1. Rappels de 3e : distributivité, double distributivité, réduire

Ex. 1 ★☆☆ **Réduire une expression**

(a) $x + x = 2x$
(on additionne deux fois x : ce n'est pas x^2).

(b) $x \times x = x^2$
(on multiplie x par lui-même : ce n'est pas $2x$).

(c) $3x^2 + 2x$ ne se réduit pas : x^2 et x ne sont pas des termes semblables.

(d) $-4x - 6x + 9 - 11 = -10x - 2$.

(e) $2x^2 - 7x^2 - 5x + 3x = -5x^2 - 2x$.

(f) $-3x \times 4x = (-3 \times 4) \times x \times x = -12x^2$.

Ex. 2 ★☆☆ **Distributivité simple et signe « moins »**

(a) $3(x + 5) = 3 \times x + 3 \times 5 = 3x + 15$
(le 3 multiplie aussi le 5).

(b) $-(2x - 9) = -2x + 9$: tous les signes changent.

(c) $7 - (3x - 2) = 7 - 3x + 2 = -3x + 9$.

(d) $x(x - 8) = x \times x - 8 \times x = x^2 - 8x$.

(e) $-2x(5x - 3) = -2x \times 5x - 2x \times (-3) = -10x^2 + 6x$.

(f) $4(2x - 1) - 5(x - 3) = 8x - 4 - 5x + 15 = 3x + 11$.

Ex. 3 ★☆☆ **Double distributivité**

(a) $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 + 6x + 8$.

(b) $(x + 6)(x - 3) = x^2 - 3x + 6x - 18 = x^2 + 3x - 18$
(car $6 \times (-3) = -18$).

(c) $(3x - 1)(x - 4) = 3x^2 - 12x - x + 4 = 3x^2 - 13x + 4$
(car $(-1) \times (-4) = 4$).

(d) $(2x + 5)(4 - x) = 8x - 2x^2 + 20 - 5x = -2x^2 + 3x + 20$.

(e) $-(x - 2)(x + 7) = -(x^2 + 7x - 2x - 14) = -(x^2 + 5x - 14) = -x^2 - 5x + 14$.

(f) $2(x + 1)(3x - 2) = 2(3x^2 - 2x + 3x - 2) = 2(3x^2 + x - 2) = 6x^2 + 2x - 4$.

(g) $(x + 5)(x - 1) - (x - 3)(x + 2) = (x^2 - x + 5x - 5) - (x^2 + 2x - 3x - 6) = x^2 + 4x - 5 - x^2 + x + 6 = 5x + 1$.

Ex. 4 ★★☆ **Programme de calcul et erreurs à repérer**

(a) $(-2 + 3) \times (-2 - 5) + 2 \times (-2) = 1 \times (-7) - 4 = -11$. Le programme donne -11.

(b) $P(x) = (x + 3)(x - 5) + 2x$.

(c) Lina s'est trompée de signe sur le produit $3 \times (-5)$: il vaut -15, pas $+15$. Le bon développement est $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$.

(d) $P(x) = x^2 - 2x - 15 + 2x = x^2 - 15$.

(e) Non. Tom a calculé $-2^2 - 15 = -4 - 15 = -19$. Il faut remplacer x par -2 entre parenthèses : $(-2)^2 - 15 = 4 - 15 = -11$, ce qui confirme le résultat de la première question.

Ex. 5 ★★★ **Un rectangle qu'on agrandit**

(a) Pour $x = 5$, les côtés valent 12 et 2, donc $A(5) = 12 \times 2 = 24$. Avec la formule de Sacha : $5^2 - 21 = 25 - 21 = 4$. Comme $24 \neq 4$, Sacha a tort. Il n'a multiplié que les premiers termes entre eux et les derniers entre eux : il a oublié les deux produits du milieu.

(b) $A(x) = (x + 7)(x - 3) = x \times x + x \times (-3) + 7 \times x + 7 \times (-3) = x^2 - 3x + 7x - 21 = x^2 + 4x - 21$.

(c) Les nouveaux côtés sont $x + 8$ et $x - 2$.
Donc $B(x) = (x + 8)(x - 2) = x^2 - 2x + 8x - 16 = x^2 + 6x - 16$.

(d) $B(x) - A(x) = (x^2 + 6x - 16) - (x^2 + 4x - 21) = x^2 + 6x - 16 - x^2 - 4x + 21 = 2x + 5$. Le signe « moins » change tous les signes de $A(x)$, donc -21 devient $+21$. L'aire augmente donc de $2x + 5$ cm², quel que soit $x > 3$.

Ex. 6 ★★★ **Un programme au résultat constant**

(a) $-3 - 4 = -7$; $-3 + 2 = -1$; $(-7) \times (-1) = 7$; $(-3)^2 = 9$, donc $7 - 9 = -2$; $2 \times (-3) = -6$, donc $-2 + (-6) = -8$. Le programme donne -8. Attention : le carré de -3 est $(-3)^2 = 9$, pas -9.

(b) Le résultat est $(x - 4)(x + 2) - x^2 + 2x$. On développe : $(x - 4)(x + 2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$.
Donc le résultat est $x^2 - 2x - 8 - x^2 + 2x = -8$. Quel que soit le nombre choisi, le programme donne -8 : le résultat ne dépend pas du nombre choisi.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Avant la dernière étape, on a $x^2 - 2x - 8 - x^2 = -2x - 8$. Mila doit calculer $-2x - 8 - (x - 4)$. Le signe « moins » devant la parenthèse change TOUS les signes : $-(x - 4) = -x + 4$. Elle a écrit $-x - 4$: c'est son erreur. Le bon résultat est $-2x - 8 - x + 4 = -3x - 4$.

(d) On cherche x tel que $-3x - 4 = 11$. Alors $-3x = 15$, donc $x = \frac{15}{-3} = -5$. Vérification : $-3 \times (-5) - 4 = 15 - 4 = 11$. Il faut choisir -5.

Ex. 7 ★★★ **Vrai ou faux : quatre affirmations**

(a) Vrai. $(x - 2)(3x + 1) = 3x^2 + x - 6x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$, car $(-2) \times 3x = -6x$ et $(-2) \times 1 = -2$. L'égalité est vraie pour tout réel x.

(b) Faux. $2 \times (-4)^2 - (-4) = 2 \times 16 + 4 = 36$. L'expression vaut 36 et non -28. Le résultat -28 vient de l'erreur $-4^2 = -16$: il faut écrire $(-4)^2 = 16$.

(c) Vrai. $2x(x - 3) = 2x^2 - 6x$ et $(x - 1)(x - 5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5$.
Donc $2x(x - 3) - (x - 1)(x - 5) = 2x^2 - 6x - (x^2 - 6x + 5) = 2x^2 - 6x - x^2 + 6x - 5 = x^2 - 5$. L'égalité est vraie pour tout réel x.

(d) Faux. On a $(x - 4)(x + 1) = x^2 + x - 4x - 4 = x^2 - 3x - 4$, donc $4x - (x^2 - 3x - 4) = 4x - x^2 + 3x + 4 = -x^2 + 7x + 4$. Contre-exemple avec $x = 0$: $4 \times 0 - (0 - 4)(0 + 1) = 4$, mais $-0^2 + 7 \times 0 - 4 = -4$.
L'erreur vient du signe de -4, qui doit changer lui aussi.

