1. Rappels de 4^e : distributivité simple et réduction

Ex. 1 ★☆☆ **Distribuer un nombre positif**

(a) $5(9x-5) = 5\times 9x + 5\times(-5) = 45x - 25$

(b) $7(8x+9) = 7\times 8x + 7\times 9 = 56x + 63$

(c) $3(x+6) = 3\times x + 3\times 6 = 3x + 18$

(d) $6(9x-2) = 6\times 9x + 6\times(-2) = 54x - 12$

Ex. 2 ★☆☆ **Distribuer un nombre négatif**

(a) $-9(7x-5) = (-9)\times 7x + (-9)\times(-5) = -63x + 45$

(b) $-5(3x+7) = (-5)\times 3x + (-5)\times 7 = -15x - 35$

(c) $-8(x-7) = (-8)\times x + (-8)\times(-7) = -8x + 56$

(d) $-4(x-9) = (-4)\times x + (-4)\times(-9) = -4x + 36$

Ex. 3 ★☆☆ **Distribuer x**

(a) $6x(7x+4) = 6x\times 7x + 6x\times 4 = 42x^2 + 24x$

(b) $-4x(x-5) = (-4x)\times x + (-4x)\times(-5) = -4x^2 + 20x$

(c) $2x(2x-1) = 2x\times 2x + 2x\times(-1) = 4x^2 - 2x$

(d) $3x(7x+3) = 3x\times 7x + 3x\times 3 = 21x^2 + 9x$

Ex. 4 ★☆☆ **Regrouper les termes**

(a) $9x + 2 + 4x^2 + 8x + 9 = 4x^2 + 9x + 8x + 2 + 9 = 4x^2 + 17x + 11$

(b) $9x - 2 - x^2 + x - 9 = -x^2 + 9x + x - 2 - 9 = -x^2 + 10x - 11$

(c) $-4x + 1 + 9x^2 + 8x + 9 = 9x^2 - 4x + 8x + 1 + 9 = 9x^2 + 4x + 10$

Ex. 5 ★☆☆ **Un signe moins devant la parenthèse**

(a) $2x - 3 - (5x - 6) = 2x - 3 - 5x + 6 = -3x + 3$

(b) $2x + 6 - (8x - 7) = 2x + 6 - 8x + 7 = -6x + 13$

(c) $6x - 7 - (7x - 5) = 6x - 7 - 7x + 5 = -x - 2$

(d) $x + 4 - (7x - 6) = x + 4 - 7x + 6 = -6x + 10$

Ex. 6 ★★☆ **Développer puis réduire**

(a) $A = 10x - 16 - 30x - 45 = -20x - 61$

(b) $B = 20x - 4 - 12x + 48 = 8x + 44$

(c) $C = 4x - 28 - 10x - 16 = -6x - 44$

Ex. 7 ★★☆ **L'erreur de Léna**

(a) Pour $x = 0$: $7 - 2\times(3\times 0 - 4) = 7 - 2\times(-4) = 7 + 8 = 15$ et $15\times 0 - 20 = -20$. Les deux résultats sont différents : l'égalité de Léna est fausse.

(b) Léna a calculé $7 - 2 = 5$ en premier. Or la multiplication est prioritaire sur la soustraction : il faut d'abord développer $-2(3x-4)$. Son erreur est d'avoir fait la soustraction avant la multiplication.

(c) $7 - 2(3x-4) = 7 - 6x + 8 = -6x + 15$.
Donc $7 - 2(3x-4) = -6x + 15$.

Ex. 8 ★★☆ **Toutes égales à 2x − 6 ?**

(a) $3(x-2) - x = 3x - 6 - x = 2x - 6$. Cette expression est égale à $2x - 6$.

(b) $2(x-6) + 6 = 2x - 12 + 6 = 2x - 6$. Cette expression est égale à $2x - 6$.

(c) $-(6 - 2x) = -6 + 2x = 2x - 6$. Cette expression est égale à $2x - 6$.

(d) $5x - 3(x+3) = 5x - 3x - 9 = 2x - 9$. Cette expression n'est pas égale à $2x - 6$: on trouve -9 au lieu de -6.

Ex. 9 ★★☆ **Le périmètre d'un enclos**

(a) $P = 2(2x+5) + 2(x-1) = 4x + 10 + 2x - 2 = 6x + 8$. Le périmètre est $P = 6x + 8$ mètres.

(b) $P = 6\times 4 + 8 = 24 + 8 = 32$. Pour $x = 4$, le périmètre mesure 32 m.

(c) On résout $6x + 8 = 50$, donc $6x = 42$, donc $x = 7$. L'enclos mesure alors 19 m sur 6 m. Le périmètre vaut 50 m pour $x = 7$.

Ex. 10 ★★☆ **Les pièges de la réduction**

(a) $3x\times 2x = 6x^2$ (un produit) et $3x + 2x = 5x$ (une somme).
Donc $3x\times 2x + 3x + 2x = 6x^2 + 5x$.

(b) Le signe $-$ change les trois signes : $5x - 2x^2 + 3x - 1 + 4x^2 = 2x^2 + 8x - 1$.
Donc l'expression vaut $2x^2 + 8x - 1$.

(c) $\frac{1}{2}\times 6x = 3x$, $\frac{1}{2}\times 4 = 2$, $3\times\frac{2}{3} = 2$:
$3x - 2 - 3x + 2 = 0$. L'expression vaut 0 pour tout x.

(d) $-8x + 6x^2 - x^2 + 8x = 5x^2$. Les termes en x s'annulent : l'expression vaut $5x^2$.

2. *Développer avec la double distributivité*

Ex. 11 ★☆☆ **Deux parenthèses**

(a) $(x-8)(x-3) = x^2 - 3x - 8x + 24 = x^2 - 11x + 24$

(b) $(x-5)(x-8) = x^2 - 8x - 5x + 40 = x^2 - 13x + 40$

(c) $(x+2)(x-5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10$

(d) $(x+5)(x+7) = x^2 + 7x + 5x + 35 = x^2 + 12x + 35$

Ex. 12 ★☆☆ **Avec des coefficients**

(a) $(5x+8)(5x-6) = 25x^2 - 30x + 40x - 48 = 25x^2 + 10x - 48$

(b) $(6x-1)(5x+4) = 30x^2 + 24x - 5x - 4 = 30x^2 + 19x - 4$

(c) $(3x+4)(3x-1) = 9x^2 - 3x + 12x - 4 = 9x^2 + 9x - 4$

(d) $(2x+9)(4x+1) = 8x^2 + 2x + 36x + 9 = 8x^2 + 38x + 9$

Ex. 13 ★★☆ **Un coefficient négatif**

(a) $(-5x+7)(3x-2) = -15x^2 + 10x + 21x - 14 = -15x^2 + 31x - 14$

(b) $(-3x+1)(3x-4) = -9x^2 + 12x + 3x - 4 = -9x^2 + 15x - 4$

(c) $(-3x+5)(3x-4) = -9x^2 + 12x + 15x - 20 = -9x^2 + 27x - 20$

Ex. 14 ★★☆ **Une somme de produits**

(a) $A = 12x^2 + 17x - 7 + 2x^2 - 13x + 20 = 14x^2 + 4x + 13$

(b) $B = 3x^2 + x - 2 + 6x^2 + 13x - 28 = 9x^2 + 14x - 30$

(c) $C = 3x^2 + 11x - 20 + 2x^2 - 21x + 49 = 5x^2 - 10x + 29$

Ex. 15 ★★☆ **Une différence de produits**

(a) $A = 3x^2 + 4x + 1 - (3x^2 - 22x + 7) = 3x^2 + 4x + 1 - 3x^2 + 22x - 7 = 26x - 6$

(b) $B = 2x^2 + 13x + 6 - (3x^2 + 20x + 25) = 2x^2 + 13x + 6 - 3x^2 - 20x - 25 = -x^2 - 7x - 19$

(c) $C = x^2 + 14x + 49 - (3x^2 + 10x - 25) = x^2 + 14x + 49 - 3x^2 - 10x + 25 = -2x^2 + 4x + 74$

Ex. 16 ★★☆ **Un nombre devant le produit**

(a) $-6(x+7)(x+4) = -6(x^2 + 11x + 28) = -6x^2 - 66x - 168$

(b) $-6(x-1)(x+8) = -6(x^2 + 7x - 8) = -6x^2 - 42x + 48$

Ex. 16 **(suite)**

(c) $2(x+5)(x-7) = 2(x^2 - 2x - 35) = 2x^2 - 4x - 70$

Ex. 17 ★★☆ **Toujours le même résultat**

(a) Pour $x = 0$: $A = 2 \times 5 - 1 \times 6 = 10 - 6 = 4$. Pour $x = 10$: $A = 12 \times 15 - 11 \times 16 = 180 - 176 = 4$. Dans les deux cas, $A = 4$.

