Terminale maths expertes / Arithmétique

benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels : multiples, diviseurs, parité, nombres premiers*

À retenir : a est multiple de b si $a = kb$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ($0 = 0 \times b$ est multiple de tout b). Pair : $2k$; impair : $2k+1$; deux impairs : $2k+1$ et $2p+1$. 1 n'est pas premier, 2 est le seul premier pair. Un contre-exemple suffit à réfuter.

Ex. 1 ★☆☆ **Multiples et diviseurs** — Réponds à chaque question en justifiant en une ou deux lignes.

(a) Liste tous les diviseurs positifs de 156.

(b) Donne tous les diviseurs de 15 dans $\mathbb{Z}$.

(c) 0 est-il un multiple de 23 ? Justifie.

(d) Justifie que $17 \mid 391$. A-t-on aussi $391 \mid 17$? Justifie.

(e) -8 est-il un diviseur de 120 ? Justifie.

(f) 1 est-il un nombre premier ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Critères de divisibilité sans confusion** — En plus des critères par 3, 4 et 9, on admet le critère par 11 : un entier est divisible par 11 si, en partant des unités, la somme alternée de ses chiffres (unités − dizaines + centaines − …) est un multiple de 11. Justifie chaque réponse par le bon critère.

(a) 8 316 est-il divisible par 4 ? par 9 ?

(b) 4 125 est divisible par 3. L'est-il par 9 ?

(c) Inès affirme : « 3 718 est pair, donc il est divisible par 4. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) 7 293 est-il divisible par 11 ?

(e) Malo affirme : « La somme des chiffres de 6 391 vaut 19, donc 6 391 n'est pas divisible par 11. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 3 ★★☆ **Vrai ou faux sur les entiers** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie : démonstration si elle est vraie, contre-exemple si elle est fausse.

(a) Pour tout entier n, $n + (n+1)$ est pair.

(b) Pour tout entier n, $n^2 + n$ est pair.

(c) La somme de deux entiers impairs quelconques est un multiple de 4.

(d) Si un entier a divise le produit bc de deux entiers b et c, alors $a \mid b$ ou $a \mid c$.

(e) Sami constate que $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0$, 1, 2 et 3. Il en conclut : « $n^2 + n + 41$ est premier pour tout entier naturel n. »

Ex. 4 ★★☆ **Parité et produit de trois consécutifs** — Soit n un entier naturel. On pose $P = n(n+1)(n+2)$.

(a) En traitant $n = 2k$ puis $n = 2k+1$, démontre que n^2 et n ont la même parité.

(b) Déduis-en que $n^2 + 3n + 5$ est impair.

(c) Justifie que P est pair.

(d) En traitant $n = 3k$, $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$, démontre que P est un multiple de 3.

(e) Déduis-en que P est un multiple de 6.

Ex. 5 ★★★ **Nombres premiers : corriger, puis démontrer** — Un entier naturel est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

(a) Lina dit : « 91 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, donc 91 est premier. » Corrige-la. Détermine ensuite si 223 est premier, en justifiant à quel diviseur tu arrêtes les tests.

(b) Tom affirme : « Aucun nombre premier n'est pair. » Corrige-le, puis démontre que 2 est le seul nombre premier pair.

(c) Soit p un nombre premier tel que $p \geqslant 5$. À l'aide de la division euclidienne de p par 6, démontre que $p = 6k+1$ ou $p = 6k+5$, avec $k \in \mathbb{N}$.

(d) Démontre que pour tout nombre premier $p \geqslant 5$, $24 \mid p^2 - 1$. Tu peux traiter séparément k pair et k impair.

(e) Vrai ou faux : « Si $n \geqslant 5$ est un entier tel que $24 \mid n^2 - 1$, alors n est premier. » Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Quand n − 2 divise n + 7** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier relatif. On cherche tous les n tels que $n - 2 \mid n + 7$.

(a) Pour $n = 2$, le nombre $n + 7$ est-il un multiple de $n - 2$? Justifie.

(b) Démontre que si $n - 2 \mid n + 7$, alors $n - 2 \mid 9$.