2. *Développer et réduire une expression*

Ex. 8 ★☆☆ **Distributivité et coefficients variés**

(a) Simple distributivité : $-2x \times 3x^2 - 2x \times (-5x) - 2x \times 4 = -6x^3 + 10x^2 - 8x$.

(b) Double distributivité : $2x^2 + 10x - 7x - 35 = 2x^2 + 3x - 35$.

(c) $12x - 3 - 4x^2 + x = -4x^2 + 13x - 3$
(on regroupe $12x$ et x, puis on ordonne).

(d) $5x - 2x^2 + 3x^2 - 7x = x^2 - 2x$.

(e) $3x - 2 - 1{,}5x = 1{,}5x - 2$.

(f) $\frac{1}{3} \times 9x^2 - \frac{1}{3} \times 6x + 2x = 3x^2 - 2x + 2x = 3x^2$.

Ex. 9 ★☆☆ **Un « moins » devant une parenthèse**

(a) $9 - 4x + 6 = -4x + 15$. Contrôle : $9 - (4 - 6) = 11$ et $-4 + 15 = 11$.

(b) $-x^2 + 3x - 5 + 2x^2 = x^2 + 3x - 5$. Contrôle : $-3 + 2 = -1$ et $1 + 3 - 5 = -1$.

(c) $(x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8$, donc $3x - (x^2 - 2x - 8) = -x^2 + 5x + 8$. Contrôle : $3 - 3 \times (-3) = 12$ et $-1 + 5 + 8 = 12$.

(d) $(2x + 3)(x - 2) = 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6$, donc $4 - (2x^2 - x - 6) = -2x^2 + x + 10$. Contrôle : $4 - 5 \times (-1) = 9$ et $-2 + 1 + 10 = 9$.

(e) $(x - 3)(2x + 1) = 2x^2 - 5x - 3$ et $(x + 4)(x - 2) = x^2 + 2x - 8$, donc $2x^2 - 5x - 3 - (x^2 + 2x - 8) = x^2 - 7x + 5$. Contrôle : $-6 - (-5) = -1$ et $1 - 7 + 5 = -1$.

Ex. 10 ★★☆ **Le volume d'un pavé droit**

(a) $(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$.

(b) On multiplie les facteurs deux à deux : $V(x) = 2x(x^2 - x - 12) = 2x^3 - 2x^2 - 24x$.

(c) Forme de départ : $V(5) = 10 \times 8 \times 1 = 80$. Forme développée : $2 \times 125 - 2 \times 25 - 24 \times 5 = 250 - 50 - 120 = 80$. Les deux formes donnent le même résultat : aucune erreur n'est détectée.

(d) Faux. Contre-exemple : $V(10) = 20 \times 13 \times 6 = 1560$ alors que $8 \times V(5) = 8 \times 80 = 640$. Il suffit d'une valeur pour laquelle ça ne marche pas : l'affirmation de Léna est fausse.

Ex. 11 ★★☆ **Démontrer, réfuter, corriger**

(a) On part du membre de gauche : $(2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3$ et $x(x - 5) = x^2 - 5x$.
Donc $2x^2 - 5x - 3 - (x^2 - 5x) = 2x^2 - 5x - 3 - x^2 + 5x = x^2 - 3$. On obtient le membre de droite : l'égalité est vraie pour tout réel x.

(b) Non. Une seule valeur ne prouve rien. En $x = 1$: $(1 + 2)(3 - 1) = 6$, mais $3 \times 1^2 - 2 = 1$. C'est un contre-exemple : les deux expressions ne sont pas égales pour tout réel x. En effet, $(x + 2)(3x - 1) = 3x^2 + 5x - 2$.

(c) Inès n'a pas gardé la parenthèse : le « moins » doit changer le signe de tous les termes du produit développé. Correction : $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2 + x - 10$, donc $4x - (3x^2 + x - 10) = 4x - 3x^2 - x + 10 = -3x^2 + 3x + 10$.

Ex. 11 **(suite)**

(d) On part du membre de gauche : $\frac{1}{2} \times 4x - \frac{1}{2} \times 6 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \times 4 = 2x - 3 - \frac{3}{4}x + 3 = \frac{8}{4}x - \frac{3}{4}x = \frac{5}{4}x$. L'égalité est vraie pour tout réel x.

Ex. 12 ★★★ **Un programme de calcul surprenant**

(a) Avec 0 : $(0+3) \times (0-5) - (0-1)^2 = -15 - 1 = -16$. Avec 4 : $(4+3) \times (4-5) - (4-1)^2 = -7 - 9 = -16$. Dans les deux cas, on obtient -16.

(b) Non. Deux exemples ne prouvent pas que le résultat vaut -16 pour tous les nombres : il en existe une infinité. Pour le prouver, il faut faire un calcul littéral valable pour tout réel x.

(c) Le résultat s'écrit $(x+3)(x-5) - (x-1)^2$. On a $(x+3)(x-5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$ et, avec l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. On garde la parenthèse après le « moins » : $x^2 - 2x - 15 - (x^2 - 2x + 1) = x^2 - 2x - 15 - x^2 + 2x - 1 = -16$. Pour tout réel x, le programme donne donc -16 : le résultat ne dépend pas du nombre choisi.

(d) Le résultat devient $(x+4)(x-5) - (x-1)^2 = x^2 - x - 20 - (x^2 - 2x + 1) = x^2 - x - 20 - x^2 + 2x - 1 = x - 21$. Contre-exemple : avec 0, on obtient -21, et avec 1, on obtient -20. Le résultat n'est donc plus le même pour tous les nombres.

Ex. 13 ★★★ **Une plaque découpée**

(a) $A(x) = (2x+3)(x+5) - (2x-1)(x+3)$. On retranche toute l'aire découpée : le « moins » porte sur le produit entier. Il faut donc d'abord développer ce produit entre parenthèses, puis changer le signe de tous ses termes.

(b) Avec l'expression de départ : $A(1) = 5 \times 6 - 1 \times 4 = 30 - 4 = 26$. Avec celle de Mehdi : $18 \times 1 + 12 = 30$. Comme $26 \neq 30$, ce contre-exemple montre que Mehdi s'est trompé.

(c) $(2x+3)(x+5) = 2x^2 + 10x + 3x + 15 = 2x^2 + 13x + 15$ et $(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$.
Donc $A(x) = 2x^2 + 13x + 15 - (2x^2 + 5x - 3) = 2x^2 + 13x + 15 - 2x^2 - 5x + 3 = 8x + 18$. Contrôle en $x = 1$: $8 + 18 = 26$, ce qui est cohérent.

(d) $A(2{,}5) = 8 \times 2{,}5 + 18 = 20 + 18 = 38$. L'aire restante vaut 38 cm².

Ex. 14 ★★★ **Deux jardins à comparer**

(a) On regroupe d'abord $\frac{1}{2}$ et $4x - 2$: $\frac{1}{2}(4x-2) = 2x - 1$. Ensuite, $T(x) = (3x+1)(2x-1) = 6x^2 - 3x + 2x - 1 = 6x^2 - x - 1$. Contrôle en $x = 0$: $\frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1$ et $6 \times 0^2 - 0 - 1 = -1$, ce qui est cohérent.

