49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 3e : distributivité, double distributivité, réduire

À retenir : $-(a-b) = -a+b$: tous les signes changent. $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$: 4 produits avec leur signe, puis je réduis. $x \times x = x^2$ mais $x + x = 2x$; $(-2)^2 = 4$ mais $-2^2 = -4$.

Ex. 1 ★☆☆ **Réduire une expression** — Réduis chaque expression quand c'est possible. Sinon, explique pourquoi.

(a) $x + x$

(b) $x \times x$

(c) $3x^2 + 2x$

(d) $-4x + 9 - 6x - 11$

(e) $2x^2 - 5x - 7x^2 + 3x$

(f) $-3x \times 4x$

Ex. 2 ★☆☆ **Distributivité simple et signe « moins »** — Développe et réduis chaque expression.

(a) $3(x+5)$ (b) $-(2x-9)$

(c) $7-(3x-2)$ (d) $x(x-8)$

(e) $-2x(5x-3)$ (f) $4(2x-1)-5(x-3)$

Ex. 3 ★☆☆ **Double distributivité** — Développe, réduis et ordonne chaque expression suivant les puissances décroissantes de x.

(a) $(x+4)(x+2)$

(b) $(x+6)(x-3)$

(c) $(3x-1)(x-4)$

(d) $(2x+5)(4-x)$

(e) $-(x-2)(x+7)$

(f) $2(x+1)(3x-2)$

(g) $(x+5)(x-1)-(x-3)(x+2)$

Ex. 4 ★★☆ **Programme de calcul et erreurs à repérer** — Voici un programme de calcul. Choisir un nombre. Lui ajouter 3. Multiplier le résultat par le nombre choisi diminué de 5. Ajouter au produit le double du nombre choisi.

(a) Applique le programme au nombre -2.

(b) Le nombre choisi est noté x. Écris le résultat du programme sous la forme d'une expression $P(x)$.

Ex. 4 (suite)

(c) Lina développe le produit de la question précédente et trouve $x^2 - 2x + 15$. Repère son erreur, puis donne le bon développement.

(d) Développe et réduis $P(x)$.

(e) Pour $x = -2$, Tom calcule avec la forme réduite et trouve -19. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 5 ★★★ **Un rectangle qu'on agrandit** — Un rectangle a pour côtés $x+7$ et $x-3$ (en cm, avec $x > 3$). On note $A(x)$ son aire. On allonge chaque côté de 1 cm. On note $B(x)$ l'aire du nouveau rectangle.

(a) Sacha affirme que $A(x) = x^2 - 21$. Calcule $A(5)$ avec les côtés du rectangle, puis avec la formule de Sacha. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Développe et réduis $A(x)$.

(c) Écris $B(x)$ à l'aide des nouveaux côtés, puis développe et réduis $B(x)$.

(d) Montre que l'aire augmente de $2x + 5$ cm², quel que soit $x > 3$.

Ex. 6 ★★★ **Un programme au résultat constant** — Programme de Noé : choisir un nombre x. Lui soustraire 4. Multiplier le résultat par le nombre choisi augmenté de 2. Soustraire le carré du nombre choisi. Ajouter le double du nombre choisi.

(a) Applique le programme de Noé au nombre -3. Écris chaque étape.

(b) Écris le résultat du programme de Noé sous forme d'une expression de x. Prouve que ce résultat ne dépend pas du nombre choisi.

(c) Mila remplace la dernière étape par « Soustraire le nombre choisi diminué de 4 ». Elle trouve $-3x - 12$. Repère son erreur et donne le bon résultat réduit.

(d) Avec le programme de Mila, quel nombre faut-il choisir pour obtenir 11 ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Vrai ou faux : quatre affirmations** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul. Si une égalité « pour tout réel x » est fausse, donne aussi un contre-exemple.

(a) Pour tout réel x, $(x-2)(3x+1) = 3x^2 - 5x - 2$.

(b) Pour $x = -4$, l'expression $2x^2 - x$ vaut -28.

(c) Pour tout réel x, $2x(x-3) - (x-1)(x-5) = x^2 - 5$.

(d) Pour tout réel x, $4x - (x-4)(x+1) = -x^2 + 7x - 4$.