(b) $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$ et $(x+1)(x+6) = x^2 + 6x + x + 6 = x^2 + 7x + 6$.
Donc $A = x^2 + 7x + 10 - x^2 - 7x - 6 = 4$. Pour tout x, $A = 4$.

(c) D'après la question précédente, $A = 4$ quel que soit x.
Donc pour $x = 2\,026$, $A = 4$.

Ex. 18 ★★☆ **La plaque de bois**

(a) $(x+5)(x+3) = x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$.
L'aire de la plaque entière est $x^2 + 8x + 15$ dm².

(b) On retire l'aire du carré, x^2 : $x^2 + 8x + 15 - x^2 = 8x + 15$. Après la découpe, l'aire est $8x + 15$ dm².

(c) $8 \times 3 + 15 = 24 + 15 = 39$. Pour $x = 3$, l'aire restante est 39 dm².

Ex. 19 ★★☆ **Des décimaux et deux lettres**

(a) $t^2 + 4t - 0{,}5t - 2 = t^2 + 3{,}5t - 2$.
Donc $(t - 0{,}5)(t + 4) = t^2 + 3{,}5t - 2$.

(b) $0{,}2x \times 5x = x^2$; $x^2 - 0{,}2x + 15x - 3 = x^2 + 14{,}8x - 3$.
Donc $(0{,}2x + 3)(5x - 1) = x^2 + 14{,}8x - 3$.

(c) $2a^2 - 6ab + ab - 3b^2 = 2a^2 - 5ab - 3b^2$ (ab et ba sont des termes semblables).
Donc $(2a + b)(a - 3b) = 2a^2 - 5ab - 3b^2$.

(d) $3a^2 + 12ab - 2ab - 8b^2 = 3a^2 + 10ab - 8b^2$.
Donc $(3a - 2b)(a + 4b) = 3a^2 + 10ab - 8b^2$.

Ex. 20 ★★★ **Les nombres cachés**

(a) On développe : $(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab$. Il faut $a + b = 9$ et $a \times b = 14$. Les entiers positifs de produit 14 sont 1 et 14 (somme 15) ou 2 et 7 (somme 9). Avec $a < b$: $a = 2$ et $b = 7$, et $(x+2)(x+7) = x^2 + 9x + 14$.

(b) Il faut $a + b = -1$ et $a \times b = -20$. Le produit est négatif : un nombre est positif, l'autre négatif. Le couple 4 et -5 donne bien un produit -20 et une somme -1. Avec $a > b$: $a = 4$ et $b = -5$, et $(x + 4)(x - 5) = x^2 - x - 20$.

Ex. 21 ★★★ **Les grands calculs**

(a) $(2x-5)(x+3) = 2x^2+x-15$ et $(x-4)(3x-1) = 3x^2-13x+4$. $A = 2x^2+x-15-3x^2+13x-4+2x^2-14 = x^2+14x-33$.
Donc $A = x^2+14x-33$.

(b) $(x-2)(2x+1) = 2x^2-3x-2$, donc $-3(2x^2-3x-2) = -6x^2+9x+6$. $(5x-1)(x+2) = 5x^2+9x-2$. $B = -6x^2+9x+6+5x^2+9x-2 = -x^2+18x+4$.
Donc $B = -x^2+18x+4$.

(c) $(4-x)(2x+7) = -2x^2+x+28$ et $(3x-1)(1-x) = -3x^2+4x-1$, donc $-2(-3x^2+4x-1) = 6x^2-8x+2$. $C = -2x^2+x+28+6x^2-8x+2 = 4x^2-7x+30$.
Donc $C = 4x^2-7x+30$.

3. *Développer (a + b)²*

Ex. 22 ★☆☆ **Le carré d'une somme**

(a) $(x+16)^2 = x^2+2\times x\times 16+16^2 = x^2+32x+256$

(b) $(x+17)^2 = x^2+2\times x\times 17+17^2 = x^2+34x+289$

(c) $(x+12)^2 = x^2+2\times x\times 12+12^2 = x^2+24x+144$

(d) $(x+13)^2 = x^2+2\times x\times 13+13^2 = x^2+26x+169$

Ex. 23 ★☆☆ **Avec un coefficient devant x**

(a) $(6x+5)^2 = (6x)^2+2\times 6x\times 5+5^2 = 36x^2+60x+25$

(b) $(4x+5)^2 = (4x)^2+2\times 4x\times 5+5^2 = 16x^2+40x+25$

(c) $(5x+2)^2 = (5x)^2+2\times 5x\times 2+2^2 = 25x^2+20x+4$

(d) $(5x+9)^2 = (5x)^2+2\times 5x\times 9+9^2 = 25x^2+90x+81$

Ex. 24 ★☆☆ **Le nombre en premier**

(a) $(1+5x)^2 = 1^2+2\times 1\times 5x+(5x)^2 = 25x^2+10x+1$

(b) $(7+6x)^2 = 7^2+2\times 7\times 6x+(6x)^2 = 36x^2+84x+49$

(c) $(8+7x)^2 = 8^2+2\times 8\times 7x+(7x)^2 = 49x^2+112x+64$

Ex. 25 ★★☆ **Des fractions et des décimaux**

(a) $a = x$, $b = \frac{1}{2}$: $x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = x^2+x+\frac{1}{4}$.
Donc $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4}$.

(b) $a = 0{,}2x$, $b = 5$: $0{,}04x^2+2\times 0{,}2x\times 5+25 = 0{,}04x^2+2x+25$.
Donc $(0{,}2x+5)^2 = 0{,}04x^2+2x+25$.

(c) $a = \frac{2}{3}x$, $b = 3$: $\frac{4}{9}x^2+2\times\frac{2}{3}x\times 3+9 = \frac{4}{9}x^2+4x+9$.
Donc $\left(\frac{2}{3}x+3\right)^2 = \frac{4}{9}x^2+4x+9$.

Ex. 26 ★★☆ **Reconnaître un carré**

(a) $x^2 = (x)^2$ et $36 = 6^2$. Le double produit vaut $2\times x\times 6 = 12x$: c'est bien le terme du milieu.
Donc $x^2+12x+36 = (x+6)^2$.

(b) $4x^2 = (2x)^2$ et $25 = 5^2$. Le double produit vaut $2\times 2x\times 5 = 20x$: c'est bien le terme du milieu.
Donc $4x^2+20x+25 = (2x+5)^2$.

(c) $9 = 3^2$ et $16x^2 = (4x)^2$. Le double produit vaut $2\times 3\times 4x = 24x$: c'est bien le terme du milieu.
Donc $9+24x+16x^2 = (3+4x)^2$.

Ex. 27 ★★★ **Les carrés qui finissent par 5**

(a) $(10n+5)^2 = (10n)^2+2\times 10n\times 5+5^2 = 100n^2+100n+25$.
Donc $(10n+5)^2 = 100n^2+100n+25$.