(b) $R(x) = 1{,}5x(4x-1) = 1{,}5x \times 4x - 1{,}5x \times 1 = 6x^2 - 1{,}5x$.

(c) Faux. Contre-exemple avec $x = 3$: $T(3) = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$ et $R(3) = 4{,}5 \times 11 = 49{,}5$. Comme $50 \neq 49{,}5$, les deux aires ne sont pas égales pour tout $x > 1$.

(d) $T(x) - R(x) = 6x^2 - x - 1 - (6x^2 - 1{,}5x) = 6x^2 - x - 1 - 6x^2 + 1{,}5x = 0{,}5x - 1$. Les aires sont égales quand $0{,}5x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 2$, qui vérifie bien $x > 1$. Vérification : $T(2) = \frac{1}{2} \times 7 \times 6 = 21$ et $R(2) = 3 \times 7 = 21$. Les deux jardins ont la même aire, 21 m², pour $x = 2$.

3. *Identités remarquables dans le sens du développement*

Ex. 15 ★☆☆ **Développer avec une identité remarquable**

(a) $(a+b)^2$ avec $a = x$, $b = 6$: $x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$.

(b) $(a+b)^2$ avec $a = 3x$, $b = 4$: $(3x)^2 = 9x^2$,
$2 \times 3x \times 4 = 24x$, $4^2 = 16$.
Donc $9x^2 + 24x + 16$.

(c) $(a-b)^2$ avec $a = x$, $b = 9$: $x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = x^2 - 18x + 81$
(le dernier terme est $+81$).

(d) $(a-b)^2$ avec $a = 5x$, $b = 2$: $(5x)^2 = 25x^2$,
$2 \times 5x \times 2 = 20x$, $2^2 = 4$.
Donc $25x^2 - 20x + 4$.

(e) $(a-b)(a+b)$ avec $a = 2x$, $b = 1$: $(2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$
.

(f) $(-x+4)^2 = (4-x)^2$: $(a-b)^2$ avec $a = 4$, $b = x$:
$16 - 8x + x^2$, soit $x^2 - 8x + 16$.

(g) $(a+b)(a-b)$ avec $a = 6$, $b = x$: $6^2 - x^2 = -x^2 + 36$.

Ex. 16 ★☆☆ **Calcul mental avec une identité**

(a) $101^2 = (100+1)^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$.

(b) $49 \times 51 = (50-1)(50+1) = 2\,500 - 1 = 2\,499$.

(c) $98^2 = (100-2)^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604$.

(d) $203 \times 197 = (200+3)(200-3) = 40\,000 - 9 = 39\,991$.

Ex. 16 **(suite)**

(e) $61^2 = (60+1)^2 = 3\,600 + 120 + 1 = 3\,721$.

Ex. 17 ★★☆ **Les erreurs de Léo**

(a) Pour $x = 1$: $(1+5)^2 = 36$ mais $1^2 + 25 = 26$. L'égalité est donc fausse : Léo a oublié le double produit. En fait, $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$.

(b) Ici $a = 3x$ et $b = 2$. Léo a écrit $3x^2$ au lieu de $(3x)^2 = 9x^2$. Le bon résultat est $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

(c) On utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 1$. Le bon résultat est $16x^2 - 1$: le signe du dernier terme est « moins ».

(d) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Le « moins » placé devant change le signe des trois termes : $-(x-3)^2 = -x^2 + 6x - 9$. Léo n'a changé que le signe du premier.

Ex. 18 ★★☆ **Une plaque découpée**

(a) $(a+b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$: $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$. L'aire de la plaque est donc $4x^2 + 12x + 9$ cm².

(b) $(a+b)(a-b)$ avec $a = x$ et $b = 1$: $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$. L'aire du rectangle est donc $x^2 - 1$ cm².

(c) $A(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 - 1) = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 1 = 3x^2 + 12x + 10$. On a bien $A(x) = 3x^2 + 12x + 10$.

(d) Avec la formule : $A(2) = 3 \times 2^2 + 12 \times 2 + 10 = 12 + 24 + 10 = 46$. Avec les dimensions : $7^2 - 3 \times 1 = 49 - 3 = 46$. L'aire restante est de 46 cm².

Ex. 19 ★★★ **Le programme d'Inès**

(a) $(2+7)^2 = 9^2 = 81$ et $(2-7)^2 = (-5)^2 = 25$. $81 - 25 = 56$, puis $56 \div 2 = 28$. Le programme donne 28.

(b) Avec $a = x$ et $b = 7$: $(x+7)^2 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$. Avec l'identité $(a-b)^2$: $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$ (on a bien $+49$, car $(-7)^2 = 49$).

(c) $(x+7)^2 - (x-7)^2 = x^2 + 14x + 49 - (x^2 - 14x + 49)$. Le « moins » devant la parenthèse change tous les signes : $= x^2 + 14x + 49 - x^2 + 14x - 49 = 28x$. On divise ensuite par $x \neq 0$: $\frac{28x}{x} = 28$. Le résultat vaut toujours 28, quel que soit le nombre choisi.

(d) Il a tort. Pour $x = 1$: $(1+7)^2 = 64$ alors que $1^2 + 49 = 50$. Nathan a oublié le double produit $2ab$ et s'est trompé de signe : $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ et $(x-7)^2$ se termine par $+49$. Pour $x = 1$, le programme donne $64 - 36 = 28$, et non 98.

Ex. 19 **(suite)**

(e) Avec $x = 100$: $107^2 - 93^2 = (100+7)^2 - (100-7)^2 = 28 \times 100 = 2\,800$.

Ex. 20 ★★★ **Vrai ou faux pour tout réel x**

(a) Vrai. Avec $a = -4x$ et $b = 3$: $(-4x+3)^2 = (-4x)^2 + 2 \times (-4x) \times 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$. Avec $a = 4x$ et $b = 3$: $(4x-3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$. Les deux expressions sont égales pour tout réel x.

(b) Faux. Pour $x = 1$: $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ alors que $1^2 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Avec $a = x$ et $b = \frac{1}{2}$: $2ab = 2 \times x \times \frac{1}{2} = x$. Donc $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

(c) Vrai. Avec l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, où $a = 5x$ et $b = 1$: $(5x+1)(5x-1) = 25x^2 - 1$, et non $25x^2 + 1$. Donc $(5x+1)(5x-1) - 25x^2 = -1$ pour tout réel x.

(d) Faux. Pour $x = 1$: $-(1-6)^2 = -25$ alors que $-1^2 - 12 \times 1 - 36 = -49$. On développe d'abord, puis on change les signes : $-(x-6)^2 = -(x^2 - 12x + 36) = -x^2 + 12x - 36$.

(e) Vrai. Avec $a = 2x$ et $b = 5$: $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$ et $(2x-5)(2x+5) = 4x^2 - 25$. Donc $(2x-5)^2 - (2x-5)(2x+5) = 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 + 25 = 50 - 20x$ pour tout réel x.

Ex. 21 ★★★ **Deux carrés et un rectangle**

(a) L'aire de C vaut $(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$. Mathis n'a élevé au carré que x : il faut aussi élever 3 au carré.