2. Développer et réduire une expression

À retenir : Développe chaque produit à part, puis réduis et ordonne : ax^2+bx+c. Après un « moins », garde la parenthèse : $5-(x-2)(x+1)=5-(x^2-x-2)=-x^2+x+7$. Contrôle avec $x=1$.

Ex. 8 ★☆☆ **Distributivité et coefficients variés** — Développe et réduis chaque expression, puis ordonne-la par puissances décroissantes de x.

(a) $-2x(3x^2-5x+4)$

(b) $(2x-7)(x+5)$

(c) $(3-x)(4x-1)$

(d) $x(5-2x)+3x^2-7x$

(e) $0{,}5(6x-4)-1{,}5x$

(f) $\frac{1}{3}(9x^2-6x)+2x$

Ex. 9 ★☆☆ **Un « moins » devant une parenthèse** — Développe et réduis, puis contrôle ton résultat avec $x=1$.

(a) $9-(4x-6)$

(b) $-(x^2-3x+5)+2x^2$

(c) $3x-(x+2)(x-4)$

(d) $4-(2x+3)(x-2)$

(e) $(x-3)(2x+1)-(x+4)(x-2)$

Ex. 10 ★★☆ **Le volume d'un pavé droit** — Un pavé droit a pour dimensions $2x$, $x+3$ et $x-4$ (en cm), avec $x>4$. On note $V(x)$ son volume en cm³.

(a) Développe et réduis $(x+3)(x-4)$.

(b) Déduis-en la forme développée et ordonnée de $V(x)=2x(x+3)(x-4)$.

(c) Calcule $V(5)$ avec la forme de départ, puis avec ta forme développée. Conclus.

(d) Léna affirme : « Si on double x, le volume est multiplié par 8. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 11 ★★☆ **Démontrer, réfuter, corriger**

(a) Démontre que pour tout réel x, $(2x+1)(x-3)-x(x-5)=x^2-3$.

(b) Noé remarque que pour $x=0$, $(x+2)(3x-1)$ et $3x^2-2$ valent toutes deux -2. Ces deux expressions sont-elles égales pour tout réel x ? Justifie.

(c) Inès écrit : $4x-(3x-5)(x+2)=4x-3x^2+6x-5x-10=-3x^2+5x-10$. Repère son erreur, puis corrige.

(d) Démontre que pour tout réel x, $\frac{1}{2}(4x-6)-\frac{3}{4}(x-4)=\frac{5}{4}x$.

Ex. 12 ★★★ **Un programme de calcul surprenant** — Lina propose ce programme de calcul. Choisis un nombre x. Ajoute-lui 3, puis multiplie le résultat par le nombre choisi diminué de 5. Retranche enfin le carré de la différence entre le nombre choisi et 1.

(a) Applique le programme au nombre 0, puis au nombre 4.

(b) Lina affirme : « Avec deux nombres, j'ai obtenu le même résultat, donc c'est toujours ce résultat. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Exprime le résultat du programme en fonction de x. Développe-le et réduis-le, puis conclus.

(d) Théo remplace « Ajoute-lui 3 » par « Ajoute-lui 4 ». Le résultat est-il encore le même pour tous les nombres ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Une plaque découpée** — Une plaque rectangulaire a pour côtés $2x+3$ et $x+5$ (en cm), avec $x\geq 1$. On y découpe un rectangle de côtés $2x-1$ et $x+3$. On note $A(x)$ l'aire de la plaque restante, en cm².

(a) Exprime $A(x)$ en fonction de x, sans développer. Explique pourquoi le second produit doit rester entre parenthèses.

(b) Mehdi a trouvé $A(x)=18x+12$. Calcule $A(1)$ avec ton expression de départ, puis avec celle de Mehdi. Que peux-tu conclure ?

(c) Développe et réduis $A(x)$, en détaillant chaque produit.

(d) Calcule l'aire de la plaque restante pour $x=2{,}5$.

Ex. 14 ★★★ **Deux jardins à comparer** — Pour $x>1$ (en m), un jardin a la forme d'un triangle rectangle. Les côtés de son angle droit mesurent $3x+1$ et $4x-2$. Son aire est $T(x)=\frac{1}{2}(3x+1)(4x-2)$. Un second jardin est un rectangle de côtés $1{,}5x$ et $4x-1$. Son aire est notée $R(x)$.