(b) $100n(n+1)+25 = 100n^2+100n+25$. On retrouve le développement précédent.
Donc $(10n+5)^2 = 100n(n+1)+25$ pour tout entier n.

(c) $35 = 10\times 3+5$, donc $n = 3$: $35^2 = 100\times 3\times 4+25 = 1\,225$. $85 = 10\times 8+5$, donc $n = 8$: $85^2 = 100\times 8\times 9+25 = 7\,225$.
Donc $35^2 = 1\,225$ et $85^2 = 7\,225$.

4. *Développer (a − b)²*

Ex. 28 ★☆☆ **Le carré d'une différence**

(a) $(x-11)^2 = x^2-2\times x\times 11+11^2 = x^2-22x+121$

(b) $(x-14)^2 = x^2-2\times x\times 14+14^2 = x^2-28x+196$

(c) $(x-15)^2 = x^2-2\times x\times 15+15^2 = x^2-30x+225$

(d) $(x-8)^2 = x^2-2\times x\times 8+8^2 = x^2-16x+64$

Ex. 29 ★☆☆ **Avec un coefficient devant x**

(a) $(5x-4)^2 = (5x)^2-2\times 5x\times 4+4^2 = 25x^2-40x+16$

(b) $(5x-3)^2 = (5x)^2-2\times 5x\times 3+3^2 = 25x^2-30x+9$

(c) $(4x-9)^2 = (4x)^2-2\times 4x\times 9+9^2 = 16x^2-72x+81$

(d) $(5x-2)^2 = (5x)^2-2\times 5x\times 2+2^2 = 25x^2-20x+4$

Ex. 30 ★☆☆ **Le nombre en premier**

(a) $(9-7x)^2 = 9^2-2\times 9\times 7x+(7x)^2 = 49x^2-126x+81$

(b) $(6-7x)^2 = 6^2-2\times 6\times 7x+(7x)^2 = 49x^2-84x+36$

(c) $(1-2x)^2 = 1^2-2\times 1\times 2x+(2x)^2 = 4x^2-4x+1$

Ex. 31 ★★☆ **Vraie pour tout x ?**

(a) Pour $x = 0$: $(0-5)^2 = 25$ mais $0 - 0 - 25 = -25$. L'égalité est fausse
(le bon développement est $x^2 - 10x + 25$).

(b) $(5-x)^2 = 25 - 10x + x^2$ et $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Ce sont les mêmes termes. L'égalité est vraie pour tout x.

(c) Pour $x = 1$: $(3-1)^2 = 4$ mais $9 - 3 + 1 = 7$. L'égalité est fausse
(le bon développement est $9x^2 - 6x + 1$).

(d) $(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 - 28x + 49$. L'égalité est vraie pour tout x.

Ex. 32 ★★☆ **Des égalités à justifier**

(a) $(x-3)^2 + 6x = x^2 - 6x + 9 + 6x = x^2 + 9$. L'égalité est donc vraie pour tout x.

(b) $(2x-5)^2 - 4x^2 = 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 = 25 - 20x$. L'égalité est donc vraie pour tout x.

(c) $(x-9)^2 + 18x - 81 = x^2 - 18x + 81 + 18x - 81 = x^2$. L'égalité est donc vraie pour tout x.

Ex. 33 ★★☆ **Un nombre ou un signe devant le carré**

(a) $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$, donc $-(9x^2 - 12x + 4) = -9x^2 + 12x - 4$. Le signe $-$ change les trois signes : $-(3x-2)^2 = -9x^2 + 12x - 4$.

(b) $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$, donc $2(x^2 - 14x + 49) = 2x^2 - 28x + 98$. Le 2 ne rentre pas dans le carré : $2(x-7)^2 = 2x^2 - 28x + 98$.

(c) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, donc $-3(4x^2 + 4x + 1) = -12x^2 - 12x - 3$.
Donc $-3(2x+1)^2 = -12x^2 - 12x - 3$.

(d) $-x - 5 = -(x+5)$ et le carré d'un opposé est le même : $(-x-5)^2 = (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
Donc $(-x-5)^2 = x^2 + 10x + 25$.

Ex. 34 ★★☆ **Un carré de différence ?**

(a) $9x^2 = (3x)^2$, $25 = 5^2$ et $2 \times 3x \times 5 = 30x$. Oui : $9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$.

(b) Le dernier terme est -25 : dans $a^2 - 2ab + b^2$, le terme b^2 est toujours précédé de $+$. Non, ce n'est pas un carré de différence.

(c) $49 = 7^2$, $4x^2 = (2x)^2$ et $2 \times 7 \times 2x = 28x$. Oui : $49 - 28x + 4x^2 = (7-2x)^2$.

(d) $36 = 6^2$, mais le double produit serait $2 \times x \times 6 = 12x$, pas $6x$. Non, ce n'est pas un carré de différence.

Ex. 35 ★★★ **Une égalité presque toujours fausse**

(a) Pour $x = 0$: $(0-6)^2 = 36$ et $0^2 - 6^2 = -36$. Les deux membres sont différents : l'égalité est fausse pour $x = 0$.

(b) $(x-6)^2 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$.

(c) L'égalité s'écrit $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 36$, donc $-12x + 36 = -36$, donc $-12x = -72$, donc $x = 6$.
Contrôle : $(6-6)^2 = 0$ et $6^2 - 6^2 = 0$. L'égalité n'est vraie que pour $x = 6$.

5. *Développer $(a+b)(a-b)$*

Ex. 36 ★☆☆ **Somme fois différence**

(a) $(x+16)(x-16) = x^2 - 16^2 = x^2 - 256$

(b) $(x+5)(x-5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

(c) $(x+13)(x-13) = x^2 - 13^2 = x^2 - 169$

(d) $(x+17)(x-17) = x^2 - 17^2 = x^2 - 289$

Ex. 37 ★☆☆ **Avec un coefficient devant x**

(a) $(7x+8)(7x-8) = (7x)^2 - 8^2 = 49x^2 - 64$

(b) $(7x+5)(7x-5) = (7x)^2 - 5^2 = 49x^2 - 25$

(c) $(6x+1)(6x-1) = (6x)^2 - 1^2 = 36x^2 - 1$

(d) $(5x+7)(5x-7) = (5x)^2 - 7^2 = 25x^2 - 49$

Ex. 38 ★☆☆ **Le nombre en premier**

(a) $(7+6x)(7-6x) = 7^2 - (6x)^2 = -36x^2 + 49$

(b) $(9+4x)(9-4x) = 9^2 - (4x)^2 = -16x^2 + 81$

(c) $(2+5x)(2-5x) = 2^2 - (5x)^2 = -25x^2 + 4$

Ex. 39 ★★☆ **Quelle identité ?**

(a) $(4x-7)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7 + 7^2 = 16x^2 - 56x + 49$

(b) $(3x+5)(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$

(c) $(7x+3)(7x-3) = (7x)^2 - 3^2 = 49x^2 - 9$

(d) $(7x+9)^2 = (7x)^2 + 2 \times 7x \times 9 + 9^2 = 49x^2 + 126x + 81$

(e) $(5x-9)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 9 + 9^2 = 25x^2 - 90x + 81$

(f) $(3x+7)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2 = 9x^2 + 42x + 49$

Ex. 40 ★★☆ **Deux identités dans une expression**

(a) $A = 4x^2 + 20x + 25 - (4x^2 - 9) = 4x^2 + 20x + 25 - 4x^2 + 9 = 20x + 34$

(b) $B = 5(x^2 - 10x + 25) - (16x^2 - 1) = 5x^2 - 50x + 125 - (16x^2 - 1) = 5x^2 - 50x + 125 - 16x^2 + 1 = -11x^2 - 50x + 126$

Ex. 40 (suite)

(c) $C = x^2 - 1 - (16x^2 - 56x + 49) = x^2 - 1 - 16x^2 + 56x - 49 = -15x^2 + 56x - 50$

Ex. 41 ★★☆ **Les erreurs de Nathan**

(a) Nathan a calculé $2 \times 14 = 28$ au lieu de $14^2 = 196$. Le bon développement est $(x + 14)(x - 14) = x^2 - 196$.