(c) Liste tous les diviseurs de 9 dans $\mathbb{Z}$, puis déduis-en tous les entiers relatifs n tels que $n - 2 \mid n + 7$.

(d) Ana affirme : « Puisque $n - 2$ divise $n + 7$, on a aussi $n + 7$ qui divise $n - 2$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Démontre que si a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $a = b$. Ce résultat reste-t-il vrai dans $\mathbb{Z}$? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Diviseurs en Python et nombres parfaits** — Un entier naturel $n \geqslant 1$ est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même. Ben écrit cette fonction censée lister les diviseurs positifs de $a \geqslant 1$:

```
def diviseurs(a):
    L = []
    d = 1
    while d * d <= a:
        if a % d == 0:
            L.append(d)
            L.append(a // d)
        d = d + 1
    return L
```

(a) Qu'affiche `print(diviseurs(45))` ? Justifie pourquoi la boucle peut s'arrêter dès que `d * d > a`.

(b) Qu'affiche `print(diviseurs(49))` ? Explique le défaut, puis corrige la fonction en ajoutant un test.

(c) À l'aide de la fonction corrigée, liste les diviseurs positifs de 496. Le nombre 496 est-il parfait ? Justifie.

(d) Démontre qu'aucun nombre premier n'est parfait. Le nombre 1 est-il parfait ? Justifie.

(e) Léo vérifie que 6 est parfait et conclut : « Tout nombre parfait est un multiple de 6. » A-t-il raison ? Justifie.

2. *Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ et division euclidienne*

À retenir : Division de a par $b > 0$: $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$. Le reste n'est jamais négatif : $-29 = 4 \times (-8) + 3$. Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid au + bv$ pour tous entiers u, v. En revanche, $d \mid ab$ n'entraîne pas $d \mid a$.

Ex. 8 ★☆☆ **Divisions euclidiennes, dividendes négatifs compris** — Donne à chaque fois le quotient q et le reste r, avec $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

(a) Effectue la division euclidienne de 1 000 par 37.

(b) Effectue la division euclidienne de 2 026 par 48.

(c) Effectue la division euclidienne de -85 par 6.

(d) Effectue la division euclidienne de -250 par 11.

(e) Effectue la division euclidienne de -1 par 13.

(f) Effectue la division euclidienne de 7 par 15.

Ex. 9 ★☆☆ **Est-ce bien la division demandée ?** — Chaque égalité est exacte. Si elle ne donne pas la division euclidienne demandée, écris la bonne division.

(a) L'égalité $250 = 12 \times 19 + 22$ donne-t-elle la division euclidienne de 250 par 12 ? Justifie.

(b) L'égalité $318 = 25 \times 12 + 18$ donne-t-elle la division euclidienne de 318 par 25 ? Justifie.

(c) L'égalité $318 = 25 \times 12 + 18$ donne-t-elle la division euclidienne de 318 par 12 ? Justifie.

Ex. 9 (suite)

(d) L'égalité $-71 = 8 \times (-8) - 7$ donne-t-elle la division euclidienne de -71 par 8 ? Justifie.

(e) L'égalité $-60 = 9 \times (-7) + 3$ donne-t-elle la division euclidienne de -60 par 9 ? Justifie.

Ex. 10 ★★☆ **Quand $n-3$ divise $2n+9$** — On cherche tous les entiers relatifs n tels que $n-3$ divise $2n+9$.

(a) Trouve des entiers u et v tels que $u(2n+9) + v(n-3)$ ne dépende pas de n. Déduis-en un entier que $n-3$ divise forcément.

(b) Déduis-en la liste des valeurs possibles de n dans $\mathbb{Z}$.

(c) Vérifie que chacune de ces valeurs convient, puis conclus.

(d) Déduis-en les entiers naturels n pour lesquels $\frac{2n+9}{n-3}$ est un entier naturel.

Ex. 11 ★★☆ **Restes d'une somme, d'un produit, changement de diviseur** — Dans la division euclidienne par 14, l'entier naturel a a pour reste 9 et l'entier naturel b a pour reste 11.

(a) Détermine le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 14.

(b) Détermine le reste de la division euclidienne de ab par 14.