(a) Développe et réduis $T(x)$. Commence par multiplier deux des trois facteurs, bien choisis, puis contrôle avec $x=0$.

(b) Écris $R(x)$, puis développe-le et réduis-le.

(c) Jade affirme : « Les deux jardins ont la même aire pour tout $x>1$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Calcule et réduis $T(x)-R(x)$. Trouve la valeur de x pour laquelle les deux jardins ont la même aire, puis vérifie-la.

3. Identités remarquables dans le sens du développement

À retenir : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Nomme a et b, puis mets des parenthèses : $(4x)^2=16x^2$. N'oublie jamais $2ab$: $(x+2)^2\neq x^2+4$.

Ex. 15 ★☆☆ **Développer avec une identité remarquable** — Développe et réduis chaque expression avec une identité remarquable. Commence par nommer a et b.

(a) $(x+6)^2$ (b) $(3x+4)^2$

(c) $(x-9)^2$ (d) $(5x-2)^2$

(e) $(2x-1)(2x+1)$ (f) $(-x+4)^2$

(g) $(6+x)(6-x)$

Ex. 16 ★☆☆ **Calcul mental avec une identité** — Calcule sans calculatrice en écrivant d'abord le nombre sous la forme $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ou $(a+b)(a-b)$.

(a) 101^2 (b) 49×51 (c) 98^2

(d) 203×197 (e) 61^2

Ex. 17 ★★☆ **Les erreurs de Léo** — Léo a développé quatre expressions, mais chacune de ses réponses contient une erreur.

(a) Léo écrit $(x+5)^2 = x^2 + 25$. Teste son égalité pour $x = 1$, puis donne le bon développement.

(b) Léo écrit $(3x-2)^2 = 3x^2 - 12x + 4$. Nomme a et b, repère son erreur et corrige-la.

(c) Léo écrit $(4x-1)(4x+1) = 16x^2 + 1$. Quelle identité doit-il utiliser ? Corrige son résultat.

(d) Léo écrit $-(x-3)^2 = -x^2 - 6x + 9$. Développe d'abord $(x-3)^2$, puis donne le bon résultat.

Ex. 18 ★★☆ **Une plaque découpée** — Soit $x > 1$. Une plaque carrée a pour côté $2x+3$ (en cm). Dans un coin, on découpe un rectangle de côtés $x+1$ et $x-1$ (en cm). On note $A(x)$ l'aire restante, en cm².

(a) Exprime l'aire de la plaque carrée en fonction de x, sous forme développée et réduite.

(b) Exprime l'aire du rectangle découpé en fonction de x, sous forme développée.

(c) Montre que $A(x) = 3x^2 + 12x + 10$.

(d) Calcule l'aire restante pour $x = 2$ de deux façons : avec la formule de $A(x)$, puis avec les dimensions.

Ex. 19 ★★★ **Le programme d'Inès** — Inès propose ce programme de calcul : choisir un nombre x non nul ; calculer le carré de $x+7$; lui soustraire le carré de $x-7$; diviser le résultat par x.

(a) Teste le programme avec le nombre 2.

(b) Nomme a et b, puis développe et réduis $(x+7)^2$ et $(x-7)^2$.

(c) Montre que $(x+7)^2 - (x-7)^2 = 28x$ pour tout réel x, puis conclus sur le résultat du programme.

(d) Nathan écrit $(x+7)^2 = x^2 + 49$ et $(x-7)^2 = x^2 - 49$, donc le programme donne $\frac{98}{x}$. A-t-il raison ? Justifie avec $x = 1$.

(e) Sans calculatrice, déduis-en la valeur de $107^2 - 93^2$.

Ex. 20 ★★★ **Vrai ou faux pour tout réel x** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie. Si elle est vraie, développe. Si elle est fausse, donne un contre-exemple, puis le bon développement.

(a) Pour tout réel x, $(-4x+3)^2 = (4x-3)^2$.

(b) Pour tout réel x, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

(c) L'expression $(5x+1)(5x-1) - 25x^2$ prend la même valeur pour tout réel x.

(d) Pour tout réel x, $-(x-6)^2 = -x^2 - 12x - 36$.

(e) Pour tout réel x, $(2x-5)^2 - (2x-5)(2x+5) = 50 - 20x$.