(b) Nathan n'a pas élevé le coefficient 5 au carré : $(5x)^2 = 25x^2$. Le bon développement est $(5x + 4)(5x - 4) = 25x^2 - 16$.

(c) Nathan a oublié le carré sur x : $(2x)^2 = 4x^2$. Le bon développement est $(5 - 2x)(5 + 2x) = 25 - 4x^2$.

Ex. 42 ★★☆ **Les pointillés**

(a) $121 = 11^2$, donc $b = 11$. On complète : $(x + 11)(x - 11) = x^2 - 121$.

(b) $64x^2 = (8x)^2$, donc $a = 8x$. On complète : $(8x + 3)(8x - 3) = 64x^2 - 9$.

(c) $49x^2 = (7x)^2$ et $1 = 1^2$. On complète : $(7x - 1)(7x + 1) = 49x^2 - 1$.

Ex. 43 ★★☆ **Les pièges de l'ordre**

(a) Ici $a = 3x$ et $b = 5$: $(3x + 5)(3x - 5) = 9x^2 - 25$.
Donc $(5 + 3x)(3x - 5) = 9x^2 - 25$.

(b) Ici $a = 5$ et $b = x$: $(5 - x)(5 + x) = 25 - x^2$.
Donc $(-x + 5)(x + 5) = 25 - x^2$.

(c) $a = 0{,}5x$ et $b = 3$: $(0{,}5x)^2 - 3^2 = 0{,}25x^2 - 9$.
Donc $(0{,}5x + 3)(0{,}5x - 3) = 0{,}25x^2 - 9$.

(d) $(2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$.
Donc $(2a - 3b)(2a + 3b) = 4a^2 - 9b^2$.

Ex. 44 ★★★ **L'échange de terrain**

(a) Le champ rectangulaire mesure $(x + 6)$ m sur $(x - 6)$ m. Son aire est $(x + 6)(x - 6) = x^2 - 36$ m².

(b) Le champ carré a une aire de x^2 m². La différence vaut $x^2 - (x^2 - 36) = 36$. Le champ rectangulaire est toujours plus petit de 36 m² : Ahmed perd de la surface avec cet échange.

(c) Champ carré : $50^2 = 2\,500$ m². Champ rectangulaire : $56 \times 44 = 2\,500 - 36 = 2\,464$ m². Pour $x = 50$, les aires sont 2 500 m² et 2 464 m².

Ex. 45 ★★★ **Jusqu'à x⁴**

(a) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$, puis $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x^2)^2 - 9^2 = x^4 - 81$.
Donc $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9) = x^4 - 81$.

Ex. 45 (suite)

(b) $a = x^2$ et $b = 5$: $(x^2)^2 - 5^2 = x^4 - 25$.
Donc $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = x^4 - 25$.

(c) $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$, puis $(4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = (4x^2)^2 - 1 = 16x^4 - 1$.
Donc le produit vaut $16x^4 - 1$.

(d) $(x + 1)^2(x - 1)^2 = [(x + 1)(x - 1)]^2 = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$.
Donc $(x + 1)^2(x - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$.

(e) $a = 3x^2$ et $b = 2$: $(3x^2)^2 - 2 \times 3x^2 \times 2 + 4 = 9x^4 - 12x^2 + 4$.
Donc $(3x^2 - 2)^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$.

6. *Calcul mental avec les identités remarquables*

Ex. 46 ★★☆ **Le carré d'un nombre un peu plus grand**

(a) $83^2 = (80 + 3)^2 = 80^2 + 2 \times 80 \times 3 + 3^2 = 6\,400 + 480 + 9 = 6\,889$

(b) $22^2 = (20 + 2)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 2 + 2^2 = 400 + 80 + 4 = 484$

(c) $51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1^2 = 2\,500 + 100 + 1 = 2\,601$

(d) $303^2 = (300 + 3)^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 3 + 3^2 = 90\,000 + 1\,800 + 9 = 91\,809$

Ex. 47 ★★☆ **Le carré d'un nombre un peu plus petit**

(a) $999^2 = (1\,000 - 1)^2 = 1\,000^2 - 2 \times 1\,000 \times 1 + 1^2 = 1\,000\,000 - 2\,000 + 1 = 998\,001$

(b) $48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \times 50 \times 2 + 2^2 = 2\,500 - 200 + 4 = 2\,304$

(c) $39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \times 40 \times 1 + 1^2 = 1\,600 - 80 + 1 = 1\,521$

(d) $197^2 = (200 - 3)^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 3 + 3^2 = 40\,000 - 1\,200 + 9 = 38\,809$

Ex. 48 ★★☆ **Des produits presque égaux**

(a) $301 \times 299 = (300 + 1)(300 - 1) = 300^2 - 1^2 = 90\,000 - 1 = 89\,999$

(b) $61 \times 59 = (60 + 1)(60 - 1) = 60^2 - 1^2 = 3\,600 - 1 = 3\,599$

(c) $22 \times 18 = (20 + 2)(20 - 2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$

(d) $42 \times 38 = (40 + 2)(40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1\,600 - 4 = 1\,596$

Ex. 49 ★★☆ **Des différences de carrés**

(a) $87^2 - 13^2 = (87-13)(87+13) = 74 \times 100 = 7\,400$.
Donc $87^2 - 13^2 = 7\,400$.

(b) $1\,003^2 - 997^2 = (1\,003-997)(1\,003+997) = 6 \times 2\,000 = 12\,000$.
Donc $1\,003^2 - 997^2 = 12\,000$.

(c) $5{,}3^2 - 4{,}7^2 = (5{,}3-4{,}7)(5{,}3+4{,}7) = 0{,}6 \times 10 = 6$.
Donc $5{,}3^2 - 4{,}7^2 = 6$.

Ex. 50 ★★☆ **Une identité cachée**

(a) C'est $a^2+2ab+b^2$ avec $a=199$ et $b=1$: $(199+1)^2 = 200^2 = 40\,000$. Le résultat est 40 000.

(b) C'est $a^2-2ab+b^2$ avec $a=57$ et $b=7$: $(57-7)^2 = 50^2 = 2\,500$. Le résultat est 2 500.

(c) C'est $a^2+2ab+b^2$ avec $a=38$ et $b=2$: $(38+2)^2 = 40^2 = 1\,600$. Le résultat est 1 600.

Ex. 51 ★★☆ **Avec des décimaux**

(a) $(10+0{,}1)^2 = 100+2+0{,}01 = 102{,}01$.
Donc $10{,}1^2 = 102{,}01$.

(b) $(5-0{,}1)(5+0{,}1) = 25-0{,}01 = 24{,}99$.
Donc $4{,}9 \times 5{,}1 = 24{,}99$.

(c) $(100-0{,}5)^2 = 10\,000 - 100 + 0{,}25 = 9\,900{,}25$.
Donc $99{,}5^2 = 9\,900{,}25$.

(d) $(1-0{,}02)^2 = 1 - 0{,}04 + 0{,}0004 = 0{,}9604$.
Donc $0{,}98^2 = 0{,}9604$.

Ex. 52 ★★★ **Lequel est le plus grand ?**

(a) $2\,025 = 2\,026 - 1$ et $2\,027 = 2\,026 + 1$.
Donc $A = (2\,026-1)(2\,026+1) = 2\,026^2 - 1^2 = 2\,026^2 - 1$.

(b) $A = B - 1$.
Donc B est le plus grand, et il dépasse A de 1.

