Corrigé – Asymptotes, croissances comparées

Mathématiques – Terminale spécialité

Limites de fonctions · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – De la limite à l'asymptote ★

Pour une fonction f et sa courbe $\mathcal{C}$, traduis chaque résultat : donne l'équation de l'asymptote obtenue, ou explique pourquoi il n'y en a pas.

a) Limite finie en $+\infty$: la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b) Limite infinie quand x tend vers le réel 3 : la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

c) *Limite infinie en $-\infty$: pas d'asymptote horizontale.*
La courbe monte sans s'approcher d'une droite horizontale.

d) *Limite finie en un réel : pas d'asymptote.*
La courbe s'approche du point de coordonnées $(-1\,;\,4)$.

e) Limite finie en $-\infty$: la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote horizontale en $-\infty$.

f) Limite infinie en 0 : la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est asymptote verticale.

g) Les deux limites sont infinies : une seule droite, d'équation $x = 5$, est asymptote verticale.
La courbe descend à gauche de 5 et monte à droite.

h) La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$, en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2 – Croissances comparées : réflexes ★

Détermine chaque limite. Dis s'il y a une forme indéterminée, puis cite la règle utilisée.

a) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$: l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$.

b) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.
$\dfrac{x^2}{e^x} = x^2 e^{-x}$: l'exponentielle l'emporte.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$: forme $\infty \times 0$.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$: forme $\infty \times 0$.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

e) $\dfrac{e^x}{5x} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{e^x}{x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée.
Par produit par $\dfrac{1}{5} > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{5x} = +\infty$.

f) Forme $\infty \times 0$.
On développe : $(x+2)\,e^x = xe^x + 2e^x$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2)\,e^x = 0$.

g) Forme $+\infty - \infty$.
On factorise par e^x : $e^x - x^2 = e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{e^x}\right)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ par croissance comparée, donc la parenthèse tend vers 1.
Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2\right) = +\infty$.

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.
Pas de forme indéterminée : pas de croissance comparée.
Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$.

Exercice 3 – Chercher les asymptotes ★

Détermine les asymptotes à la courbe de f (horizontales et verticales), en calculant les limites utiles.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ (car $\dfrac{2}{x-1} \to 0$).
En 1 : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$.
Asymptotes : $y = 3$ (horizontale, en $\pm\infty$) et $x = 1$ (verticale).

b) Pour $x \neq 0$, $\dfrac{2x-1}{x+4} = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{4}{x}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.
En -4, le numérateur tend vers -9 et $x + 4 \to 0$: $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} f(x) = -\infty$.
Asymptotes : $y = 2$ (horizontale) et $x = -4$ (verticale).

c) $x^2 + 1 \geqslant 1$ ne s'annule jamais : pas de valeur interdite, donc pas d'asymptote verticale.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
Asymptote : $y = 0$ (l'axe des abscisses), en $\pm\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Asymptote : $y = 1$, en $-\infty$ seulement.
En $+\infty$, la limite est infinie : pas d'asymptote.

e) Valeur interdite 1, mais pour $x \neq 1$, $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$, donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Limite finie en 1 : pas d'asymptote verticale. Limites infinies en $\pm\infty$: pas d'asymptote horizontale.
La courbe n'a aucune asymptote.

f) Pour $x \neq -2$, $(x+2)^2 > 0$: $\lim\limits_{x \to -2} (x+2)^2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
Asymptotes : $x = -2$ (verticale) et $y = 0$ (horizontale).

g) Pour $x \neq 0$, $\dfrac{1-4x}{2x} = \dfrac{1}{2x} - 2$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$.
En 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$.
Asymptotes : $y = -2$ (horizontale) et $x = 0$ (verticale, l'axe des ordonnées).

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Asymptote : $y = 2$, en $+\infty$ seulement.