Ex. 21 ★★★ **Deux carrés et un rectangle** — Soit $x > 2$, toutes les longueurs sont en cm. Un carré C a pour côté $3x$. Un rectangle R a pour côtés $3x-1$ et $3x+1$. Un carré K a pour côté $3x-5$.

(a) Exprime l'aire de C en fonction de x. Mathis propose $3x^2$: explique son erreur.

(b) Développe l'aire de R, puis montre que l'aire de R est toujours inférieure de 1 cm² à celle de C.

(c) Déduis-en sans calculatrice 59×61, puis calcule 89×91 de la même façon.

(d) Nomme a et b, puis développe et réduis l'aire de K.

(e) Montre que l'aire de C moins l'aire de K vaut $30x - 25$, puis vérifie cette égalité pour $x = 3$.

4. *Factoriser : facteur commun et identités remarquables*

À retenir : Facteur commun d'abord (nombre, x, parenthèse entière ; $5 - x = -(x-5)$). Sinon : 3 termes $\to (a \pm b)^2$ (vérifie $2ab$) ; 2 termes avec « $-$ » $\to a^2 - b^2$. $x^2 + 4$ ne se factorise pas. Redéveloppe pour contrôler.

Ex. 22 ★☆☆ **Mettre en facteur** — Factorise le plus possible.

(a) $A = 12x^2 - 8x$

(b) $B = (x-3)(2x+5) + (x-3)(4x-1)$

(c) $C = (x+4)^2 - (x+4)(3x-2)$

(d) $D = (x-5)(2x+3) + (5-x)(x-6)$

(e) $E = (2x+1)^2 + 6x + 3$

(f) $F = (3x-1)(x+2) - (x+2)$

Ex. 23 ★☆☆ **Reconnaître une identité remarquable** — Factorise le plus possible.

(a) $H = 25x^2 - 20x + 4$

(b) $K = 9x^2 + 30x + 25$

(c) $L = 16x^2 - 49$

(d) $M = x^2 - 7$

Ex. 23 (suite)

(e) $P = (3x-1)^2 - 16$

(f) $R = (2x+3)^2 - (x-4)^2$

(g) $T = 2x^2 + 12x + 18$

Ex. 24 ★★☆ **Factorisations à contrôler** — Nolan a écrit les égalités suivantes. Pour chacune : vrai ou faux ? Justifie.

(a) « $x^2 + 25 = (x+5)(x-5)$ pour tout réel x. »

(b) « $16x^2 - 12x + 9 = (4x-3)^2$ pour tout réel x. »

(c) « La forme factorisée le plus possible de $3x^2 - 48$ est $(3x-12)(x+4)$. »

(d) « $(x+6)^2 - 2(x+6) = (x+6)(x+4)$ pour tout réel x. »

Ex. 25 ★★☆ **L'aire d'un cadre** — Soit x un réel positif. Dans un carré de côté $2x+5$, Inès découpe un carré de côté $x+1$. On note $A(x)$ l'aire de la partie restante : $A(x) = (2x+5)^2 - (x+1)^2$.

(a) Développe et réduis $A(x)$.

(b) Factorise $A(x)$ le plus possible.

(c) Contrôle ta factorisation en la redéveloppant.

(d) Calcule l'aire restante pour $x = 1{,}5$ avec la forme la plus pratique.

Ex. 26 ★★★ **Des facteurs communs bien cachés** — Soit x un réel. On pose $E = (x-3)(4x+1) - (3-x)^2$, $F = (2x+1)(x-3) - (4x^2-1)$ et $G = 3x^2 - 12 + (x-2)^2$.

(a) Explique pourquoi $(3-x)^2 = (x-3)^2$, puis factorise E.

(b) Écris $4x^2 - 1$ sous forme d'un produit, puis factorise F le plus possible.

(c) Factorise G le plus possible en commençant par $3x^2 - 12$.

(d) Développe et réduis E à partir de sa forme de départ, puis à partir de ta forme factorisée. Conclus.

Ex. 27 ★★★ **Factoriser… quand c'est possible** — Soit x un réel. Ben propose deux expressions : $P(x) = 5x^2 - 10$ et $Q(x) = x^4 - 81$.

(a) Factorise $P(x)$ le plus possible, puis donne les valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$.

(b) Écris $Q(x)$ sous la forme $a^2 - b^2$, puis factorise-la une première fois.