(c) Détermine le reste de la division euclidienne de a par 7.

(d) Le reste de la division euclidienne de a par 28 est-il forcément 9 ? Justifie.

(e) Yanis affirme : « si 14 divise un produit cd d'entiers, alors 14 divise c ou d ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Quand $n+5$ divise n^2+12** — On cherche tous les entiers relatifs n tels que $n+5$ divise n^2+12.

(a) Démontre que si $n+5$ divise n^2+12, alors $n+5$ divise $5n-12$.

(b) Déduis-en que $n+5$ divise un entier qui ne dépend pas de n, puis donne la liste des valeurs possibles de n.

(c) Vérifie chaque valeur trouvée et conclus. Explique pourquoi cette vérification est nécessaire.

(d) Déduis-en les entiers naturels n pour lesquels $\frac{n^2+12}{n+5}$ est un entier, et donne la valeur de cet entier.

Ex. 13 ★★★ **Un reste égal au carré du quotient** — On cherche les entiers naturels a dont la division euclidienne par 17 a un reste égal au carré du quotient. On note q ce quotient.

(a) Exprime a en fonction de q, puis justifie que $q \leqslant 4$.

(b) Déduis-en toutes les valeurs possibles de a. Vérifie que chacune convient.

(c) Détermine maintenant les entiers relatifs $a < 0$ dont la division euclidienne par 17 a un reste égal au carré du quotient.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Démontre que tous les entiers trouvés aux deux questions précédentes sont pairs, sans les tester un par un.

(e) On remplace 17 par 50. Combien d'entiers naturels a ont alors un reste égal au carré du quotient ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Carrés et division par** 4 — Dans tout l'exercice, n, a et b désignent des entiers relatifs.

(a) En distinguant n pair et n impair, démontre que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 vaut 0 ou 1.

(b) Déduis-en tous les restes possibles de la division euclidienne de $a^2 + b^2$ par 4.

(c) Justifie que 2 027 n'est pas la somme des carrés de deux entiers.

(d) Vrai ou faux : si 4 divise $a^2 + b^2$, alors a et b sont pairs. Justifie.

(e) Déduis-en que si a et b sont impairs, alors $a^2 + b^2$ n'est le carré d'aucun entier.

3. *PGCD, algorithme d'Euclide et PGCD d'expressions en n*

À retenir : Le PGCD est le dernier reste non nul ; $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;a - kb)$. En n : d divise une constante, puis on cherche les n (ex. $\text{PGCD}(n+1\,;n) = 1$). Si $\text{PGCD}(a\,;b) = d$: $a = da'$, $b = db'$, a' et b' premiers entre eux.

Ex. 15 ★☆☆ **Euclide à la main** — Détaille chaque calcul.

(a) Calcule $\text{PGCD}(2\,431\,;1\,001)$ avec l'algorithme d'Euclide.

(b) Déduis-en la liste des diviseurs communs positifs de 2 431 et 1 001.

(c) Justifie que $\text{PGCD}(4\,199\,;1\,547) = \text{PGCD}(1\,547\,;1\,105)$, puis termine le calcul.

(d) Calcule $\text{PGCD}((-126)\,;495)$.

(e) Calcule $\text{PGCD}(637\,;0)$.

(f) Calcule $\text{PGCD}(1\,847\,;1\,848)$ en une ligne, sans algorithme.

Ex. 16 ★☆☆ **Euclide en Python** — On donne le programme suivant.

```
def euclide(a, b):
    n = 0
    while b != 0:
        r = a % b
        a = b
        b = r
        n = n + 1
    return a, n
```

Valeurs à la fin de chaque passage dans la boucle pour `euclide(1071, 462)` :

Passage	a	b	r
1	462	147	147
2	…	…	…
3	…	…	…

(a) Recopie et complète le tableau.

(b) Qu'affiche `print(euclide(1071, 462))` ? Que représentent les deux nombres affichés ?

(c) Léa échange les lignes `a = b` et `b = r`. Qu'affiche alors `print(euclide(1071, 462))` ? Explique son erreur.

(d) Qu'affiche `print(euclide(462, 1071))` ? Justifie.

