trouve 27 et -57.

(b) Le successeur de n est $n + 1$. Le résultat est $9n + 3(n + 1) = 9n + 3n + 3 = 12n + 3$.
Donc le résultat est $12n + 3$.

(c) $12n = 3 \times 4n$ et $3 = 3 \times 1$, donc $12n + 3 = 3(4n + 1)$.
Si n est un entier, $4n + 1$ est aussi un entier.
Donc le résultat est 3 fois un entier : c'est un multiple de 3.

(d) Non. Contre-exemple : pour $n = 2$, le tableau donne 27.
Or 27 n'est pas un multiple de 6, car $6 \times 4 = 24$ et $6 \times 5 = 30$.
Donc Léa a tort.

(e) $3(4 \times 25 + 1) = 3 \times 101 = 303$.
Donc pour $n = 25$, le résultat est 303.

6. *Égalité, identité et démonstration*

Ex. 36 ★☆☆ **Tester une égalité pour une valeur**

(a) À gauche : $5 \times 4 - 4 = 20 - 4 = 16$. À droite : $2 \times 4 + 8 = 8 + 8 = 16$. Les deux membres sont égaux, donc l'égalité est vraie pour $x = 4$.

(b) À gauche : $2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$. À droite : $4 \times 2 = 8$. Comme $7 \neq 8$, l'égalité est fausse pour $y = 2$.

(c) À gauche : $2 \times (5 - 3) = 2 \times 2 = 4$. À droite : $2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$. Comme $4 \neq 7$, l'égalité est fausse pour $t = 5$.

(d) À gauche : $(-2)^2 = 4$. À droite : $2 \times (-2) = -4$. Comme $4 \neq -4$, l'égalité est fausse pour $a = -2$.

(e) À gauche : $3 - 0{,}5 \times 6 = 3 - 3 = 0$. À droite : $6 - 6 = 0$. Les deux membres sont égaux, donc l'égalité est vraie pour $x = 6$.

(f) À gauche : $3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$. À droite : $2 \times 3 = 6$. Les deux membres sont égaux, donc l'égalité est vraie pour $x = 3$.

Ex. 37 ★☆☆ **Démontrer une identité**

(a) Membre de gauche : $3(x + 4) - 5 = 3x + 12 - 5 = 3x + 7$. On obtient le membre de droite.
Donc l'égalité est une identité.

(b) Membre de gauche : $7a - 2(a - 3) = 7a - 2a + 6 = 5a + 6$. On obtient le membre de droite.
Donc l'égalité est une identité.

(c) Membre de gauche : $(y - 2) \times 6 + 2y = 6y - 12 + 2y = 8y - 12$. On obtient le membre de droite.
Donc l'égalité est une identité.

(d) Membre de droite : $5(2t + 7) = 5 \times 2t + 5 \times 7 = 10t + 35$. On obtient le membre de gauche.
Donc l'égalité est une identité.

(e) Membre de gauche : $x(x + 4) - 4x = x^2 + 4x - 4x = x^2$. On obtient le membre de droite.
Donc l'égalité est une identité.

(f) Membre de gauche : $9 - (4 - 3x) = 9 - 4 + 3x = 3x + 5$ (j'enlève une parenthèse précédée de $-$, donc je prends l'opposé de chaque terme). On obtient le membre de droite.
Donc l'égalité est une identité.

Ex. 38 ★★☆ **Vrai ou faux ? Contre-exemple ou démonstration**

(a) Non. Pour $x = 2$: à gauche $3 \times 2 + 5 = 6 + 5 = 11$; à droite $5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 13$. Comme $11 \neq 13$, $x = 2$ est un contre-exemple.
Donc l'égalité n'est pas une identité : le test avec $x = 1$ marchait par hasard.

(b) Non. Pour $t = 1$: $1^2 = 1$ et $3 \times 1 - 2 = 1$; pour $t = 2$: $2^2 = 4$ et $3 \times 2 - 2 = 4$. Mais pour $t = 0$: $0^2 = 0$ et $3 \times 0 - 2 = -2$, et $0 \neq -2$.
Donc $t = 0$ est un contre-exemple. Deux essais qui marchent ne prouvent pas une identité.

(c) Vrai. Membre de gauche : $5(y - 1) + y = 5y - 5 + y = 6y - 5$. On obtient le membre de droite.
Donc c'est une identité, vraie pour tout y.