(c) Factorise $Q(x)$ le plus possible. Justifie que tu ne peux pas aller plus loin.

(d) Déduis-en les réels x pour lesquels $Q(x) = 0$.

(e) Trouve tous les nombres c pour lesquels $x^2 + cx + 49$ s'écrit $(x+b)^2$, avec b un nombre. Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Une parenthèse entière** — Pour tout réel x, on pose $K(x) = 49 - (x+3)^2$.

(a) Développe et réduis $K(x)$.

(b) Factorise $K(x)$. Attention : le carré soustrait est celui de toute la parenthèse $x+3$.

(c) Résous l'équation $K(x) = 0$.

(d) Montre que $K(x) \leqslant 49$ pour tout réel x. Pour quelle valeur de x a-t-on $K(x) = 49$?

(e) Choisis la forme la plus adaptée pour calculer $K(\sqrt{2} - 3)$, puis fais le calcul.

5. *Choisir la forme adaptée à la question*

À retenir : Image de 0 : forme développée (terme constant). $A(x) = 0$: forme factorisée et produit nul, sans développer. Plus petite valeur : forme « carré + nombre » donnée, ex. $(x-1)^2 + 3 \geqslant 3$. Contrôle chaque forme en développant.

Ex. 29 ★☆☆ **La bonne forme pour calculer une image** — On donne $A(x) = (x-4)(2x+3) = 2x^2 - 5x - 12$ et $B(x) = (3x+1)^2 - 25 = 9x^2 + 6x - 24$. Calcule chaque image en choisissant la forme la plus rapide.

(a) $A(0)$ (b) $A(4)$ (c) $B(0)$

(d) $B(-2)$ (e) $B\left(\frac{1}{3}\right)$

Ex. 30 ★☆☆ **Résoudre avec la forme adaptée** — On donne $C(x) = (2x-7)(x+5) = 2x^2 + 3x - 35$ et $D(x) = (x-6)^2 - 16 = x^2 - 12x + 20$. Résous chaque équation en choisissant la forme adaptée.

(a) $C(x) = 0$ (b) $C(x) = -35$

(c) $C(x) = 2x^2 + 1$ (d) $D(x) = -16$

(e) $D(x) = x^2$

Ex. 31 ★★☆ **Trois formes, trois questions** — Soit $E(x) = 4x^2 + 8x - 5$. Inès affirme que $E(x) = (2x+2)^2 - 9$ et que $E(x) = (2x-1)(2x+5)$ pour tout réel x.

(a) Développe ces deux expressions pour vérifier qu'elles sont bien égales à $E(x)$.

(b) Quelle forme choisis-tu pour calculer $E(0)$? Justifie, puis calcule $E(0)$.

(c) Résous $E(x) = 0$.

(d) Montre que $E(x) \geqslant -9$ pour tout réel x. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?

(e) Quelle forme choisis-tu pour calculer $E\left(\sqrt{2} - 1\right)$? Justifie, puis calcule.

Ex. 32 ★★☆ **L'erreur de Hugo** — Soit $F(x) = (3x-2)^2 - (3x-2)(x+4)$. Hugo écrit : $F(x) = (3x-2)(3x-2-x+4) = (3x-2)(2x+2)$. Il en déduit que $F(x) = 0$ pour $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -1$.

(a) Trouve l'erreur de Hugo, puis factorise $F(x)$ le plus possible.

(b) Calcule $F(0)$ et $F(3)$ en choisissant à chaque fois la forme la plus adaptée.

(c) Résous $F(x) = 0$ sans développer. Hugo avait-il raison pour $x = -1$? Justifie.

(d) Développe et réduis $F(x)$, puis résous $F(x) = 6x^2 - 10$.

Ex. 33 ★★★ **Le carré découpé de Kenza** — Soit $x > 0$ (en cm). Kenza découpe un carré de côté $2x+3$. Dans un coin, elle retire un carré de côté $x+1$. On note $A(x)$ l'aire de la partie restante, en cm².

(a) Exprime $A(x)$ en fonction de x, puis développe et réduis $A(x)$.

(b) Factorise $A(x)$ en partant de l'expression trouvée avant de développer. Contrôle ton résultat en redéveloppant.

(c) Explique comment la forme factorisée prouve que $A(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

(d) Kenza veut que la partie restante ait une aire de 8 cm². Résous $A(x) = 8$ avec la forme adaptée, puis conclus. Est-ce possible ?