(e) Qu'affiche `print(euclide(58, 0))` ? Justifie.

Ex. 17 ★★☆ **Un PGCD qui dépend de n** — Pour tout entier naturel n, on pose $a = 2n + 7$ et $b = n + 2$.

(a) Démontre que $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(n+2\,;3)$. Déduis-en les valeurs possibles de $\text{PGCD}(a\,;b)$.

(b) Hugo en conclut que $\text{PGCD}(a\,;b) = 3$ pour tout n. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Détermine les entiers naturels n pour lesquels $\text{PGCD}(a\,;b) = 3$.

(d) La fraction $\frac{2n+7}{n+2}$ est-elle irréductible pour $n = 2\,026$? Et pour $n = 2\,027$? Justifie.

Ex. 18 ★★☆ **PGCD imposé, somme imposée** — On cherche les entiers naturels a et b, avec $a \leqslant b$, tels que $a + b = 288$ et $\text{PGCD}(a\,;b) = 24$. On admet que $\text{PGCD}(ka\,;kb) = k \times \text{PGCD}(a\,;b)$ pour tout entier naturel k non nul.

(a) Justifie qu'il existe des entiers naturels a' et b' tels que $a = 24a'$, $b = 24b'$ et $\text{PGCD}(a'\,;b') = 1$.

(b) Démontre que $a' + b' = 12$.

(c) Nina propose $a' = 2$ et $b' = 10$, soit $a = 48$ et $b = 240$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Détermine tous les couples $(a\,;b)$ cherchés.

Ex. 19 ★★★ **Une fraction qui se simplifie parfois** — Pour tout entier naturel n, on pose $a = 5n + 3$ et $b = 3n + 4$. On note $d = \text{PGCD}(a\,;b)$.

(a) Trouve des entiers u et v tels que $ua + vb$ ne dépende pas de n. Déduis-en les valeurs possibles de d.

(b) Démontre que $11 \mid b$ si et seulement si $11 \mid a$.

(c) Détermine tous les entiers naturels n pour lesquels $d = 11$.

(d) Pour quels entiers naturels n la fraction $\frac{5n+3}{3n+4}$ est-elle irréductible ? Écris-la sous forme irréductible pour $n = 17$.

Ex. 20 ★★★ **PGCD égal à 18 : produit ou écart imposé** — On cherche des entiers naturels a et b, avec $1 \leqslant a < b$, tels que $\text{PGCD}(a\,;b) = 18$. On admet que $\text{PGCD}(ka\,;kb) = k \times \text{PGCD}(a\,;b)$ pour tout entier naturel k non nul.

(a) Justifie qu'il existe des entiers naturels a' et b', premiers entre eux, tels que $a = 18a'$ et $b = 18b'$.

(b) On impose $ab = 11\,664$. Malik propose le couple $(36\,;324)$, dont le produit vaut bien $11\,664$. Ce couple convient-il ? Justifie.

(c) Détermine tous les couples $(a\,;b)$ tels que $\text{PGCD}(a\,;b) = 18$ et $ab = 11\,664$.

(d) Démontre que, pour tout entier naturel k, $\text{PGCD}(k\,;k+1) = 1$.

(e) Déduis-en tous les couples $(a\,;b)$ tels que $\text{PGCD}(a\,;b) = 18$ et $b - a = 18$.

Ex. 21 ★★★ **Un programme qui renvoie toujours 0** — Pour calculer $\text{PGCD}(a\,;b)$ avec $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, Inès écrit ce programme :

```
def pgcd(a, b):
    r = a % b
    while r != 0:
        a = b
        b = r
        r = a % b
    return r
```

(a) Qu'affiche `print(pgcd(28, 6))` ? Explique l'erreur d'Inès et corrige une seule ligne.

(b) Avec le programme corrigé, écris une boucle qui affiche $\text{PGCD}(n^2+3\,;n+1)$ pour n de 0 à 7. Donne ce qu'elle affiche.

(c) Pour tout entier naturel n, calcule $(n^2+3) - (n-1)(n+1)$. Déduis-en que $\text{PGCD}(n^2+3\,;n+1) = \text{PGCD}(n+1\,;4)$.