(c) $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$. Comme $n^2 - 1 < n^2$, le produit $(n-1)(n+1)$ est toujours inférieur à n^2, de 1 exactement.

7. *Factoriser par un facteur commun*

Ex. 53 ★☆☆ **Un nombre en facteur**

(a) $18x - 21 = 3 \times 6x - 3 \times 7 = 3(6x-7)$

(b) $3x - 3 = 3 \times x - 3 \times 1 = 3(x-1)$

(c) $6x + 12 = 6 \times x + 6 \times 2 = 6(x+2)$

(d) $45x + 9 = 9 \times 5x + 9 \times 1 = 9(5x+1)$

Ex. 54 ★★☆ **x en facteur**

(a) $3x^2 + x = x \times 3x + x \times 1 = x(3x+1)$

(b) $4x^2 + 3x = x \times 4x + x \times 3 = x(4x+3)$

(c) $4x^2 - 7x = x \times 4x - x \times 7 = x(4x-7)$

(d) $2x^2 + 9x = x \times 2x + x \times 9 = x(2x+9)$

Ex. 55 ★★☆ **Un nombre et x en facteur**

(a) $28x^2 + 21x = 7x \times 4x + 7x \times 3 = 7x(4x+3)$

(b) $15x^2 + 3x = 3x \times 5x + 3x \times 1 = 3x(5x+1)$

(c) $6x^2 - 14x = 2x \times 3x - 2x \times 7 = 2x(3x-7)$

(d) $25x^2 - 5x = 5x \times 5x - 5x \times 1 = 5x(5x-1)$

Ex. 56 ★★☆ **Un facteur commun négatif**

(a) $-10x^2 - 4x = (-2x) \times 5x + (-2x) \times 2 = -2x(5x+2)$

(b) $-49x^2 - 14x = (-7x) \times 7x + (-7x) \times 2 = -7x(7x+2)$

(c) $-32x^2 + 8x = (-8x) \times 4x + (-8x) \times (-1) = -8x(4x-1)$

Ex. 57 ★★☆ **Les factorisations de Paul**

(a) En redéveloppant : $3x \times (-9) = -27x$, et non $-9x$. Paul n'a pas divisé $-9x$ par $3x$. La bonne factorisation est $6x^2 - 9x = 3x(2x-3)$.

(b) Paul a oublié le terme $x = x \times 1$: il manque $+1$ dans la parenthèse. La bonne factorisation est $4x^2 + x = x(4x+1)$.

(c) L'égalité est juste, mais x est encore commun aux deux termes de la parenthèse. La factorisation complète est $10x - 15x^2 = 5x(2-3x)$.

Ex. 58 ★★☆ **Calculs astucieux**

(a) $37 \times 64 + 37 \times 36 = 37 \times (64+36) = 37 \times 100 = 3\,700$. Le résultat est 3 700.

(b) $2{,}7 \times 58 - 2{,}7 \times 48 = 2{,}7 \times (58-48) = 2{,}7 \times 10 = 27$. Le résultat est 27.

(c) $125 \times 17 - 125 \times 9 = 125 \times (17-9) = 125 \times 8 = 1\,000$. Le résultat est 1 000.

Ex. 59 ★★★ **Le jardin de Zoé**

(a) $6x^2 = 3x \times 2x$ et $15x = 3x \times 5$.
Donc $6x^2 + 15x = 3x(2x+5)$.

(b) Aire = largeur × longueur, et la largeur est $3x$. La longueur du jardin est donc $2x+5$ mètres.

Ex. 59 **(suite)**

(c) $2x + 5 = 25$, donc $2x = 20$, donc $x = 10$. L'aire vaut $6 \times 10^2 + 15 \times 10 = 600 + 150 = 750$ (contrôle : $30 \times 25 = 750$).
Donc $x = 10$ et le jardin a une aire de 750 m².

8. *Factoriser par une parenthèse commune*

Ex. 60 ★☆☆ **La parenthèse commune**

(a) $(2x + 7)(4x - 6) + (2x + 7)(x + 7) = (2x + 7)[(4x - 6) + (x + 7)] = (2x + 7)(5x + 1)$

(b) $(3x - 5)(3x + 3) + (3x - 5)(4x + 1) = (3x - 5)[(3x + 3) + (4x + 1)] = (3x - 5)(7x + 4)$

(c) $(2x + 3)(2x - 3) + (2x + 3)(2x + 4) = (2x + 3)[(2x - 3) + (2x + 4)] = (2x + 3)(4x + 1)$

Ex. 61 ★★☆ **Avec une soustraction**

(a) $(x - 3)(3x - 1) - (x - 3)(x + 6) = (x - 3)[(3x - 1) - (x + 6)] = (x - 3)(2x - 7)$

(b) $(x - 7)(4x + 1) - (x - 7)(3x - 4) = (x - 7)[(4x + 1) - (3x - 4)] = (x - 7)(x + 5)$

(c) $(x - 5)(3x + 2) - (x - 5)(x + 3) = (x - 5)[(3x + 2) - (x + 3)] = (x - 5)(2x - 1)$

Ex. 62 ★★☆ **Un carré cache le facteur**

(a) $(x + 2)^2 + (x + 2)(2x + 2) = (x + 2) \times (x + 2) + (x + 2)(2x + 2) = (x + 2)[(x + 2) + (2x + 2)] = (x + 2)(3x + 4)$

(b) $(2x + 3)^2 + (2x + 3)(2x + 2) = (2x + 3) \times (2x + 3) + (2x + 3)(2x + 2) = (2x + 3)[(2x + 3) + (2x + 2)] = (2x + 3)(4x + 5)$

(c) $(3x - 5)^2 + (3x - 5)(2x + 1) = (3x - 5) \times (3x - 5) + (3x - 5)(2x + 1) = (3x - 5)[(3x - 5) + (2x + 1)] = (3x - 5)(5x - 4)$

Ex. 63 ★★☆ **Le facteur 1 caché**

(a) $(3x - 5)(2x - 4) + (3x - 5) = (3x - 5)(2x - 4) + (3x - 5) \times 1 = (3x - 5)[(2x - 4) + 1] = (3x - 5)(2x - 3)$

(b) $(3x + 4)(3x + 7) + (3x + 4) = (3x + 4)(3x + 7) + (3x + 4) \times 1 = (3x + 4)[(3x + 7) + 1] = (3x + 4)(3x + 8)$

(c) $(3x - 4)(x - 6) + (3x - 4) = (3x - 4)(x - 6) + (3x - 4) \times 1 = (3x - 4)[(x - 6) + 1] = (3x - 4)(x - 5)$

Ex. 64 ★★☆ **L'erreur de Kenza**

(a) Le signe $-$ placé devant $(x - 4)$ change le signe des deux termes : $-(x - 4) = -x + 4$. Kenza a écrit -4 au lieu de $+4$: c'est son erreur.

(b) $(x + 2)(3x - 1 - x + 4) = (x + 2)(2x + 3)$. La bonne factorisation est $(x + 2)(2x + 3)$.

(c) Départ : $(3x^2 - x + 6x - 2) - (x^2 - 4x + 2x - 8) = 3x^2 + 5x - 2 - x^2 + 2x + 8 = 2x^2 + 7x + 6$.
Factorisation : $(x + 2)(2x + 3) = 2x^2 + 3x + 4x + 6 = 2x^2 + 7x + 6$. On obtient la même expression : la factorisation est juste.

Ex. 65 ★★☆ **Factoriser pour résoudre**

(a) $(x - 4)(2x + 3 - x - 8) = (x - 4)(x - 5)$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x - 4 = 0$ ou $x - 5 = 0$. Les solutions sont $x = 4$ et $x = 5$.