Ex. 34 ★★★ **Le bénéfice de l'atelier de Malik** — L'atelier de Malik fabrique x centaines d'objets, avec $0 \leqslant x \leqslant 12$. Le bénéfice, en milliers d'euros, vaut $B(x) = -2x^2 + 24x - 54$. Malik pense que $B(x) = -2(x-6)^2 + 18$ et que $B(x) = -2(x-3)(x-9)$.

(a) Développe les deux expressions de Malik. Montre qu'elles sont égales à $B(x)$ pour tout réel x.

(b) Calcule $B(0)$ et $B(10)$. Pour chaque calcul, justifie le choix de la forme. Interprète $B(0)$.

(c) Pour quelles productions le bénéfice est-il nul ? Justifie sans rien développer.

(d) Montre que $B(x) \leqslant 18$ pour tout x. Donne la production qui rapporte le bénéfice maximal.

(e) Malik vise un bénéfice de 10 000 €. Résous $B(x) = 10$ avec la forme adaptée, puis conclus.

Ex. 35 ★★★ **Une fraction à mettre sous la bonne forme** — On considère l'expression fractionnaire $Q(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2-1}$.

(a) Factorise le dénominateur, puis détermine les valeurs interdites de $Q(x)$.

(b) Vérifie que $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$, puis utilise cette forme pour factoriser le numérateur.

(c) Simplifie $Q(x)$ pour toute valeur autorisée de x.

(d) Rose calcule $Q(1)$ avec la forme simplifiée et trouve -2. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 35 (suite)

(e) Montre que $Q(x) = 1 - \frac{6}{x+1}$ pour toute valeur autorisée. Explique pourquoi $Q(x)$ ne vaut jamais 1.

6. *Expressions fractionnaires : valeurs interdites, simplifier, même dénominateur*

À retenir : Valeurs interdites d'abord, sur l'expression de départ : $x^2 - 81 = 0$ pour $x = 9$ ou $x = -9$. On ne simplifie que par un facteur commun. Somme : même dénominateur, et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{2}{a+b}$. Diviser = multiplier par l'inverse.

Ex. 36 ★☆☆ **Repérer les valeurs interdites** — Pour chaque expression, donne toutes les valeurs interdites, ou explique pourquoi il n'y en a pas.

(a) $\frac{5}{x-7}$ (b) $\frac{x+2}{3x+12}$

(c) $\frac{2x}{x^2-36}$ (d) $\frac{x-1}{x^2+1}$

(e) $\frac{4}{x(2x-5)}$ (f) $\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+3)}$

Ex. 37 ★☆☆ **Simplifier… seulement par un facteur** — Donne les valeurs interdites, puis simplifie l'expression si c'est possible. Sinon, explique pourquoi.

(a) $\frac{x^2-25}{x-5}$ (b) $\frac{x+4}{x+7}$

(c) $\frac{6x+18}{6}$ (d) $\frac{4x-2}{4x^2-1}$

(e) $\frac{x^2-10x+25}{3x-15}$

Ex. 38 ★★☆ **Tout sur le même dénominateur** — Pour chaque expression, donne les valeurs interdites. Écris-la ensuite sous la forme d'un seul quotient, avec un numérateur développé et réduit.

(a) $A(x) = 1 - \frac{5}{x}$

(b) $B(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{x+2}{x+4}$ (attention au signe « moins »)

(c) $C(x) = \frac{2x}{x-3} + \frac{x}{x+3}$

(d) $D(x) = x + 2 - \frac{x^2}{x-1}$

Ex. 39 ★★☆ **Quatre erreurs à corriger** — Chaque élève a fait une erreur de calcul. Explique-la, puis écris le calcul correct en rappelant les valeurs interdites.

(a) Inès écrit : $\frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{-2}{x+1}$. Montre avec $x = 1$ que c'est faux, puis corrige.

(b) Malo écrit : $\frac{3}{x} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4x} + \frac{x}{4x} = \frac{x+3}{4x}$. Où est l'erreur ? Corrige.

(c) Lina simplifie : $\frac{x+6}{x+2} = \frac{6}{2} = 3$. Montre avec $x = 1$ que c'est faux, puis explique pourquoi.