(d) Sami a oublié la parenthèse : il faut d'abord calculer $3 + 5$. À gauche : $2 \times (3 + 5) = 2 \times 8 = 16$. À droite : $2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$. Comme $16 \neq 11$, l'égalité est fausse pour $a = 3$. C'est un contre-exemple, donc l'égalité n'est pas une identité.

Ex. 39 ★★☆ **Un programme de calcul à prouver**

(a) Avec 5 : $5+3=8$; $8\times 4=32$; $32-4\times 5=12$. Avec -2 : $-2+3=1$; $1\times 4=4$; $4-4\times(-2)=4+8=12$. Avec $0{,}5$: $0{,}5+3=3{,}5$; $3{,}5\times 4=14$; $14-4\times 0{,}5=14-2=12$.
Donc les trois résultats valent 12.

(b) Non. Trois essais ne prouvent rien pour les autres nombres : il y en a une infinité. Il faut faire le calcul avec une lettre, qui traite toutes les valeurs à la fois.

(c) Avec x : $4(x+3)-4x=4x+12-4x=12$.
Donc le résultat vaut toujours 12, quel que soit le nombre choisi.

(d) Je développe et je réduis : $B=4x+12+8x=12x+12$. Je factorise par 12 : $B=12(x+1)$. Comme $x+1$ est un entier, B est un multiple de 12. C'est la forme factorisée qui le montre.

Ex. 40 ★★★ **Trois égalités à trier**

(a) Pour $x=2$: à gauche $2^2+6=4+6=10$ et à droite $5\times 2=10$. Pour $x=3$: à gauche $3^2+6=9+6=15$ et à droite $5\times 3=15$.
Donc l'égalité (1) est vraie pour $x=2$ et pour $x=3$.

(b) Non. Deux essais qui marchent ne prouvent rien pour les autres valeurs. Pour $x=0$: à gauche $0^2+6=6$ et à droite $5\times 0=0$. Comme $6\neq 0$, $x=0$ est un contre-exemple.
Donc l'égalité (1) n'est pas une identité.

(c) Je transforme le membre de gauche : $2(3-y)+4y=6-2y+4y=2y+6$. J'obtiens le membre de droite.
Donc l'égalité (2) est une identité : elle est vraie pour tout y.

(d) Le signe $-$ devant la parenthèse change les deux signes : $4t-(t+7)=4t-t-7=3t-7$. Or $3t+2-(3t-7)=9$: le membre de droite dépasse toujours celui de gauche de 9.
Donc les deux membres ne sont jamais égaux : l'égalité (3) est fausse pour toutes les valeurs de t.

Ex. 41 ★★★ **Choisir la forme utile**

(a) $A=6x+12-2x+6=4x+18$, car $-2\times(-3)=+6$.
Donc $A=4x+18$.

(b) Avec la forme réduite : $4\times(-2{,}5)+18=-10+18=8$. Contrôle avec la forme de départ : $(-2{,}5+2)\times 6-2\times(-2{,}5-3)=(-0{,}5)\times 6-2\times(-5{,}5)=-3+11=8$.
Donc pour $x=-2{,}5$, $A=8$.

Ex. 41 (suite)

(c) $4x+18=2\times 2x+2\times 9=2(2x+9)$. Si x est un entier, $2x+9$ est aussi un entier.
Donc $A=2\times(2x+9)$ est un multiple de 2 : A est toujours pair.

(d) Pour $x=2$, on a bien $A=4\times 2+18=26$ et $13\times 2=26$. Mais une égalité vraie pour $x=2$ n'est pas forcément vraie pour tout x. Pour $x=1$: $A=4\times 1+18=22$ alors que $13\times 1=13$, et $22\neq 13$.
Donc Malo a tort : $x=1$ est un contre-exemple.

Ex. 42 ★★★ **Enquête sur les entiers consécutifs**

(a) Le carré du successeur s'écrit $(n+1)^2$. Pour $n=0$, on trouve 1 des deux côtés : ce test ne permet pas de conclure. Pour $n=3$: $(3+1)^2=4^2=16$ et $3^2+1=10$. Comme $16\neq 10$, $n=3$ est un contre-exemple.
Donc Théo a tort.