(b) $(4x + 1)^2 = (4x + 1)(4x + 1)$, donc l'expression vaut $(4x + 1)(4x + 1 - x - 7) = (4x + 1)(3x - 6)$. $4x + 1 = 0$ donne $x = -\frac{1}{4}$; $3x - 6 = 0$ donne $x = 2$. Les solutions sont $x = -\frac{1}{4}$ et $x = 2$.

Ex. 66 ★★★ **Le facteur commun déguisé**

(a) $2x - 6 = 2(x - 3)$. L'expression devient $2(x - 3)(x + 1) + (x - 3)(4x + 5) = (x - 3)[2(x + 1) + 4x + 5] = (x - 3)(2x + 2 + 4x + 5) = (x - 3)(6x + 7)$. La forme factorisée est $(x - 3)(6x + 7)$.

(b) $5 - x = -(x - 5)$. L'expression devient $-(x - 5)(2x + 1) + (x - 5)(x + 4) = (x - 5)[-(2x + 1) + x + 4] = (x - 5)(-2x - 1 + x + 4) = (x - 5)(3 - x)$. La forme factorisée est $(x - 5)(3 - x)$.

Ex. 67 ★★★ **Une identité cache le facteur commun**

(a) $1 - 2x = -(2x - 1)$, donc $-(1 - 2x)(x + 3) = +(2x - 1)(x + 3)$. L'expression vaut $(2x - 1)[(2x - 1) + (x + 3)] = (2x - 1)(3x + 2)$. La forme factorisée est $(2x - 1)(3x + 2)$.

(b) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$. L'expression vaut $(3x - 1)[(3x - 1) + (x + 2)] = (3x - 1)(4x + 1)$. La forme factorisée est $(3x - 1)(4x + 1)$.

(c) $25x^2 - 4 = (5x - 2)(5x + 2)$. L'expression vaut $(5x - 2)[(5x + 2) - (x + 1)] = (5x - 2)(4x + 1)$. La forme factorisée est $(5x - 2)(4x + 1)$.

9. Factoriser $a^2 - b^2$

Ex. 68 ★☆☆ **Reconnaître $a^2 - b^2$**

(a) $81x^2 - 121 = (9x)^2 - 11^2 = (9x - 11)(9x + 11)$

(b) $16x^2 - 81 = (4x)^2 - 9^2 = (4x - 9)(4x + 9)$

(c) $25x^2 - 121 = (5x)^2 - 11^2 = (5x - 11)(5x + 11)$

(d) $81x^2 - 1 = (9x)^2 - 1^2 = (9x - 1)(9x + 1)$

Ex. 69 ★☆☆ **Le nombre en premier**

(a) $4 - 9x^2 = 2^2 - (3x)^2 = (2 - 3x)(2 + 3x)$

(b) $144 - x^2 = 12^2 - x^2 = (12 - x)(12 + x)$

(c) $144 - 49x^2 = 12^2 - (7x)^2 = (12 - 7x)(12 + 7x)$

Ex. 70 ★★☆ **Un carré de parenthèse**

(a) $(x + 6)^2 - 25 = (x + 6)^2 - 5^2 = [x + 6 - 5][x + 6 + 5] = (x + 1)(x + 11)$

(b) $(x + 1)^2 - 49 = (x + 1)^2 - 7^2 = [x + 1 - 7][x + 1 + 7] = (x - 6)(x + 8)$

(c) $(x - 5)^2 - 4 = (x - 5)^2 - 2^2 = [x - 5 - 2][x - 5 + 2] = (x - 7)(x - 3)$

Ex. 71 ★★☆ **Deux carrés de parenthèses**

(a) $(4x - 4)^2 - (2x - 3)^2 = [(4x - 4) - (2x - 3)][(4x - 4) + (2x - 3)] = (2x - 1)(6x - 7)$

(b) $(x + 2)^2 - (4x + 1)^2 = [(x + 2) - (4x + 1)][(x + 2) + (4x + 1)] = (-3x + 1)(5x + 3)$

(c) $(2x + 4)^2 - (4x + 3)^2 = [(2x + 4) - (4x + 3)][(2x + 4) + (4x + 3)] = (-2x + 1)(6x + 7)$

Ex. 72 ★★☆ **Factorisable ou pas ?**

(a) Oui : $x^2 - 20^2$.
Donc $x^2 - 400 = (x - 20)(x + 20)$.

(b) Non : c'est une somme de deux carrés, pas une différence. On ne peut pas utiliser $a^2 - b^2$.

(c) Oui : $(4x)^2 - 1^2$.
Donc $16x^2 - 1 = (4x - 1)(4x + 1)$.

(d) Oui : $(9x)^2 - 8^2$.
Donc $81x^2 - 64 = (9x - 8)(9x + 8)$.

Ex. 73 ★★☆ **Des équations avec $a^2 - b^2$**

(a) $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x - 7)(2x + 7)$. $2x - 7 = 0$ donne $x = \frac{7}{2}$; $2x + 7 = 0$ donne $x = -\frac{7}{2}$. Les solutions sont $\frac{7}{2}$ et $-\frac{7}{2}$.

(b) $(x - 3)^2 - 5^2 = (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = (x - 8)(x + 2)$. $x - 8 = 0$ donne $x = 8$; $x + 2 = 0$ donne $x = -2$. Les solutions sont 8 et -2.

Ex. 74 ★★★ **L'abri de Malo**

(a) Aire du terrain moins aire de l'abri : $x^2 - 5^2 = x^2 - 25$. L'aire restante est $x^2 - 25$ m².

(b) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$.

(c) L'aire $(x - 5)(x + 5)$ est celle d'un rectangle de $(x + 5)$ m sur $(x - 5)$ m. Malo peut faire un potager de longueur $x + 5$ et de largeur $x - 5$ mètres.

(d) $12^2 - 25 = 144 - 25 = 119$ (contrôle : $7 \times 17 = 119$). Pour $x = 12$, l'aire restante est 119 m².

Ex. 75 ★★★ **Factoriser jusqu'au bout avec x^4**

(a) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$, et $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
Donc $x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

(b) $81x^4 - 1 = (9x^2 - 1)(9x^2 + 1)$, et $9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)$.
Donc $81x^4 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)(9x^2 + 1)$.

(c) C'est $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x^2$ et $b = 1$: $(x^2 - 1)^2$. Or $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.
Donc $x^4 - 2x^2 + 1 = (x - 1)^2(x + 1)^2$.

Ex. 76 ★★★ **Des équations piégées**

(a) $(2x + 1)^2 - (x - 3)^2 = 0$, donc $[(2x + 1) - (x - 3)][(2x + 1) + (x - 3)] = (x + 4)(3x - 2) = 0$.
Donc $x = -4$ ou $x = \frac{2}{3}$. Les solutions sont -4 et $\frac{2}{3}$.

(b) $(3x - 1)^2 - 7^2 = (3x - 8)(3x + 6) = 0$.
Donc $x = \frac{8}{3}$ ou $x = -2$. Attention : $3x - 1 = 7$ ne donne qu'une des deux solutions. Les solutions sont $\frac{8}{3}$ et -2.

(c) $(2x + 3)^2 - (5x)^2 = 0$, donc $(2x + 3 - 5x)(2x + 3 + 5x) = (3 - 3x)(7x + 3) = 0$.
Donc $x = 1$ ou $x = -\frac{3}{7}$. Les solutions sont 1 et $-\frac{3}{7}$.

(d) Un carré est toujours positif ou nul : il ne peut pas valoir -9. L'équation n'a pas de solution.

10. Développer ou factoriser : choisir la bonne forme

Ex. 77 ★☆☆ **Développée ou factorisée ?**

(a) C'est un produit : forme factorisée. Pour $x = 2$: $5 \times (-6) = -30$.

(b) C'est une somme de termes : forme développée. Pour $x = 2$: $8 + 2 - 5 = 5$.