Exercice 4 – Croissances comparées : transformer d'abord ★★

Détermine chaque limite. Factorise ou développe pour faire apparaître $\dfrac{e^x}{x^n}$, $x^n e^{-x}$ ou $x^n e^x$.

a) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.
On factorise par e^x en haut et par x^2 en bas (pour $x \neq 0$) :
$$\frac{e^x + x}{x^2 + 1} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 + x e^{-x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissance comparée.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ par croissance comparée, donc la deuxième fraction tend vers $\dfrac{1}{1} = 1$.
Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + x}{x^2 + 1} = +\infty$.

b) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.
On sépare : $\dfrac{x^3 - 2}{e^x} = x^3 e^{-x} - 2e^{-x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{e^x} = 0$.

c) Forme $\infty \times 0$.
On développe : $\left(x^2 - 3x\right) e^{-x} = x^2 e^{-x} - 3x e^{-x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x e^{-x} = 0$, par croissance comparée.
Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x\right) e^{-x} = 0$.

d) Forme $\infty \times 0$.
On développe : $\left(2x^2 + x\right) e^{x} = 2x^2 e^{x} + x e^{x}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$, par croissance comparée.
Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^2 + x\right) e^{x} = 0$.

e) Forme $\frac{\infty}{\infty}$.
On pose $X = 2x$: $\dfrac{e^{2x}}{x} = 2 \times \dfrac{e^{2x}}{2x}$, soit $2 \times \dfrac{e^X}{X}$.
Quand $x \to +\infty$, $X \to +\infty$, et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée.
Par composition puis produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty$.

f) Forme $\frac{\infty}{\infty}$.
On divise en haut et en bas par e^x :
$\dfrac{3e^x - x^2}{e^x + x} = \dfrac{3 - x^2 e^{-x}}{1 + xe^{-x}}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissance comparée.
Par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x - x^2}{e^x + x} = 3$.

Exercice 5 – Comparaison et gendarmes ★★

Détermine chaque limite en encadrant ou en minorant (majorant) la fonction. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

a) $\cos x \geqslant -1$, donc $x + \cos x \geqslant x - 1$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$.
D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \cos(x)) = +\infty$.

b) Pour $x > 0$, on divise l'encadrement de $\sin x$ par $x > 0$: $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

c) Pour $x > 0$, $\dfrac{2x + \sin(x)}{x} = 2 + \dfrac{\sin(x)}{x}$.
Comme $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$: $2 - \dfrac{1}{x} \leqslant 2 + \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 2 + \dfrac{1}{x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \sin(x)}{x} = 2$.

d) $\sin x \leqslant 1$, donc $2 \sin x \leqslant 2$ et $-3x + 2 \sin x \leqslant -3x + 2$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x + 2) = -\infty$.
D'après le théorème de comparaison (majoration), $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x + 2\sin(x)) = -\infty$.

e) $x^2 + 1 > 0$, donc $-\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{\cos x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, et de même pour l'opposé.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cos(x)}{x^2+1} = 0$.

f) $2 \leqslant 3 + \sin x \leqslant 4$ et $e^{-x} > 0$, donc $2e^{-x} \leqslant e^{-x}(3 + \sin x) \leqslant 4e^{-x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^{-x} = 0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(3 + \sin(x)) = 0$.

Exercice 6 – Lire des asymptotes ★★

1. Aux deux extrémités, la courbe se rapproche de la droite horizontale passant par 1 : $\lim f = 1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Juste à gauche de 2, la courbe plonge vers le bas : limite $-\infty$.
   Juste à droite de 2, elle monte : limite $+\infty$.

2. Limite finie 1 en $\pm\infty$: asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
   Limites infinies en 2 : asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3. On part de 0 sur l'axe des abscisses : la courbe passe par l'origine, $f(0) = 0$.
   On part de 4 : on monte jusqu'à la courbe et on lit $f(4) = 2$.
   $f(0) = a + \dfrac{b}{-2} = 0$ et $f(4) = a + \dfrac{b}{2} = 2$.
   En additionnant : $2a = 2$, donc $a = 1$; puis $\dfrac{b}{2} = 2 - 1 = 1$, donc $b = 2$.
   Ainsi $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$ (de même en $-\infty$).
   Si $x < 2$, $x - 2 \to 0^-$: $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$.
   Si $x > 2$, $x - 2 \to 0^+$: $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty$.
   Les conjectures sont démontrées.