(b) $S=n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=n+n+n+n+1+2+3=4n+6$.
Donc $S=4n+6$.

(c) $4n+6=2\times 2n+2\times 3=2(2n+3)$. Comme n est un entier, $2n+3$ est aussi un entier.
Donc S est un multiple de 2 : la somme de quatre entiers consécutifs est toujours paire.

(d) Avec 1, 2, 3 et 4 : $1+2+3+4=10$. Or 10 n'est pas un multiple de 4, car $10=4\times 2+2$. Ce contre-exemple suffit : Jade a tort.

7. *Programmes de calcul et problèmes : mettre en formule, prouver*

Ex. 43 ★☆☆ **Traduire un programme de calcul**

(a) On ajoute d'abord, donc on met des parenthèses : $5(x+4)=5x+20$.
Donc P1 donne $5x+20$.

(b) On multiplie d'abord, donc pas besoin de parenthèses : $3y-7$.
Donc P2 donne $3y-7$.

(c) $-2(a-6)=-2a+12$.
Donc P3 donne $-2a+12$.

(d) $3(t+2)-1=3t+6-1=3t+5$.
Donc P4 donne $3t+5$.

(e) $4(t-5)+25-t=4t-20+25-t=3t+5$.
Donc P5 donne $3t+5$.

Ex. 43 **(suite)**

(f) Une fois réduits, P4 et P5 donnent la même expression, $3t + 5$. C'est vrai pour toute valeur de t, donc les deux programmes donnent toujours le même résultat, quel que soit le nombre de départ.

Ex. 44 ★☆☆ **Mettre en formule**

(a) $n + (n + 1) = 2n + 1$.
Donc la somme vaut $2n + 1$.

(b) $n(n - 1) = n^2 - n$.
Donc le produit vaut $n^2 - n$.

(c) $2(y + 3y + 2) = 2(4y + 2) = 8y + 4$.
Donc le périmètre vaut $8y + 4$ cm.

(d) $y(3y + 2) = y \times 3y + y \times 2 = 3y^2 + 2y$.
Donc l'aire vaut $3y^2 + 2y$ cm².

(e) Le prix est $1{,}2t + 1{,}1$. Pour $t = 4$: $1{,}2 \times 4 + 1{,}1 = 4{,}8 + 1{,}1 = 5{,}9$.
Donc Sacha paie 5,90 €.

(f) Le pair s'écrit $2n$ et l'impair qui suit $2n + 1$. Leur somme : $2n + 2n + 1 = 4n + 1$.

Ex. 45 ★★☆ **Le programme de Mehdi**

(a) Avec 5 : $5 - 4 = 1$; $1 \times 6 = 6$; $6 + 30 = 36$; $36 : 2 = 18$; $18 - 15 = 3$. Avec -2 : $-2 - 4 = -6$; $-6 \times 6 = -36$; $-36 + 30 = -6$; $-6 : 2 = -3$; $-3 - 3 \times (-2) = -3 + 6 = 3$. Avec $0{,}5$: $0{,}5 - 4 = -3{,}5$; $-3{,}5 \times 6 = -21$; $-21 + 30 = 9$; $9 : 2 = 4{,}5$; $4{,}5 - 1{,}5 = 3$. On trouve 3 dans les trois cas.

(b) Non. Des essais, même nombreux, ne prouvent rien pour tous les nombres. Pour le prouver, il faut faire le calcul avec une lettre.

(c) $6(x - 4) + 30 = 6x - 24 + 30 = 6x + 6$.
Donc après « ajouter 30 », on obtient $6x + 6$.

(d) La moitié de $6x + 6$ est $3x + 3$, car $6x + 6 = 2(3x + 3)$. Puis $3x + 3 - 3x = 3$. Quel que soit le nombre de départ, le programme de Mehdi donne toujours 3.

Ex. 46 ★★☆ **Vrai ou faux sur les entiers**

(a) Vrai. Trois entiers consécutifs s'écrivent n, $n + 1$ et $n + 2$. Leur somme : $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$.
Donc la somme est toujours un multiple de 3.

(b) Faux. Contre-exemple : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, et 10 n'est pas un multiple de 4. Avec une lettre, on trouve d'ailleurs $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$.