(d) Détermine, selon les valeurs de n, la valeur de $\text{PGCD}(n^2+3\,;n+1)$.

4. *Identité et théorème de Bézout*

À retenir : Bézout : $\text{PGCD}(a\,;b) = 1$ si et seulement s'il existe u, v entiers avec $au + bv = 1$. Mais $au + bv = m$ avec $m \neq \pm 1$ donne seulement $\text{PGCD}(a\,;b) \mid m$: $4 \times 3 + 6 \times (-1) = 6$, alors que le PGCD vaut 2. Le couple $(u\,;v)$ n'est pas unique.

Ex. 22 ★★★ **Remonter l'algorithme d'Euclide** — Écris l'algorithme d'Euclide en isolant chaque reste, puis remonte-le pour obtenir l'égalité demandée. Termine par une vérification numérique.

(a) Détermine $\text{PGCD}(53\,;17)$ et un couple d'entiers $(u\,;v)$ tel que $53u + 17v = \text{PGCD}(53\,;17)$.

(b) Détermine $\text{PGCD}(117\,;45)$ et un couple d'entiers $(u\,;v)$ tel que $117u + 45v = \text{PGCD}(117\,;45)$.

(c) Détermine $\text{PGCD}(100\,;37)$, puis un couple d'entiers $(u\,;v)$ tel que $100u + 37v = 3$.

(d) Trouve des entiers u et v tels que $29u - 12v = 1$. Attention au signe devant $12v$.

Ex. 23 ★★★ **Premiers entre eux pour tout entier n** — Dans tout l'exercice, n est un entier naturel.

(a) Démontre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

(b) Calcule $3(2n+1) - 2(3n+1)$. Déduis-en que la fraction $\frac{3n+1}{2n+1}$ est irréductible.

(c) Démontre que $n + 1$ et $n^2 + n + 1$ sont premiers entre eux.

(d) Calcule $2(2n+3) - (4n+1)$. Peut-on en déduire que $2n + 3$ et $4n + 1$ sont toujours premiers entre eux ? Justifie avec $n = 1$.

(e) Inès affirme : « $2n + 1$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux, donc ce sont des nombres premiers. » A-t-elle raison ? Justifie avec $n = 4$.

Ex. 24 ★★★ **Bézout : vrai ou faux ?** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie : démonstration ou contre-exemple.

(a) Comme $6 \times 4 + 10 \times (-2) = 4$, on a $\text{PGCD}(6\,;10) = 4$.

(b) Il existe des entiers u et v strictement positifs tels que $14u + 9v = 1$.

(c) $(3\,;-11)$ est l'unique couple d'entiers $(u\,;v)$ tel que $15u + 4v = 1$.

(d) Comme $13 \times 3 + 20 \times (-2) = -1$, les entiers 13 et 20 sont premiers entre eux.

Ex. 25 ★★☆ **Euclide étendu en Python** — On considère la fonction suivante.

```
def bezout(a, b):
    u0, v0, u1, v1 = 1, 0, 0, 1
    while b != 0:
        q = a // b
        a, b = b, a % b
        u0, u1 = u1, u0 - q * u1
        v0, v1 = v1, v0 - q * v1
    return a, u0, v0
```

(a) On appelle `bezout(162, 70)`. Complète le tableau des valeurs après chaque passage dans la boucle.

passage	a	b	u0	v0
départ	162	70	1	0
1	…	…	…	…
2	…	…	…	…
3	…	…	…	…
4	…	…	…	…

(b) Qu'affiche `print(bezout(162, 70))` ? Écris l'égalité de Bézout obtenue et vérifie-la.

(c) Déduis-en un couple d'entiers $(x\,;y)$ tel que $81x + 35y = 1$. Que peux-tu dire de 81 et 35 ?

(d) Déduis-en un couple d'entiers $(x\,;y)$ tel que $162x + 70y = 14$. Existe-t-il des entiers x, y tels que $162x + 70y = 15$? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **PGCD de deux expressions en n : un diviseur de 11** — Pour tout entier naturel n, on pose $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 2$. On note $d = \text{PGCD}(a\,;b)$.