Exercice 7 – Une étude avec croissance comparée ★★★

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.
   Ce n'est pas une forme indéterminée : par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

2. Forme $\infty \times 0$.
   On développe : $(2x+1)\,e^{-x} = 2xe^{-x} + e^{-x}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.
   Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
   L'axe des abscisses (droite $y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. On pose $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.
   $g'(x) = 2e^{-x} + (2x+1)(-e^{-x}) = (2 - 2x - 1)e^{-x} = (1-2x)e^{-x}$.
   $e^{-x} > 0$: $g'(x)$ a le signe de $1 - 2x$, positif avant $\dfrac{1}{2}$ et négatif après.
   $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(2 \times \dfrac{1}{2} + 1\right) e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
g	$-\infty$	↗	$2e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

4. On étudie le signe de $g(x) - 0 = (2x+1)e^{-x}$.
   Comme $e^{-x} > 0$, c'est le signe de $2x+1$:$2x + 1 > 0$
   $\iff 2x > -1$ *(on retranche 1)*
   $\iff x > -\dfrac{1}{2}$ *(on divise par 2)*
   $S = \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
   $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'asymptote sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, en dessous sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$, et la coupe au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 8 – Une population qui se stabilise ★★★

1. $P(0) = \dfrac{50}{1+4e^0} = \dfrac{50}{1+4} = 10$: il y a 10 centaines, soit 1 000 lapins au départ.

2. On pose $X = -0{,}5t$: $X \to -\infty$ quand $t \to +\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.
   Par composition, $e^{-0{,}5t} \to 0$.
   Le dénominateur tend vers $1 + 0 = 1$: par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 50$.
   La droite d'équation $y = 50$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.
   À long terme, la population se stabilise vers 5 000 lapins.

3. $P = \dfrac{50}{u}$ avec $u(t) = 1 + 4e^{-0{,}5t}$ et $u'(t) = 4 \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = -2e^{-0{,}5t}$.
   $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, donc $P'(t) = -\dfrac{50 \times \left(-2e^{-0{,}5t}\right)}{\left(1+4e^{-0{,}5t}\right)^2} = \dfrac{100e^{-0{,}5t}}{\left(1+4e^{-0{,}5t}\right)^2}$.
   Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : $P'(t) > 0$, donc P est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. $4e^{-0{,}5t} > 0$, donc $1 + 4e^{-0{,}5t} > 1$.
   Diviser 50 par un nombre plus grand que 1 donne un résultat plus petit que 50 : $P(t) < 50$.
   La courbe est sous la droite $y = 50$: la population n'atteint jamais 5 000 lapins.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque élève s'est trompé. Trouve l'erreur, puis corrige.

a) *Une limite finie en $+\infty$ donne une asymptote horizontale.*
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$.
L'asymptote verticale est $x = -1$, car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$.

b) *Il faut une limite infinie en -2.*
Pour $x \neq -2$, $\dfrac{x^2-4}{x+2} = x - 2$, donc $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -4$.
La limite est finie : pas d'asymptote verticale.

c) *En $-\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée.*
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$.

d) *On encadre* $\sin x$ *au lieu de conclure trop vite.*

$1 \leqslant 2 + \sin x \leqslant 3$ et $x^2 > 0$, donc $\dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{2+\sin x}{x^2} \leqslant \dfrac{3}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin(x)}{x^2} = 0$.

e) *C'est l'inverse : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de* x.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissance comparée.

f) *Erreur de côté : en* $-\infty$, $-x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$: pas d'asymptote en $-\infty$.

La droite $y = 2$ est asymptote en $+\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x}$ vaut :

Réponse B : 0

Forme $\infty \times 0$: par croissance comparée, $x^n e^{-x} \to 0$ en $+\infty$.

2. La courbe de $f(x) = \dfrac{4x+1}{2-x}$ a pour asymptotes les droites d'équations :

Réponse D : $x = 2$ et $y = -4$

En $\pm\infty$, $f(x) \to \dfrac{4}{-1} = -4$ (termes de plus haut degré) ; en 2, le dénominateur s'annule et le numérateur vaut 9.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x}$ vaut :

Réponse A : 0

Pas de forme indéterminée : le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $-\infty$.

4. Si $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$, alors :

Réponse C : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe

Limite infinie en un réel : asymptote verticale. Une limite n'est pas une valeur de f.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$:

Réponse A : vaut 0

Pour $x > 0$: $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; les deux bornes tendent vers 0 (gendarmes).

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - e^x)$ vaut :

Réponse D : $-\infty$

$x - e^x = e^x\left(xe^{-x} - 1\right)$: la parenthèse tend vers -1 par croissance comparée, $e^x \to +\infty$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).