Ex. 46 **(suite)**

(c) Faux. Contre-exemple : $1 + 5 = 6$, et 6 n'est pas un multiple de 4. Yanis a écrit deux impairs consécutifs, pas deux impairs quelconques.

(d) Vrai. $(2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$. C'est un multiple de 2, donc la somme de deux impairs est toujours paire.

Ex. 47 ★★★ **Les programmes de Lina et de Tom**

(a) Lina avec $-2{,}5$: $-2{,}5 + 3 = 0{,}5$; $0{,}5 \times 4 = 2$; $2 - 2 \times (-2{,}5) = 2 + 5 = 7$.
Tom avec $-2{,}5$: $-2{,}5 - 1 = -3{,}5$; $-3{,}5 \times 3 = -10{,}5$; $-10{,}5 + 15 = 4{,}5$; $4{,}5 - (-2{,}5) = 7$.
Lina avec 4 : $4 + 3 = 7$; $7 \times 4 = 28$; $28 - 8 = 20$.
Tom avec 4 : $4 - 1 = 3$; $3 \times 3 = 9$; $9 + 15 = 24$; $24 - 4 = 20$.
Donc les deux programmes donnent 7 pour $-2{,}5$ et 20 pour 4.

(b) Non. Deux essais réussis ne prouvent rien pour tous les nombres : un autre nombre pourrait donner deux résultats différents. Pour le prouver, il faut faire le calcul avec une lettre.

(c) Lina : $4(x + 3) - 2x = 4x + 12 - 2x = 2x + 12$.
Tom : $3(x - 1) + 15 - x = 3x - 3 + 15 - x = 2x + 12$.
Donc les deux programmes donnent $2x + 12$.

(d) Oui. Les deux programmes ont la même forme réduite $2x + 12$. Donc, quel que soit le nombre de départ, les deux programmes donnent toujours le même résultat.

(e) $2x + 12 = 2 \times x + 2 \times 6 = 2(x + 6)$. Si x est un entier, $x + 6$ est aussi un entier, donc le résultat est le double d'un entier : c'est toujours un nombre pair.

Ex. 48 ★★★ **Pairs, impairs : bien choisir ses lettres**

(a) $4 = 2 \times 2$ donne $a = 2$, mais $11 = 2 \times 5 + 1$ donne 5 : les deux nombres n'ont pas le même a. Avec $a = 2$, la formule de Léo donne $4 \times 2 + 1 = 9$, alors que $4 + 11 = 15$. Avec une seule lettre, Léo ne traite que le cas où l'impair suit le pair. Il faut deux lettres différentes : $2a$ et $2b + 1$.

(b) Avec deux lettres : $2a + (2b + 1) = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1$. $a + b$ est un entier, donc cette somme s'écrit $2 \times$ entier $+ 1$: c'est toujours un nombre impair.

(c) $(2a + 1) - (2b + 1) = 2a + 1 - 2b - 1 = 2a - 2b = 2(a - b)$. $a - b$ est un nombre entier (relatif), donc la différence est le double d'un entier : c'est toujours un nombre pair.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Faux. $3+5=8$ et $7+9=16$ marchent, mais $1+3=4$ et 4 n'est pas un multiple de 8 : c'est un contre-exemple. Deux essais réussis ne prouvaient rien.

(e) $2n+(2n+2)+(2n+4)=6n+6=6(n+1)$. $n+1$ est un entier, donc la somme de trois nombres pairs consécutifs est toujours un multiple de 6.

Ex. 49 ★★★ **Le jardin d'Inès**

(a) La longueur mesure 5 m de plus que la largeur.
Donc $L=x+5$.

(b) Ilyes a oublié les parenthèses : il faut doubler la somme de la largeur et de la longueur.
$P=2(x+x+5)=2(2x+5)=4x+10$.
Donc $P=4x+10$.

(c) $A=x(x+5)=x\times x+x\times 5=x^2+5x$.
Donc $A=x^2+5x$.

(d) $C=3{,}5(4x+10)+40=14x+35+40=14x+75$.
Donc $C=14x+75$.

(e) $C=14\times 6{,}4+75=89{,}6+75=164{,}6$.
Contrôle : $P=4\times 6{,}4+10=35{,}6$ m ; $3{,}5\times 35{,}6+40=124{,}6+40=164{,}6$.
La clôture coûte $164{,}60$ €.