(c) C'est une somme de termes : forme développée. Pour $x = 2$: $16 - 1 = 15$.

Ex. 77 **(suite)**

(d) C'est un produit : forme factorisée. Pour $x = 2$: $3 \times 0^2 = 0$.

Ex. 78 ★☆☆ **Associer les formes**

(a) $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$.

(b) $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$.

(c) $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$.

(d) $x^2 + 7x = x(x + 7)$.

Ex. 79 ★★☆ **La bonne forme pour calculer**

(a) Forme développée : $A = 0 + 0 - 4 = -4$. Pour $x = 0$, $A = -4$.

(b) Forme factorisée : $2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$, donc $A = 0 \times 4{,}5 = 0$. Pour $x = \frac{1}{2}$, $A = 0$.

(c) Forme factorisée : $x + 4 = 0$, donc $A = (-9) \times 0 = 0$. Pour $x = -4$, $A = 0$.

(d) Forme factorisée : $A = 1 \times 5 = 5$. Pour $x = 1$, $A = 5$.

Ex. 80 ★★☆ **Factoriser jusqu'au bout**

(a) Facteur commun 3 : $3(x^2 - 9)$, puis $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
Donc $3x^2 - 27 = 3(x - 3)(x + 3)$.

(b) Facteur commun 2 : $2(9x^2 - 1)$, puis $9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)$.
Donc $18x^2 - 2 = 2(3x - 1)(3x + 1)$.

(c) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$, donc l'expression vaut $(x + 4)(x - 4) + (x + 4)(2x - 1) = (x + 4)(x - 4 + 2x - 1) = (x + 4)(3x - 5)$. La forme factorisée est $(x + 4)(3x - 5)$.

Ex. 81 ★★☆ **Développer ou factoriser pour prouver**

(a) On factorise par $(x + 2)$: $(x + 2)[(x + 2) - (x - 3)] = (x + 2)(x + 2 - x + 3) = 5(x + 2)$. L'égalité est donc vraie pour tout x.

(b) On factorise avec $a^2 - b^2$: $[(3x + 1) - (3x - 1)][(3x + 1) + (3x - 1)] = 2 \times 6x = 12x$. L'égalité est donc vraie pour tout x.

Ex. 82 ★★★ **Trois questions, trois formes**

(a) $B = x^2 + 10x + 25 - 49 = x^2 + 10x - 24$.

(b) $B = (x + 5)^2 - 7^2 = (x + 5 - 7)(x + 5 + 7) = (x - 2)(x + 12)$.

(c) Avec la forme factorisée : $(x - 2)(x + 12) = 0$, donc $x = 2$ ou $x = -12$. Les solutions de $B = 0$ sont 2 et -12.

Ex. 82 **(suite)**

(d) Avec la forme développée : $x^2 + 10x - 24 = -24$, donc $x^2 + 10x = 0$, donc $x(x + 10) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = -10$. Les solutions de $B = -24$ sont 0 et -10.

Ex. 83 ★★★ **La méthode de Romane**

(a) $9^2 = 81$ et $9 \times 9 = 81$. Les deux membres sont égaux : 9 est bien solution.

(b) $x^2 - 9x = x(x - 9) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 9$. Romane a perdu la solution 0, car on ne peut pas diviser par x quand $x = 0$. Non, elle n'a pas trouvé toutes les solutions.

(c) $(x - 2)^2 - 25 = 0$, donc $(x - 2 - 5)(x - 2 + 5) = (x - 7)(x + 3) = 0$.
Donc $x = 7$ ou $x = -3$. Les solutions sont 7 et -3.

Ex. 84 ★★★ **Trois écritures d'une même expression**

(a) $A = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3 = C$.
Donc $A = C$ pour tout x.

(b) $B = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3 = C$.
Donc $B = C$ pour tout x.

(c) Avec C : $0 + 0 - 3 = -3$. Pour $x = 0$, l'expression vaut -3.

(d) Avec B : $x + 3 = 0$, donc $B = (-4) \times 0 = 0$. Pour $x = -3$, l'expression vaut 0.

(e) $C = A = (x + 1)^2 - 4$. Un carré est positif ou nul : $(x + 1)^2 \geq 0$, donc $(x + 1)^2 - 4 \geq -4$.
Donc $C \geq -4$ pour tout x.

11. *Prouver avec le calcul littéral : programmes de calcul*

Ex. 85 ★☆☆ **Un premier programme**

(a) $5 + 3 = 8$; $8 \times 2 = 16$; $16 - 6 = 10$. On obtient 10.

(b) $2(x + 3) - 6 = 2x + 6 - 6 = 2x$. Le résultat est $2x$: c'est le double du nombre choisi.

Ex. 86 ★☆☆ **Retrouver les étapes**

(a) Choisis un nombre ; ajoute 1 ; multiplie le résultat par 4 ; soustrais 3.

(b) $4 \times (3 + 1) - 3 = 16 - 3 = 13$. On obtient 13.

(c) $4 \times (-2 + 1) - 3 = -4 - 3 = -7$. On obtient -7.

Ex. 87 ★★☆ **Un programme avec un carré**

(a) $2+10=12$; $12^2=144$; $144-20\times 2=104$. On obtient 104.

(b) $(x+10)^2-20x=x^2+20x+100-20x=x^2+100$. Le résultat est x^2+100.

(c) $30^2+100=900+100=1\,000$. En choisissant 30, on obtient 1 000.

Ex. 88 ★★☆ **Deux programmes jumeaux**

(a) A : $(3+5)\times 3=24$. B : $3^2+5\times 3=9+15=24$. Les deux programmes donnent 24.

(b) A : $(-7+5)\times(-7)=(-2)\times(-7)=14$. B : $(-7)^2+5\times(-7)=49-35=14$. Les deux programmes donnent 14.

(c) A : $(x+5)\times x=x^2+5x$. B : x^2+5x. Les deux expressions sont égales pour tout x : oui, les programmes donnent toujours le même résultat.

Ex. 89 ★★☆ **Un résultat qui ne change pas**

(a) Avec 4 : $7\times 1-16=-9$. Avec 7 : $10\times 4-49=40-49=-9$. On obtient -9 dans les deux cas.

(b) $(x+3)(x-3)-x^2=x^2-9-x^2=-9$. Le résultat est -9.

(c) L'expression réduite ne contient plus x : le résultat vaut toujours -9. Non, il ne dépend pas du nombre choisi.

Ex. 90 ★★★ **Toujours un carré ?**

(a) Avec 1 : $5\times 1+4=9$. Avec 3 : $7\times 3+4=25$. Avec 6 : $10\times 6+4=64$. On obtient 9, 25 et 64.

(b) $9=3^2$, $25=5^2$ et $64=8^2$: on obtient le carré du nombre choisi augmenté de 2. Conjecture : le résultat est toujours le carré de (nombre choisi + 2).

(c) Avec x : $x(x+4)+4=x^2+4x+4=(x+2)^2$. Le résultat est bien le carré de $x+2$ pour tout nombre x : la conjecture est prouvée.

Ex. 91 ★★★ **Trouver le nombre de départ**

(a) $2+9=11$; $11^2=121$; $121-81=40$. On obtient 40.

(b) $(x+9)^2-81=(x+9-9)(x+9+9)=x(x+18)$. Le résultat est $x(x+18)$.

(c) $x(x+18)=0$ donne $x=0$ ou $x=-18$. Pour obtenir 0, il faut choisir 0 ou -18.

Ex. 91 (suite)

(d) $(x+9)^2-81=19$ donne $(x+9)^2-100=0$, donc $(x+9-10)(x+9+10)=(x-1)(x+19)=0$. Donc $x=1$ ou $x=-19$. Pour obtenir 19, il faut choisir 1 ou -19.

Ex. 92 ★★★ **Léo et Maëlle**

(a) Léo : $(5-2)^2=9$. Maëlle : $5^2-2=23$. Léo obtient 9 et Maëlle 23.

