Calculer une dérivée – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Calcul de dérivées · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $(uv)' = u'v + uv'$, et jamais $u'v'$; de même $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$.
- Quotient : $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec v **au carré** au dénominateur.
- Le signe moins du quotient porte sur tout uv' : parenthèses avant de développer.
- $\left(\dfrac{k}{x}\right)' = -\dfrac{k}{x^2}$ sans formule du quotient ; une constante a une dérivée nulle.
- $\sqrt{x}$ est définie en 0, mais dérivable seulement sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour étudier un signe, on garde v^2 tel quel et on factorise le numérateur.

Exercice 1 – Dérivées usuelles ★

Calcule $f'(x)$. Pour $\dfrac{1}{x^n}$, écris d'abord x^{-n}.

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt{5}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = x^{12}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

h) $f(x) = x$

Exercice 2 – Somme et multiple d'une fonction ★

Calcule $f'(x)$ en dérivant terme à terme : $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 9$

b) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$, sur $]0\,;+\infty[$

e) $f(x) = x^4 - \dfrac{2}{x}$

f) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3\sqrt{x} + 1$, sur $]0\,;+\infty[$

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \pi^2$

h) $f(x) = -\dfrac{5}{x^2} + \sqrt{3}x$

Exercice 3 – Dérivée d'un produit ★

Écris u, u', v, v', puis calcule $f'(x)$ avec $(uv)' = u'v + uv'$. Réduis le résultat.

a) $f(x) = (2x+1)(x-3)$

b) $f(x) = x^2(3x-1)$

c) $f(x) = x^2\sqrt{x}$, sur $]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \left(x^2+1\right)(1-4x)$

e) $f(x) = (3-x)\sqrt{x}$, sur $]0\,;+\infty[$

f) $f(x) = (2x-1)^2$

g) $f(x) = x^3\left(x^2-2\right)$

h) $f(x) = \left(x^2-x\right)(2x+5)$

Exercice 4 – Dérivée de l'inverse $\dfrac{1}{v}$ ★★

Précise où f est dérivable, puis calcule $f'(x)$ avec $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-4x}$

d) $f(x) = -\dfrac{2}{1-x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 5 – Dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ ★★

Écris u, u', v, v', puis calcule $f'(x)$. Réduis le numérateur et garde v^2 au dénominateur.

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$, pour $x \neq 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$, pour $x \neq -2$

c) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+3}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{2x}$, sur $]0\,;+\infty[$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, sur $]0\,;+\infty[$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x^2+1}$

Exercice 6 – Ensemble de dérivabilité ★★

Détermine l'ensemble sur lequel f est dérivable (on ne demande pas $f'(x)$).

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-5x+6}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+x+1}$

d) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$

Exercice 7 – Combiner les formules ★★★

Calcule $f'(x)$ en choisissant la bonne méthode. Donne le résultat sous forme d'une seule fraction.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} + 2\sqrt{x}$, sur $]0\,;\,+\infty[$

b) $f(x) = (x^2-3x)\sqrt{x}$, sur $]0\,;\,+\infty[$

c) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

Exercice 8 – La forme utile pour le signe ★★★

Montre que $f'(x)$ s'écrit sous la forme donnée.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; montre que $f'(x) = 3\,(x-1)\,(x-3)$

b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x-1}$, sur $]1\,;\,+\infty[$; montre que $f'(x) = \dfrac{(x-3)\,(x+1)}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$, pour $x \neq -1$; montre que $f'(x) = \dfrac{(x+3)\,(x-1)}{(x+1)^2}$

Exercice 9 – Des tangentes parallèles ★★★

On considère $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ et sa courbe $\mathcal{C}_f$.

1. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
2. Montre que $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$. Quel est le signe de $f'(x)$?
3. Écris l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.
4. Détermine les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 5x$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque dérivée d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $f(x) = x^2(x+1)$: « $f'(x) = 2x \times 1 = 2x$ ».

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$: « $f'(x) = \dfrac{1}{1} = 1$ ».

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$: « $f'(x) = \dfrac{x \times 2x - 1 \times (x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$ ».

d) $f(x) = \dfrac{3x}{x+4}$: « $f'(x) = \dfrac{3(x+4) - 3x \times 1}{x+4} = \dfrac{12}{x+4}$ ».

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$: « $f'(x) = \dfrac{1}{3x^2}$ ».

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$: « $f'(x) = \dfrac{(x+1)-x-1}{(x+1)^2} = 0$ ».

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. La dérivée de $f(x) = x(x^2+5)$ est :

   A $2x$ **B** $3x^2+5$ **C** $3x^2$ **D** x^2+5

2. La dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ est :

   A $-\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** $-\dfrac{2}{2x+1}$ **D** $-\dfrac{2}{(2x+1)^2}$

3. La dérivée de $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ est :

   A $-\dfrac{4}{(x-1)^2}$ **B** $\dfrac{4}{(x-1)^2}$ **C** 1 **D** $-\dfrac{4}{x-1}$

4. La fonction $x \mapsto 3\sqrt{x}$ est dérivable sur :

   A $[0\,;+\infty[$ **B** $\mathbb{R}$ **C** $]0\,;+\infty[$ **D** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

5. La dérivée de $f(x) = -\dfrac{6}{x}$ est :

   A $-\dfrac{6}{x^2}$ **B** 0 **C** -6 **D** $\dfrac{6}{x^2}$

6. Sur $]0\,;+\infty[$, la dérivée de $f(x) = x\sqrt{x}$ est :

   A $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ **B** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **C** $\sqrt{x}$ **D** $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).