Ex. 39 (suite)

(d) Yanis écrit : $\frac{x+1}{x} \div \frac{2}{x} = \frac{2(x+1)}{x^2}$. Où est l'erreur ? Corrige.

Ex. 40 ★★★ **Une fraction qui cache une identité** — On considère l'expression $E(x) = \frac{x}{x-4} - \frac{12x-16}{x^2-16}$.

(a) Factorise $x^2 - 16$, puis donne toutes les valeurs interdites de $E(x)$.

(b) Écris $E(x)$ sous la forme d'un seul quotient, avec un numérateur développé et réduit.

(c) Reconnais une identité remarquable au numérateur, puis simplifie $E(x)$. Précise pour quels x ton résultat est valable.

(d) Lucas remplace x par 4 dans la forme simplifiée et annonce $E(4) = 0$. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Pour $x \neq 4$ et $x \neq -4$, écris $1 - E(x)$ sous la forme d'un seul quotient, le plus simple possible.

Ex. 41 ★★★ **Diviser par une fraction : une valeur interdite cachée** — On considère l'expression $Q(x) = \frac{x+3}{x^2+4} \div \frac{x^2-9}{2x^2+8}$.

(a) Explique pourquoi $x^2 + 4$ ne s'annule pour aucun réel x.

(b) Hugo affirme : « $Q(x)$ n'a aucune valeur interdite, car $x^2 + 4$ et $2x^2 + 8$ ne s'annulent jamais. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Écris $Q(x)$ sous la forme d'un produit de deux fractions. Factorise ensuite chaque morceau, puis simplifie le plus possible en précisant les conditions.

(d) Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$, simplifie le produit $Q(x) \times \frac{x^2-9}{4}$.

(e) Calcule $Q(5)$ de la façon la plus rapide.

Ex. 42 ★★★ **Aller-retour à vélo** — Mia va à vélo jusqu'à un lac situé à 12 km, puis revient par la même route. Elle roule à x km/h à l'aller et à $x + 6$ km/h au retour, avec $x > 0$. La durée totale, en heures, est $T(x) = \frac{12}{x} + \frac{12}{x+6}$.

(a) Montre que $T(x) = \dfrac{24x + 72}{x(x + 6)}$.

(b) Noé écrit : $T(x) = \frac{24}{2x+6}$. Avec $x = 6$, calcule la vraie durée et celle de Noé. Explique son erreur.

(c) La distance totale est 24 km, donc la vitesse moyenne est $v(x) = 24 \div T(x)$. Montre que $v(x) = \frac{x(x+6)}{x+3}$.

(d) Rayan dit : « La vitesse moyenne est la moyenne des deux vitesses, soit $x + 3$. » Calcule $v(x) - (x + 3)$, puis réponds-lui en justifiant.

(e) Calcule la vitesse moyenne de Mia si elle roule à 6 km/h à l'aller.

7. *Isoler une variable dans une formule*

À retenir : J'enlève d'abord ce qui est ajouté ou soustrait, puis je divise TOUT le membre par le facteur non nul : $2t + 5 = y$ donne $t = \frac{y-5}{2}$. Grandeur positive au carré : $r^2 = k$ (avec $k > 0$) donne $r = \sqrt{k}$.

Ex. 43 ★☆☆ **Isoler une variable (premier degré)** — Dans chaque formule, les grandeurs sont non nulles. Isole la grandeur demandée.

(a) $P = mg$ (poids d'un objet) : isole m.

(b) $C = 2\pi r$ (périmètre d'un cercle) : isole r.

(c) $P = 3n + 8$ (prix en euros de n entrées, adhésion comprise) : isole n.

(d) $\mathcal{A} = \frac{bh}{2}$ (aire d'un triangle) : isole h.

(e) $v = v_0 + at$ (vitesse d'un mobile) : isole t.

(f) $h = 30 - 4t$ (hauteur d'eau en cm) : isole t.

Ex. 44 ★☆☆ **Isoler une grandeur au carré** — Toutes les grandeurs sont strictement positives. Isole la grandeur demandée.

(a) $\mathcal{A} = c^2$ (aire d'un carré de côté c) : isole c.

(b) $S = 4\pi r^2$ (aire d'une sphère) : isole r.

(c) $P = \frac{U^2}{R}$ (puissance d'un radiateur) : isole U.

(d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (volume d'un cône) : isole r.