(b) Avec l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, où $a = 3x$ et $b = 1$: $(3x-1)(3x+1) = 9x^2 - 1$. Donc l'aire de C moins l'aire de R vaut $9x^2 - (9x^2 - 1) = 1$. L'aire de R est toujours inférieure de 1 cm² à celle de C.

(c) Avec $x = 20$, donc $3x = 60$: $59 \times 61 = 60^2 - 1 = 3\,600 - 1 = 3\,599$. De même, avec $x = 30$, donc $3x = 90$: $89 \times 91 = 90^2 - 1 = 8\,100 - 1 = 8\,099$.

(d) Avec $a = 3x$ et $b = 5$: $a^2 = 9x^2$, $2ab = 2 \times 3x \times 5 = 30x$, $b^2 = 25$. Donc l'aire de K vaut $(3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$.

(e) $9x^2 - (9x^2 - 30x + 25) = 9x^2 - 9x^2 + 30x - 25 = 30x - 25$. Pour $x = 3$: l'aire de C vaut $9^2 = 81$, celle de K vaut $4^2 = 16$, et $81 - 16 = 65 = 30 \times 3 - 25$. L'égalité est bien vérifiée.

4. Factoriser : facteur commun et identités remarquables

Ex. 22 ★☆☆ **Mettre en facteur**

(a) Facteur commun $4x$: $A = 4x \times 3x - 4x \times 2 = 4x(3x-2)$.

(b) Facteur commun $(x-3)$: $B = (x-3)\big[(2x+5)+(4x-1)\big] = (x-3)(6x+4)$. Comme $6x+4 = 2(3x+2)$: $B = 2(x-3)(3x+2)$.

(c) Facteur commun $(x+4)$: $C = (x+4)\big[(x+4)-(3x-2)\big] = (x+4)(x+4-3x+2) = (x+4)(-2x+6)$. Comme $-2x+6 = 2(3-x)$: $C = 2(x+4)(3-x)$.

(d) On a $5-x = -(x-5)$, donc $D = (x-5)(2x+3) - (x-5)(x-6) = (x-5)\big[(2x+3)-(x-6)\big] = (x-5)(x+9)$.

(e) On fait apparaître le facteur commun : $6x+3 = 3(2x+1)$.
Donc $E = (2x+1)\big[(2x+1)+3\big] = (2x+1)(2x+4) = 2(2x+1)(x+2)$.

(f) On écrit $(x+2) = (x+2)\times 1$: $F = (x+2)\big[(3x-1)-1\big] = (x+2)(3x-2)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Reconnaître une identité remarquable**

(a) $25x^2 = (5x)^2$, $4 = 2^2$ et le double produit vaut $2 \times 5x \times 2 = 20x$: avec $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, $H = (5x-2)^2$.

(b) $9x^2 = (3x)^2$, $25 = 5^2$ et $2 \times 3x \times 5 = 30x$: avec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $K = (3x+5)^2$.

(c) $L = (4x)^2 - 7^2$: avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $L = (4x-7)(4x+7)$.

(d) $7 = (\sqrt{7})^2$, donc $M = x^2 - (\sqrt{7})^2 = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$.

(e) a^2-b^2 avec $a = 3x-1$ et $b = 4$: $P = \big[(3x-1)-4\big]\big[(3x-1)+4\big] = (3x-5)(3x+3)$. Comme $3x+3 = 3(x+1)$: $P = 3(3x-5)(x+1)$.

(f) a^2-b^2 avec $a = 2x+3$ et $b = x-4$: $R = \big[(2x+3)-(x-4)\big]\big[(2x+3)+(x-4)\big] = (x+7)(3x-1)$.

(g) Facteur commun d'abord : $T = 2(x^2+6x+9)$. Puis $x^2+6x+9 = (x+3)^2$ (double produit $2 \times x \times 3 = 6x$).
Donc $T = 2(x+3)^2$.

Ex. 24 ★★☆ **Factorisations à contrôler**

(a) Faux. $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$. Contre-exemple : pour $x = 0$, $x^2+25 = 25$ alors que $(0+5)(0-5) = -25$. Une somme de deux carrés comme x^2+25 ne se factorise pas.

(b) Faux. $(4x-3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$: le double produit vaut $2 \times 4x \times 3 = 24x$, pas $12x$.
Donc $16x^2 - 12x + 9$ n'est pas un carré.

(c) Faux. L'égalité est juste ($(3x-12)(x+4) = 3x^2 - 48$), mais on peut encore factoriser : $3x - 12 = 3(x-4)$.
Facteur commun d'abord : $3x^2 - 48 = 3(x^2-16) = 3(x-4)(x+4)$.

(d) Vrai. Facteur commun $(x+6)$: $(x+6)\big[(x+6)-2\big] = (x+6)(x+4)$. Contrôle : les deux membres valent $x^2+10x+24$.

Ex. 25 ★★☆ **L'aire d'un cadre**

(a) $A(x) = 4x^2 + 20x + 25 - (x^2+2x+1) = 4x^2 + 20x + 25 - x^2 - 2x - 1 = 3x^2 + 18x + 24$.

(b) a^2-b^2 avec $a = 2x+5$ et $b = x+1$: $A(x) = \big[(2x+5)-(x+1)\big]\big[(2x+5)+(x+1)\big] = (x+4)(3x+6)$. Comme $3x+6 = 3(x+2)$: $A(x) = 3(x+4)(x+2)$.

(c) $3(x+4)(x+2) = 3(x^2+2x+4x+8) = 3(x^2+6x+8) = 3x^2+18x+24$: on retrouve la forme développée, la factorisation est juste.

(d) Avec la forme factorisée : $A(1{,}5) = 3 \times (1{,}5+4) \times (1{,}5+2) = 3 \times 5{,}5 \times 3{,}5 = 57{,}75$. L'aire restante vaut 57,75 unités d'aire.

Ex. 26 ★★★ **Des facteurs communs bien cachés**

(a) $3-x = -(x-3)$, donc $(3-x)^2 = (-1)^2(x-3)^2 = (x-3)^2$: un carré ne change pas quand on change le signe.
Donc $E = (x-3)(4x+1) - (x-3)^2 = (x-3)\big[(4x+1)-(x-3)\big] = (x-3)(4x+1-x+3) = (x-3)(3x+4)$.

(b) $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x-1)(2x+1)$.
Donc $F = (2x+1)(x-3) - (2x+1)(2x-1) = (2x+1)\big[(x-3)-(2x-1)\big] = (2x+1)(x-3-2x+1) = (2x+1)(-x-2)$. Comme $-x-2 = -(x+2)$: $F = -(2x+1)(x+2)$.

(c) Facteur commun d'abord : $3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$.
Donc $G = 3(x-2)(x+2) + (x-2)^2 = (x-2)\big[3(x+2)+(x-2)\big] = (x-2)(4x+4)$. Comme $4x+4 = 4(x+1)$: $G = 4(x-2)(x+1)$.

Ex. 26 (suite)

(d) Forme de départ : $(x-3)(4x+1) = 4x^2 - 11x - 3$ et $(3-x)^2 = x^2 - 6x + 9$, donc $E = 4x^2 - 11x - 3 - x^2 + 6x - 9 = 3x^2 - 5x - 12$. Forme factorisée : $(x-3)(3x+4) = 3x^2 + 4x - 9x - 12 = 3x^2 - 5x - 12$. Les deux développements sont identiques : la factorisation est juste.

