Asymptotes, croissances comparées – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Limites de fonctions · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Limite finie ℓ en $\pm\infty$: asymptote **horizontale** $y = \ell$. Limite infinie en un réel a : asymptote **verticale** $x = a$.
- Une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$ ne donne aucune asymptote horizontale.
- Une valeur interdite où le quotient se simplifie (limite finie) ne donne pas d'asymptote verticale.
- Pas de croissance comparée sans forme indéterminée : $(-\infty) \times (+\infty)$ se conclut par la règle des signes.
- $\dfrac{e^x}{x^n} \to +\infty$ et $x^n e^{-x} \to 0$ en $+\infty$; $x^n e^x \to 0$ en $-\infty$: l'exponentielle l'emporte.
- $\sin x$ et $\cos x$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$: on les encadre entre -1 et 1, puis comparaison ou gendarmes.

Exercice 1 – De la limite à l'asymptote ★

Pour une fonction f et sa courbe $\mathcal{C}$, traduis chaque résultat : donne l'équation de l'asymptote obtenue, ou explique pourquoi il n'y en a pas.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$

g) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x) = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

Exercice 2 – Croissances comparées : réflexes ★

Détermine chaque limite. Dis s'il y a une forme indéterminée, puis cite la règle utilisée.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{5x}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2)\,e^x$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2\right)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x}$

Exercice 3 – Chercher les asymptotes ★

Détermine les asymptotes à la courbe de f (horizontales et verticales), en calculant les limites utiles.

a) $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$

d) $f(x) = e^x + 1$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{1-4x}{2x}$

h) $f(x) = 2 - e^{-x}$

Exercice 4 – Croissances comparées : transformer d'abord ★★

Détermine chaque limite. Factorise ou développe pour faire apparaître $\dfrac{e^x}{x^n}$, $x^n e^{-x}$ ou $x^n e^x$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + x}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x\right) e^{-x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^2 + x\right) e^x$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x - x^2}{e^x + x}$

Exercice 5 – Comparaison et gendarmes ★★

Détermine chaque limite en encadrant ou en minorant (majorant) la fonction. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \cos\left(x\right)\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin\left(x\right)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \sin\left(x\right)}{x}$

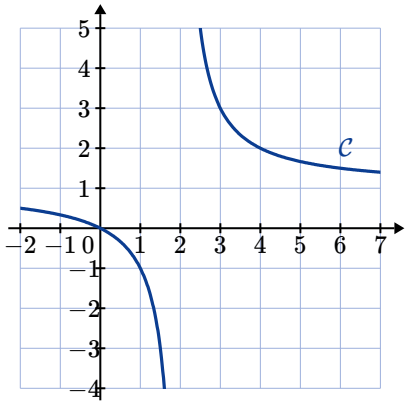
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x + 2\sin\left(x\right)\right)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(3+\sin(x))$

Exercice 6 – Lire des asymptotes ★★

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On admet qu'elle garde, en dehors du dessin, l'allure qu'elle a sur le dessin.



1. Conjecture les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, puis en 2 à gauche et à droite.
2. Déduis-en les asymptotes à $\mathcal{C}$.
3. On admet que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$. Lis $f(0)$ et $f(4)$ sur le graphique, puis calcule a et b.
4. Démontre par le calcul les limites conjecturées.

Exercice 7 – Une étude avec croissance comparée ★★★

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x+1)e^{-x}$, et sa courbe $\mathcal{C}$.

1. Détermine la limite de g en $-\infty$.
2. Détermine la limite de g en $+\infty$. Interprète graphiquement.
3. Calcule $g'(x)$, puis dresse le tableau de variations de g avec ses limites.
4. Étudie la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

Exercice 8 – Une population qui se stabilise ★★★

Dans une réserve, le nombre de lapins, en centaines, est modélisé par $P(t) = \dfrac{50}{1+4e^{-0{,}5t}}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en années.

1. Combien y a-t-il de lapins au départ ?
2. Détermine la limite de P en $+\infty$. Interprète-la pour la courbe, puis pour les lapins.
3. Montre que $P'(t) = \dfrac{100e^{-0{,}5t}}{(1+4e^{-0{,}5t})^2}$ et déduis-en le sens de variation de P.
4. Montre que la courbe reste sous son asymptote.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque élève s'est trompé. Trouve l'erreur, puis corrige.

a) $f(x) = \dfrac{x-5}{x+1}$: « $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc la droite $x = 1$ est asymptote verticale. »

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$: « -2 est une valeur interdite, donc la droite $x = -2$ est asymptote verticale. »

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = 0$ par croissance comparée.

d) « $\dfrac{2+\sin x}{x^2}$ n'a pas de limite en $+\infty$, car $\sin x$ n'en a pas. »

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0$, car x^2 l'emporte sur e^x.

f) $f(x) = 2 - e^{-x}$: « la droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x}$ vaut :

   A $+\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $-\infty$

2. La courbe de $f(x) = \dfrac{4x+1}{2-x}$ a pour asymptotes les droites d'équations :

   A $x = -2$ et $y = 4$ **B** $x = 2$ et $y = 4$ **C** $y = 2$ et $x = -4$ **D** $x = 2$ et $y = -4$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x}$ vaut :

   A 0 **B** $-\infty$ **C** $+\infty$ **D** 1

4. Si $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$, alors :

   A la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe **B** $f(1) = -\infty$

   C la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe **D** la courbe n'a pas d'asymptote

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$:

   A vaut 0 **B** n'existe pas **C** vaut 1 **D** vaut $+\infty$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$ vaut :

   A $+\infty$ **B** 0 **C** on ne peut pas conclure **D** $-\infty$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).