(e) $P = RI^2$ (puissance dissipée) : isole I.

(f) $c^2 = a^2 + b^2$ (triangle rectangle d'hypoténuse c) : isole a.

Ex. 45 ★★☆ **Ben corrige des copies** — Ben a relevé ces réponses d'élèves. Pour chacune, dis si elle est juste. Si elle est fausse, explique l'erreur et corrige-la.

(a) Inès : « $P = 2(L + \ell)$ donne $\frac{P}{2} = L + 2\ell$, donc $\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} - L\right)$. »

(b) Malo : « $v = \frac{d}{t}$ donne $t = \frac{v}{d}$. » Contrôle avec $d = 120$ km et $v = 60$ km/h.

(c) Lucie : « $G = 4n + 6$ donne $n = \frac{G}{4} - 6$. » Contrôle avec $G = 26$.

(d) Yanis : « Un disque d'aire $S = \pi r^2$ a pour rayon $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ ou $r = -\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. »

Ex. 46 ★★☆ **Degrés Celsius et Fahrenheit** — Aux États-Unis, la température F en degrés Fahrenheit (°F) s'obtient à partir de la température C en degrés Celsius (°C) par la formule $F = 1{,}8C + 32$.

(a) Calcule F pour $C = 25$ °C.

(b) Isole C dans la formule. Justifie que tu as le droit de diviser.

Ex. 46 **(suite)**

(c) Un thermomètre affiche 41 °F. Donne la température en °C, avec l'unité.

(d) Contrôle ton résultat précédent en le remplaçant dans la formule de départ.

Ex. 47 ★★★ **Résistances en parallèle** — On monte en parallèle deux résistances R_1 et R_2 (en ohms, Ω). Elles équivalent à une seule résistance R telle que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Toutes ces grandeurs sont strictement positives.

(a) Lucas affirme : « $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, donc $R = R_1 + R_2$. » Vrai ou faux ? Justifie avec $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$.

(b) Réduis $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ au même dénominateur, puis montre que $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

(c) Calcule R pour $R_1 = 30\ \Omega$ et $R_2 = 60\ \Omega$.

(d) On admet que $R < R_1$. Isole R_2 en fonction de R et de R_1. Justifie que tu peux passer à l'inverse.

(e) Ben veut obtenir $R = 12\ \Omega$ avec $R_1 = 20\ \Omega$. Calcule R_2, puis contrôle ton résultat en le remplaçant dans la formule.

Ex. 48 ★★★ **Énergie cinétique d'une voiture** — Un objet de masse m (en kg) qui roule à la vitesse v (en m/s) possède une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ (en joules, J). Toutes ces grandeurs sont strictement positives.

(a) Isole m en fonction de E_c et de v. Écris la condition qui te permet de diviser.

(b) Léa isole v et trouve $v = \sqrt{\frac{E_c}{2m}}$. Vrai ou faux ? Justifie avec $m = 2$ et $v = 3$, puis donne l'expression correcte de v.

(c) Une voiture de 1 200 kg a une énergie cinétique de 240 000 J. Calcule sa vitesse en m/s, puis en km/h.

(d) Vrai ou faux : « Si la vitesse double, l'énergie cinétique double aussi. » Justifie par un calcul littéral.

Ex. 49 ★★★ **Course autour d'une pelouse** — Une piste entoure une pelouse en forme de disque de rayon r (en m) et d'aire $\mathcal{A} = \pi r^2$. Une course comporte 150 m en ligne droite, puis n tours de piste. La distance totale vaut $D = 150 + 2\pi r n$ (en m). La vitesse vérifie $v = \frac{d}{t}$.

(a) La pelouse a une aire de $1\,600\pi$ m². Calcule r en justifiant qu'il n'y a qu'une seule valeur possible.

(b) Isole n dans $D = 150 + 2\pi r n$. Précise pourquoi tu as le droit de diviser.

(c) Pour une course de 5 000 m, donne une valeur approchée de n au centième. Combien de tours complets les coureurs font-ils ?

(d) Ben veut que les coureurs fassent exactement 20 tours. Calcule la distance totale D, arrondie au mètre.

(e) Hugo court ces 5 000 m à 5 m/s. Isole t dans $v = \frac{d}{t}$, puis donne la durée de sa course en minutes et secondes.