Ex. 27 ★★★ Factoriser… quand c'est possible

(a) Facteur commun d'abord : $P(x) = 5(x^2 - 2)$. Comme $2 = (\sqrt{2})^2$, l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ donne $P(x) = 5(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul (et $5 \neq 0$). Donc $P(x) = 0$ pour $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

(b) $x^4 = (x^2)^2$ et $81 = 9^2$, donc $Q(x) = (x^2)^2 - 9^2$. Avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: $Q(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 9)$.

(c) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$, donc $Q(x) = (x-3)(x+3)(x^2+9)$. Un carré est positif ou nul, donc $x^2 + 9 \geqslant 9 > 0$: $x^2 + 9$ ne s'annule jamais. S'il s'écrivait $(x-k) \times (\dots)$, il vaudrait 0 pour $x = k$, ce qui est impossible. Une somme de deux carrés comme $x^2 + 9$ ne se factorise pas : on ne peut pas aller plus loin.

(d) D'après la question précédente, $Q(x) = (x-3)(x+3)(x^2+9)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x - 3 = 0$, ou $x + 3 = 0$, ou $x^2 + 9 = 0$. Le dernier cas est impossible, car $x^2 + 9 > 0$.
Donc $Q(x) = 0$ pour $x = 3$ ou $x = -3$.

(e) $(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$. Il faut $b^2 = 49$, donc $b = 7$ ou $b = -7$, et $c = 2b$ (double produit). Pour $b = 7$: $c = 14$ et $x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$. Pour $b = -7$: $c = -14$ et $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$. Les nombres cherchés sont 14 et -14.

Ex. 28 ★★★ Une parenthèse entière

(a) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, donc $K(x) = 49 - x^2 - 6x - 9 = -x^2 - 6x + 40$.

(b) $49 = 7^2$ et $b = x + 3$ est une parenthèse entière : $K(x) = \big(7 - (x+3)\big)\big(7 + (x+3)\big) = (7 - x - 3)(7 + x + 3) = (4 - x)(x + 10)$. Contrôle : $(4-x)(x+10) = 4x + 40 - x^2 - 10x = -x^2 - 6x + 40$.

(c) Avec la forme factorisée, $(4-x)(x+10) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $4 - x = 0$ ou $x + 10 = 0$. Les solutions sont $x = 4$ et $x = -10$.

(d) Un carré est positif ou nul : $(x+3)^2 \geqslant 0$, donc $K(x) = 49 - (x+3)^2 \leqslant 49$. On a l'égalité quand $(x+3)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = -3$: $K(-3) = 49$.

Ex. 28 (suite)

(e) On prend la forme de départ : $x + 3 = \sqrt{2}$, donc $K(\sqrt{2} - 3) = 49 - (\sqrt{2})^2 = 49 - 2 = 47$.

5. *Choisir la forme adaptée à la question*

Ex. 29 ★☆☆ La bonne forme pour calculer une image

(a) Forme développée : $A(0)$ est le terme constant, donc $A(0) = -12$.

(b) Forme factorisée : $A(4) = (4-4)(2 \times 4 + 3) = 0 \times 11 = 0$.

(c) Forme développée : $B(0)$ est le terme constant, donc $B(0) = -24$.

(d) Forme « carré + nombre » : $B(-2) = (3 \times (-2) + 1)^2 - 25 = (-5)^2 - 25 = 25 - 25 = 0$.

(e) Forme « carré + nombre » : $B\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3 \times \frac{1}{3} + 1\right)^2 - 25 = 2^2 - 25 = 4 - 25 = -21$.

Ex. 30 ★☆☆ Résoudre avec la forme adaptée

(a) Forme factorisée, sans développer : $(2x-7)(x+5) = 0 \iff 2x - 7 = 0$ ou $x + 5 = 0$. Les solutions sont $x = \frac{7}{2}$ et $x = -5$.

(b) Forme développée : $2x^2 + 3x - 35 = -35 \iff 2x^2 + 3x = 0 \iff x(2x+3) = 0$. Les solutions sont $x = 0$ et $x = -\frac{3}{2}$.

(c) Forme développée : $2x^2 + 3x - 35 = 2x^2 + 1 \iff 3x - 35 = 1$ (les x^2 s'éliminent) $\iff 3x = 36$. La solution est $x = 12$.

(d) Forme « carré + nombre » : $(x-6)^2 - 16 = -16 \iff (x-6)^2 = 0 \iff x - 6 = 0$. La solution est $x = 6$.

(e) Forme développée : $x^2 - 12x + 20 = x^2 \iff -12x + 20 = 0 \iff x = \frac{20}{12}$. La solution est $x = \frac{5}{3}$.

Ex. 31 ★★☆ Trois formes, trois questions

(a) $(2x+2)^2 - 9 = 4x^2 + 8x + 4 - 9 = 4x^2 + 8x - 5$ (identité $(a+b)^2$). $(2x-1)(2x+5) = 4x^2 + 10x - 2x - 5 = 4x^2 + 8x - 5$. Les trois formes sont bien égales.

(b) Je choisis la forme développée : l'image de 0 est le terme constant.
Donc $E(0) = -5$.

(c) Forme factorisée : $(2x-1)(2x+5) = 0 \iff 2x - 1 = 0$ ou $2x + 5 = 0$. Les solutions sont $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{5}{2}$.

Ex. 31 (suite)

(d) Un carré est positif ou nul : $(2x+2)^2 \geqslant 0$, donc $(2x+2)^2 - 9 \geqslant -9$, c'est-à-dire $E(x) \geqslant -9$. Il y a égalité quand $2x+2=0$, donc pour $x=-1$.

(e) Je choisis la forme « carré + nombre » : x n'y apparaît qu'une fois et $2x+2$ se simplifie. $E\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(2\sqrt{2}-2+2\right)^2 - 9 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 9 = 4\times 2 - 9 = -1$.

Ex. 32 ★★☆ **L'erreur de Hugo**

(a) Le « moins » porte sur tout le second facteur : $(3x-2)-(x+4) = 3x-2-x-4 = 2x-6$.
Donc $F(x) = (3x-2)(2x-6) = 2(3x-2)(x-3)$.

(b) La forme factorisée est la plus rapide pour les deux calculs. $F(0) = 2\times(3\times 0-2)\times(0-3) = 2\times(-2)\times(-3) = 12$. $F(3) = 2\times 7\times 0 = 0$, car le facteur $x-3$ s'annule.

(c) $2(3x-2)(x-3)=0 \iff 3x-2=0$ ou $x-3=0$: les solutions sont $x=\frac{2}{3}$ et $x=3$. Hugo a tort pour -1 : $F(-1) = (-5)^2 - (-5)\times 3 = 25+15 = 40 \neq 0$.

(d) $F(x) = 9x^2 - 12x + 4 - (3x^2+10x-8) = 6x^2 - 22x + 12$. Alors $6x^2-22x+12 = 6x^2-10 \iff -22x = -22$ (les x^2 s'éliminent). La solution est $x=1$.

Ex. 33 ★★★ **Le carré découpé de Kenza**

(a) $A(x) = (2x+3)^2 - (x+1)^2$. On utilise $(a+b)^2$: $A(x) = 4x^2+12x+9-(x^2+2x+1)$. Le « moins » porte sur toute la parenthèse : $A(x) = 4x^2+12x+9-x^2-2x-1 = 3x^2+10x+8$.