(b) Léo : $(x-2)^2=x^2-4x+4$. Maëlle : x^2-2.

(c) On résout $x^2-4x+4=x^2-2$, donc $-4x+4=-2$, donc $-4x=-6$, donc $x=1{,}5$. Contrôle : $(1{,}5-2)^2=0{,}25$ et $1{,}5^2-2=0{,}25$. Oui : ils obtiennent le même résultat en choisissant 1,5, et seulement ce nombre.

Ex. 93 ★★★ **Quatre entiers qui se suivent**

(a) On obtient 25, 121 et 361, c'est-à-dire 5^2, 11^2 et 19^2. On obtient chaque fois un carré.

(b) $n(n+3)=n^2+3n$ et $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$.

(c) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n(n+3)\times(n+1)(n+2)+1=y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2$. Le résultat est toujours le carré de n^2+3n+1.

(d) $n=10$: $n^2+3n+1=100+30+1=131$. Donc $10\times 11\times 12\times 13+1=131^2=17\,161$.

12. *Exercices type brevet*

Ex. 94 ★☆☆ **L'affiche de Sofia**

(a) $3(x+4)=3x+12$. L'aire est $3x+12$ dm².

(b) $3\times 6+12=30$. L'aire est 30 dm².

(c) $2(x+4)+2\times 3=2x+8+6=2x+14$. Le périmètre est $2x+14$ dm.

Ex. 95 ★★☆ **Les fournitures d'Élise**

(a) Prix total : $3x+2(x+2)=3x+2x+4=5x+4$. Le prix total est bien $5x+4$ euros.

(b) $5\times 6+4=34$. Elle paie 34 €.

(c) $5x+4=29$, donc $5x=25$, donc $x=5$. Elle a acheté 5 cahiers.

Ex. 96 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Pour $x=1$: $(1+1)^2=4$ mais $1^2+1=2$. L'affirmation est fausse.

(b) $49\times 51=(50-1)(50+1)=2\,500-1=2\,499$. L'affirmation est vraie.

(c) $4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x-5)(2x+5)$. L'affirmation est vraie.

Ex. 96 **(suite)**

(d) $(x-3)(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$. L'affirmation est vraie.

Ex. 97 ★★☆ **L'aquarium de Jules**

(a) $V = (x+2)(x-2) \times 4 = 4(x^2-4) = 4x^2 - 16$. Le volume est bien $4x^2 - 16$ dm³.

(b) $4 \times 5^2 - 16 = 100 - 16 = 84$. Le volume est 84 dm³, soit 84 L.

(c) $4x^2 - 16 = 128$, donc $4x^2 = 144$, donc $x^2 = 36$. Comme $x > 2$, $x = 6$ (l'aquarium mesure alors 8 dm sur 4 dm sur 4 dm). Jules doit choisir $x = 6$.

Ex. 98 ★★☆ **La formule du tableur**

(a) $(3+1) \times (3-1) + 5 = 8 + 5 = 13$. La cellule B2 affiche 13.

(b) $(x+1)(x-1) + 5 = x^2 - 1 + 5 = x^2 + 4$. La cellule B2 contient $x^2 + 4$.

(c) Un carré est positif ou nul : $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 4 \geq 4$. Le plus petit résultat possible est 4 (pour $x = 0$). Non, Noah ne peut pas obtenir un nombre strictement inférieur à 4.

Ex. 99 ★★★ **Le triangle de Clara**

(a) $(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$ et $x^2 + (x+7)^2 = x^2 + x^2 + 14x + 49 = 2x^2 + 14x + 49$.

(b) Les côtés mesurent 5 cm, 12 cm et 13 cm. $13^2 = 169$ et $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, oui, le triangle est rectangle pour $x = 5$.

(c) $x^2 + (x+7)^2 - (x+8)^2 = 2x^2 + 14x + 49 - x^2 - 16x - 64 = x^2 - 2x - 15$. Et $(x-5)(x+3) = x^2 + 3x - 5x - 15 = x^2 - 2x - 15$. L'égalité est donc vraie pour tout x.

(d) Le plus grand côté est $x + 8$. Le triangle est rectangle si et seulement si $x^2 + (x+7)^2 = (x+8)^2$, c'est-à-dire $(x-5)(x+3) = 0$, donc $x = 5$ ou $x = -3$. Comme $x > 0$, seule la valeur 5 convient. Non, il n'existe pas d'autre valeur.

Ex. 100 ★★★ **La bordure de la piscine**

(a) Avec la bordure, on obtient un grand carré de côté $x + 1{,}5 + 1{,}5 = x + 3$. Aire de la bordure : $(x+3)^2 - x^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$. La bordure a une aire de $6x + 9$ m².

(b) $6 \times 8 + 9 = 57$. La bordure a une aire de 57 m².

Ex. 100 **(suite)**

(c) Avec 1 800 €, on peut acheter $1\,800 \div 30 = 60$ m² de carrelage. On veut $6x + 9 \leq 60$, donc $6x \leq 51$, donc $x \leq 8{,}5$. Le plus grand côté possible pour la piscine est 8,5 m.

Ex. 101 ★★★ **Le calendrier de Timothée**

(a) En haut à droite 4, en bas à gauche $10 : 4 \times 10 - 3 \times 11 = 40 - 33 = 7$. On obtient 7.

(b) $16 \times 22 - 15 \times 23 = 352 - 345 = 7$. On obtient 7.

(c) Conjecture : le calcul de Timothée donne toujours 7.

(d) Les dates sont n, $n+1$ (en haut à droite), $n+7$ (en bas à gauche) et $n+8$. Calcul : $(n+1)(n+7) - n(n+8) = n^2 + 8n + 7 - n^2 - 8n = 7$. Le résultat vaut 7 pour tout carré de dates : la conjecture est prouvée.

Ex. 102 ★★★ **Le cadre photo**

(a) On ajoute 2 cm de chaque côté, soit 4 cm : le grand rectangle mesure $(x+4)$ cm sur $(x+8)$ cm.

(b) Aire du grand rectangle moins aire de la photo : $(x+4)(x+8) - x(x+4) = x^2 + 12x + 32 - x^2 - 4x = 8x + 32$. L'aire du cadre est bien $8x + 32$ cm².

(c) $8x + 32 = 8(x+4)$. L'aire du cadre est $8(x+4)$ cm².

(d) On résout $x(x+4) = 8(x+4)$, soit $x(x+4) - 8(x+4) = (x+4)(x-8) = 0$.
Donc $x = -4$ ou $x = 8$; comme $x > 0$, $x = 8$. Contrôle : photo $8 \times 12 = 96$ cm² et cadre $8 \times 12 = 96$ cm². Le cadre et la photo ont la même aire pour $x = 8$.

Ex. 103 ★★★ **Le grand classique**

(a) $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$ et $(3x-2)(x+5) = 3x^2 + 13x - 10$. $E = 9x^2 - 12x + 4 - 3x^2 - 13x + 10 = 6x^2 - 25x + 14$.
Donc $E = 6x^2 - 25x + 14$.

(b) $E = (3x-2)[(3x-2) - (x+5)] = (3x-2)(2x-7)$.
Donc $E = (3x-2)(2x-7)$.

(c) Pour $x = \frac{2}{3}$: $3x - 2 = 0$, donc avec la forme factorisée $E = 0$. Pour $x = -1$: $E = (-5) \times (-9) = 45$.
Donc $E = 0$ pour $x = \frac{2}{3}$ et $E = 45$ pour $x = -1$.

(d) Avec la forme développée : $6x^2 - 25x + 14 = 14$, donc $6x^2 - 25x = 0$, donc $x(6x - 25) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = \frac{25}{6}$. Les solutions de $E = 14$ sont 0 et $\frac{25}{6}$.