(b) $A(x)$ est de la forme a^2-b^2 avec $a=2x+3$ et $b=x+1$: on garde les parenthèses entières. $A(x) = \big[(2x+3)-(x+1)\big]\big[(2x+3)+(x+1)\big] = (x+2)(3x+4)$.
Contrôle : $(x+2)(3x+4) = 3x^2+4x+6x+8 = 3x^2+10x+8$. Les deux formes sont bien égales.

(c) Si $x>0$, alors $x+2>0$ et $3x+4>0$. Le produit de deux nombres strictement positifs est strictement positif.
Donc $A(x)>0$ pour tout $x>0$. Par exemple, $A(1) = 3\times 7 = 21$.

(d) Ici, on choisit la forme développée, car la constante 8 s'élimine. $A(x)=8 \iff 3x^2+10x+8=8 \iff 3x^2+10x=0 \iff x(3x+10)=0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x=0$ ou $x=-\frac{10}{3}$. Aucune de ces deux valeurs n'est strictement positive. Ce n'est donc pas possible : l'aire restante ne peut pas valoir 8 cm².

Ex. 34 ★★★ **Le bénéfice de l'atelier de Malik**

(a) $-2(x-6)^2+18 = -2(x^2-12x+36)+18 = -2x^2+24x-72+18 = -2x^2+24x-54$. Ensuite, $-2(x-3)(x-9) = -2(x^2-9x-3x+27) = -2(x^2-12x+27) = -2x^2+24x-54$. Les trois formes sont égales pour tout réel x. On peut donc s'en servir.

(b) On prend la forme développée pour $B(0)$, car on lit directement le terme constant : $B(0) = -54$. À production nulle, l'atelier perd 54 000 € (ce sont ses frais fixes). On prend la forme factorisée pour $B(10)$, car le calcul est plus court : $B(10) = -2\times 7\times 1 = -14$, soit une perte de 14 000 €.

(c) On prend la forme factorisée, sans la développer. $B(x)=0 \iff -2(x-3)(x-9)=0$. Comme $-2\neq 0$, on a $x-3=0$ ou $x-9=0$, donc $x=3$ ou $x=9$. Le bénéfice est nul pour 300 objets et pour 900 objets.

(d) On prend la forme « carré + nombre ». Un carré est positif ou nul : $(x-6)^2 \geqslant 0$, donc $-2(x-6)^2 \leqslant 0$ et $B(x) \leqslant 18$. On a l'égalité quand $x-6=0$, soit $x=6$. Le bénéfice maximal est de 18 000 €, pour 600 objets.

(e) On prend la forme « carré + nombre », car x n'y apparaît qu'une fois. $B(x)=10 \iff -2(x-6)^2+18=10 \iff -2(x-6)^2=-8 \iff (x-6)^2-2^2=0 \iff (x-6-2)(x-6+2)=0 \iff (x-8)(x-4)=0$ (identité a^2-b^2).
Donc $x=8$ ou $x=4$. Ces deux valeurs sont comprises entre 0 et 12. Le bénéfice vaut 10 000 € pour 400 objets et pour 800 objets.

Ex. 35 ★★★ **Une fraction à mettre sous la bonne forme**

(a) Avec a^2-b^2 : $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Ce produit est nul pour $x=1$ ou $x=-1$. Les valeurs interdites sont donc 1 et -1, et $Q(x)$ est défini sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

(b) Avec $(a-b)^2$: $(x-3)^2-4 = x^2-6x+9-4 = x^2-6x+5$. L'égalité est vérifiée. Comme $4=2^2$, on a une différence de deux carrés : $x^2-6x+5 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1)$. Contrôle : $(x-5)(x-1) = x^2-x-5x+5 = x^2-6x+5$.

(c) Pour $x\neq 1$ et $x\neq -1$: $Q(x) = \frac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$. On simplifie par le facteur commun $x-1$, qui n'est pas nul : $Q(x) = \frac{x-5}{x+1}$.

Ex. 35 (suite)

(d) Non, elle a tort. Avec la forme simplifiée, on trouve bien $\frac{1-5}{1+1} = -2$. Mais 1 est une valeur interdite de $Q(x)$: le dénominateur de départ vaut $1^2 - 1 = 0$. La simplification n'est valable que pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, donc $Q(1)$ n'existe pas.

(e) On réduit au même dénominateur : $1 - \frac{6}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{6}{x+1} = \frac{x+1-6}{x+1} = \frac{x-5}{x+1} = Q(x)$. Le numérateur 6 n'est jamais nul, donc $\frac{6}{x+1} \neq 0$. On a donc $Q(x) = 1 - \frac{6}{x+1} \neq 1$: $Q(x)$ ne vaut jamais 1.

6. *Expressions fractionnaires : valeurs interdites, simplifier, même dénominateur*

Ex. 36 ★☆☆ **Repérer les valeurs interdites**

(a) $x - 7 = 0$ pour $x = 7$. Valeur interdite : 7.

(b) $3x + 12 = 0$ donne $3x = -12$, soit $x = -4$. Valeur interdite : -4.

(c) $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$ s'annule pour $x = 6$ et pour $x = -6$. Il y a deux valeurs interdites : 6 et -6.

(d) $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 1$: le dénominateur ne s'annule jamais. Aucune valeur interdite.

(e) Équation produit nul : $x = 0$ ou $2x - 5 = 0$, soit $x = \frac{5}{2}$. Valeurs interdites : 0 et $\frac{5}{2}$.

(f) On cherche les valeurs sur l'expression de départ, avant de simplifier : $x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$. Valeurs interdites : 2 et -3. Même si $(x-2)$ se simplifie ensuite, 2 reste interdit.

Ex. 37 ★☆☆ **Simplifier… seulement par un facteur**

(a) Valeur interdite : 5. Avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: $\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x + 5$ pour $x \neq 5$.

(b) Valeur interdite : -7. Le numérateur et le dénominateur sont des sommes. Ils n'ont aucun facteur commun, donc l'expression ne se simplifie pas : on ne « barre » pas les x.

(c) Aucune valeur interdite. $6x + 18 = 6(x+3)$, donc $\frac{6(x+3)}{6} = x + 3$. Ici, 6 est bien un facteur du numérateur.

(d) $4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$: valeurs interdites $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{2}$: $\frac{2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2}{2x+1}$.

(e) $3x - 15 = 3(x-5)$: valeur interdite 5. Avec $(a-b)^2$, on a $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$. Pour $x \neq 5$: $\frac{(x-5)^2}{3(x-5)} = \frac{x-5}{3}$.

Ex. 38 ★★☆ **Tout sur le même dénominateur**

(a) Valeur interdite : 0. Pour $x \neq 0$: $A(x) = \frac{x}{x} - \frac{5}{x} = \frac{x-5}{x}$.

(b) Valeurs interdites : 1 et -4. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -4$: $B(x) = \frac{3(x+4)-(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+4)}$. Le « moins » porte sur tout le produit : $3x + 12 - (x^2 + x - 2) = -x^2 + 2x + 14$.
Donc $B(x) = \frac{-x^2+2x+14}{(x-1)(x+4)}$.

(c) Valeurs interdites : 3 et -3. Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$: $C(x) = \frac{2x(x+3)+x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x^2+6x+x^2-3x}{(x-3)(x+3)}$.
Donc $C(x) = \frac{3x^2+3x}{(x-3)(x+3)}$.

(d) Valeur interdite : 1. Pour $x \neq 1$: $D(x) = \frac{(x+2)(x-1)-x^2}{x-1} = \frac{x^2+x-2-x^2}{x-1}$.
Donc $D(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

Ex. 39 ★★☆ **Quatre erreurs à corriger**

(a) Pour $x = 1$: $\frac{1}{2} - \frac{1-2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, alors que $\frac{-2}{1+1} = -1$. Inès n'a pas appliqué le « moins » à tout le numérateur $x - 2$. Pour $x \neq -1$: $\frac{x-(x-2)}{x+1} = \frac{x-x+2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$.

(b) Malo a multiplié le dénominateur de $\frac{3}{x}$ par 4, mais pas son numérateur. Pour $x \neq 0$: $\frac{12}{4x} + \frac{x}{4x} = \frac{x+12}{4x}$.

(c) Pour $x = 1$: $\frac{7}{3} \neq 3$. Ici, x est un terme d'une somme, pas un facteur. On ne peut donc pas le « barrer ». L'expression ne se simplifie pas, et sa valeur interdite est -2.

(d) Yanis a multiplié par $\frac{2}{x}$ au lieu de multiplier par son inverse $\frac{x}{2}$. Pour $x \neq 0$: $\frac{x+1}{x} \times \frac{x}{2} = \frac{x+1}{2}$.

Ex. 40 ★★★ **Une fraction qui cache une identité**

(a) Avec l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$. Ce produit est nul pour $x = 4$ ou $x = -4$. Le dénominateur $x - 4$ s'annule aussi pour $x = 4$. Les valeurs interdites sont donc 4 et -4 : $E(x)$ existe pour $x \neq 4$ et $x \neq -4$.

(b) Le dénominateur commun est $(x-4)(x+4)$. On multiplie le numérateur ET le dénominateur de la première fraction par $x + 4$: $E(x) = \frac{x(x+4)}{(x-4)(x+4)} - \frac{12x-16}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2+4x-12x+16}{(x-4)(x+4)}$. Le « moins » porte sur tout le numérateur : $-(12x - 16) = -12x + 16$.
Donc $E(x) = \frac{x^2-8x+16}{(x-4)(x+4)}$.

(c) On reconnaît l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$. Pour $x \neq 4$ et $x \neq -4$: $E(x) = \frac{(x-4)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{x+4}$. Ce résultat n'est valable que pour $x \neq 4$ et $x \neq -4$.

Ex. 40 (suite)

(d) Non. Le nombre 4 est une valeur interdite de l'expression de départ, car $\frac{x}{x-4}$ n'existe pas pour $x = 4$. La forme simplifiée n'est égale à $E(x)$ que pour $x \neq \pm 4$. Donc $E(4)$ n'existe pas : simplifier ne supprime pas une valeur interdite.

(e) D'après la question 3, pour $x \neq 4$ et $x \neq -4$: $1 - E(x) = \frac{x+4}{x+4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{x+4-(x-4)}{x+4} = \frac{x+4-x+4}{x+4}$. Le « moins » porte sur tout le numérateur $x - 4$.
Donc $1 - E(x) = \frac{8}{x+4}$, pour $x \neq 4$ et $x \neq -4$.

Ex. 41 ★★★ Diviser par une fraction : une valeur interdite cachée

(a) Un carré est toujours positif ou nul : $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 4 \geq 4$. Ainsi $x^2 + 4$ n'est jamais nul. C'est une somme de deux carrés ($x^2 + 2^2$), qui ne se factorise pas.

(b) Non. Les deux dénominateurs ne s'annulent jamais, car $2x^2 + 8 = 2(x^2 + 4) \geq 8$. Mais on divise par la fraction $\frac{x^2-9}{2x^2+8}$: elle ne doit pas être nulle, donc il faut $x^2 - 9 \neq 0$. Or $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ s'annule pour $x = 3$ et pour $x = -3$. Les valeurs interdites sont donc 3 et -3, et Hugo a tort.

(c) Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse. Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$: $Q(x) = \frac{x+3}{x^2+4} \times \frac{2x^2+8}{x^2-9} = \frac{(x+3)\times 2(x^2+4)}{(x^2+4)(x-3)(x+3)}$. On simplifie par les facteurs communs $x + 3$ et $x^2 + 4$. On obtient $Q(x) = \frac{2}{x-3}$, pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

(d) Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$: $Q(x) \times \frac{x^2-9}{4} = \frac{2}{x-3} \times \frac{(x-3)(x+3)}{4} = \frac{2(x-3)(x+3)}{4(x-3)}$. On simplifie par les facteurs communs 2 et $x - 3$. Le produit vaut $\frac{x+3}{2}$, pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

(e) 5 n'est pas une valeur interdite, donc on peut utiliser la forme simplifiée : $Q(5) = \frac{2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$. On vérifie avec la forme de départ : $\frac{8}{29} \div \frac{16}{58} = \frac{8}{29} \times \frac{58}{16} = 1$.
Donc $Q(5) = 1$.

Ex. 42 ★★★ Aller-retour à vélo

(a) Le dénominateur commun est $x(x + 6)$. On multiplie le numérateur ET le dénominateur de chaque fraction : $T(x) = \frac{12(x+6)}{x(x+6)} + \frac{12x}{x(x+6)} = \frac{12x+72+12x}{x(x+6)} = \frac{24x+72}{x(x+6)}$. L'égalité est démontrée.

(b) Vraie durée : $T(6) = \frac{12}{6} + \frac{12}{12} = 2 + 1 = 3$ h. Durée de Noé : $\frac{24}{2\times 6+6} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$ h. Les résultats sont différents, donc Noé se trompe. Il a additionné les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Or $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$: il faut d'abord mettre les fractions au même dénominateur.

Ex. 42 (suite)

(c) Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse : $v(x) = 24 \times \frac{x(x+6)}{24x+72}$. On factorise $24x + 72 = 24(x + 3)$. On obtient $v(x) = \frac{24\,x(x+6)}{24(x+3)} = \frac{x(x+6)}{x+3}$, en simplifiant par le facteur commun 24.

(d) $v(x) - (x + 3) = \frac{x(x+6)-(x+3)^2}{x+3} = \frac{x^2+6x-(x^2+6x+9)}{x+3} = \frac{-9}{x+3}$. Le « moins » porte sur tout le carré développé. Comme $x > 0$, on a $x + 3 > 0$, donc $\frac{-9}{x+3} < 0$. Ainsi $v(x) < x + 3$: la vitesse moyenne est toujours plus petite que la moyenne des deux vitesses. Rayan a tort.

(e) $v(6) = \frac{6\times 12}{9} = \frac{72}{9} = 8$. On vérifie : $24 \div T(6) = 24 \div 3 = 8$. La vitesse moyenne de Mia est de 8 km/h, et non de 9 km/h.

7. *Isoler une variable dans une formule*

Ex. 43 ★☆☆ Isoler une variable (premier degré)

(a) On divise les deux membres par g, non nul : $m = \frac{P}{g}$.

(b) On divise les deux membres par 2π, non nul : $r = \frac{C}{2\pi}$.

(c) On soustrait d'abord 8 : $3n = P - 8$. Puis on divise par 3 : $n = \frac{P-8}{3}$.

(d) On multiplie par 2 : $2\mathcal{A} = bh$. Puis on divise par b, non nul : $h = \frac{2\mathcal{A}}{b}$.

(e) On soustrait d'abord v_0 : $at = v - v_0$. Puis on divise par a, non nul : $t = \frac{v-v_0}{a}$.

(f) On ajoute $4t$ et on soustrait h aux deux membres : $4t = 30 - h$. Puis on divise par 4 : $t = \frac{30-h}{4}$.

Ex. 44 ★☆☆ Isoler une grandeur au carré

(a) $c^2 = \mathcal{A}$ et $c > 0$, donc $c = \sqrt{\mathcal{A}}$.

(b) On divise par 4π, non nul : $r^2 = \frac{S}{4\pi}$. Comme $r > 0$: $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.

(c) On multiplie par R : $U^2 = PR$. Comme $U > 0$: $U = \sqrt{PR}$.

(d) On multiplie par 3 : $\pi r^2 h = 3V$. On divise par πh, non nul : $r^2 = \frac{3V}{\pi h}$. Comme $r > 0$: $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$.

(e) On divise par R, non nul : $I^2 = \frac{P}{R}$. Comme $I > 0$: $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$.

(f) On soustrait b^2 : $a^2 = c^2 - b^2$, qui est positif car $c > b$. Comme $a > 0$: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Ex. 45 ★★☆ **Ben corrige des copies**

(a) Faux. Diviser par 2 porte sur tout le membre : $\frac{2(L+\ell)}{2} = L + \ell$.
Donc $\frac{P}{2} = L + \ell$, puis $\ell = \frac{P}{2} - L$.

(b) Faux. On multiplie par t : $vt = d$. Puis on divise par v, non nul : $t = \frac{d}{v}$. Contrôle : $t = \frac{120}{60} = 2$ h. La formule de Malo donne 0,5, ce qui est absurde.

(c) Faux : Lucie a divisé avant de soustraire, et seulement G par 4. On soustrait d'abord 6 : $4n = G - 6$, donc $n = \frac{G-6}{4}$. Contrôle : $n = \frac{20}{4} = 5$ et $4 \times 5 + 6 = 26$. La formule de Lucie donne 0,5.

(d) Faux. On a bien $r^2 = \frac{S}{\pi}$, mais r est une longueur, donc $r > 0$. Il n'y a qu'une solution : $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Ex. 46 ★★☆ **Degrés Celsius et Fahrenheit**

(a) $F = 1{,}8 \times 25 + 32 = 45 + 32 = 77$. Il fait 77 °F.

(b) On soustrait d'abord 32 : $1{,}8C = F - 32$. Comme $1{,}8 \neq 0$, on divise tout le membre par 1,8 : $C = \frac{F-32}{1{,}8}$.

(c) $C = \frac{41-32}{1{,}8} = \frac{9}{1{,}8} = 5$. Il fait 5 °C.

(d) $1{,}8 \times 5 + 32 = 9 + 32 = 41$: on retrouve bien 41 °F, donc le résultat est juste.

Ex. 47 ★★★ **Résistances en parallèle**

(a) Faux. Avec $R_1 = R_2 = 10$: $\frac{1}{R} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, donc $R = 5\ \Omega$. Avec la formule de Lucas, on obtiendrait $R = 10 + 10 = 20\ \Omega$. L'inverse d'une somme n'est pas la somme des inverses : la formule de Lucas est fausse.

(b) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1 R_2} + \frac{R_1}{R_1 R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$.
Donc $\frac{1}{R} = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$. Les deux membres sont non nuls : on peut prendre leurs inverses, ce qui donne $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$.

(c) $R = \frac{30 \times 60}{30+60} = \frac{1800}{90} = 20$. La résistance équivalente vaut 20 Ω.

(d) Je soustrais $\frac{1}{R_1}$ aux deux membres : $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 - R}{R R_1}$. Comme $R < R_1$, on a $R_1 - R \neq 0$. Ce quotient est donc non nul, et on peut prendre son inverse : $R_2 = \frac{R R_1}{R_1 - R}$.

(e) $R_2 = \frac{12 \times 20}{20-12} = \frac{240}{8} = 30$, donc $R_2 = 30\ \Omega$. Contrôle : $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{3}{60} + \frac{2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$. On retrouve bien $R = 12$ Ω.

Ex. 48 ★★★ **Énergie cinétique d'une voiture**

(a) Je multiplie les deux membres par 2 : $2E_c = mv^2$.
Comme $v \neq 0$, on a $v^2 \neq 0$, et je divise par v^2 : $m = \frac{2E_c}{v^2}$.

Ex. 48 **(suite)**

(b) Faux. Avec $m = 2$ et $v = 3$: $E_c = \frac{1}{2} \times 2 \times 3^2 = 9$. La formule de Léa donne $\sqrt{\frac{9}{2 \times 2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = 1{,}5$, et non 3.
Correction : $2E_c = mv^2$, puis $v^2 = \frac{2E_c}{m}$ (car $m \neq 0$).
Comme $v > 0$, on obtient $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$.

(c) $v = \sqrt{\frac{2 \times 240\,000}{1\,200}} = \sqrt{400} = 20$. On garde la seule solution positive, car une vitesse est positive. La voiture roule donc à 20 m/s, soit $20 \times 3{,}6 = 72$ km/h.

(d) Faux. À la vitesse $2v$: $\frac{1}{2}m(2v)^2 = \frac{1}{2}m \times 4v^2 = 4 \times \frac{1}{2}mv^2 = 4E_c$. Quand la vitesse double, l'énergie cinétique est multipliée par 4.

Ex. 49 ★★★ **Course autour d'une pelouse**

(a) $\pi r^2 = 1\,600\pi$, donc $r^2 = \frac{1\,600\pi}{\pi} = 1\,600$. L'égalité $r^2 = 1\,600$ a deux solutions, 40 et -40. Mais r est une longueur, donc $r > 0$. Il reste $r = \sqrt{1\,600} = 40$ m.

(b) J'enlève d'abord ce qui est ajouté : $D - 150 = 2\pi r n$.
Comme $r > 0$, on a $2\pi r \neq 0$. Je divise tout le membre par ce facteur : $n = \frac{D-150}{2\pi r}$
(et non $D - \frac{150}{2\pi r}$).

(c) $n = \frac{5\,000-150}{2\pi \times 40} = \frac{4\,850}{80\pi} \approx 19{,}30$. Les coureurs font donc 19 tours complets, puis un morceau de tour.

(d) $D = 150 + 2\pi \times 40 \times 20 = 150 + 1\,600\pi \approx 5\,176{,}55$. La course mesure donc environ 5 177 m.

(e) Je multiplie par t : $vt = d$. Comme $v \neq 0$, je divise par v : $t = \frac{d}{v}$ (et non $\frac{v}{d}$).
Donc $t = \frac{5\,000}{5} = 1\,000$ s. Or $1\,000 = 16 \times 60 + 40$: Hugo court donc pendant 16 min 40 s.