(a) Calcule $5a - 2b$. Malik en déduit que $d = 11$ pour tout entier naturel n. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Déduis-en les valeurs possibles de d.

(c) Démontre que si $11 \mid 2n + 3$, alors $11 \mid n - 4$. Tu pourras calculer $6(2n + 3) - 11(n + 2)$.

(d) Déduis-en l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $d = 11$.

(e) La fraction $\frac{2n+3}{5n+2}$ est-elle irréductible pour $n = 2\,026$? Pour $n = 2\,028$? Sinon, simplifie-la.

Ex. 27 ★★★ **Euclide étendu, signes et couples de Bézout** — On s'intéresse aux entiers 281 et 76.

(a) Complète le tableau de l'algorithme d'Euclide ($a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$), puis donne $\text{PGCD}(281\,;76)$.

a	b	q	r
281	76	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

Ex. 27 (suite)

(b) Remonte l'algorithme pour obtenir un couple $(u\,;v)$ d'entiers tel que $281u + 76v = 1$. Vérifie ton résultat.

(c) Lucas affirme que ce couple est le seul possible. A-t-il raison ? Justifie, puis donne un couple solution dont le premier terme est strictement négatif.

(d) Déduis-en un couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels tel que $76x - 281y = 1$.

(e) On exécute le programme suivant. Qu'affiche-t-il ? Justifie qu'il n'affiche qu'une seule ligne.

```
for x in range(281):
    if (76 * x - 1) % 281 == 0:
        print(x, (76 * x - 1) // 281)
```

Ex. 28 ★★★ **Démontrer avec Bézout : ab et a + b** — Dans les questions a) à c), a et b sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

(a) Justifie qu'il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$, puis démontre que a et $a + b$ sont premiers entre eux.

(b) Soit c un entier premier avec a et avec b. En multipliant deux égalités de Bézout, démontre que c et ab sont premiers entre eux.

(c) On admet que b et $a + b$ sont aussi premiers entre eux. Déduis-en que ab et $a + b$ sont premiers entre eux.

(d) Pour tout entier naturel n non nul, démontre que la fraction $\frac{2n+1}{n^2+n}$ est irréductible.

(e) Zoé affirme : « 14 et 25 ne sont pas premiers, donc 350 et 39 ne sont pas premiers entre eux. » A-t-elle raison ? Justifie.

5. *Théorème de Gauss et équations $ax + by = c$*

À retenir : Gauss : $a \mid bc$ et $\text{PGCD}(a\,;b) = 1 \Rightarrow a \mid c$. $ax + by = c$ a des solutions $\Leftrightarrow d = \text{PGCD}(a\,;b) \mid c$; on divise par d, puis $x = x_0 + \frac{b}{d}k$, $y = y_0 - \frac{a}{d}k$. Piège : $6 \mid n$ et $9 \mid n$ ne donnent pas $54 \mid n$.

Ex. 29 ★☆☆ **Appliquer Gauss et son corollaire** — Dans chaque cas, n est un entier. Justifie chaque conclusion, en vérifiant les hypothèses du théorème utilisé.

(a) On sait que $13 \mid 8n$. Que peux-tu en déduire pour n ?

(b) On sait que $15 \mid 4(n - 3)$. Donne la forme générale des entiers n concernés.

(c) On sait que $14 \mid 6n$. Peut-on en déduire que $14 \mid n$? Que peut-on déduire à la place ?

(d) n est divisible par 9 et par 10. Par quel entier plus grand n est-il forcément divisible ?

(e) Vrai ou faux ? « Si $8 \mid n$ et $12 \mid n$, alors $96 \mid n$. » Justifie, puis donne un diviseur de n plus grand que 12 que ces deux hypothèses garantissent.

Ex. 30 ★☆☆ **Des solutions ou pas ?** — Pour chaque équation d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, dis si elle admet des solutions. Si oui, écris l'équation équivalente obtenue en divisant par le PGCD des coefficients.

(a) $21x + 35y = 49$ (b) $18x + 42y = 15$

(c) $26x - 39y = 65$ (d) $45x + 75y = 40$

(e) $22x + 15y = 7$

Ex. 31 ★★☆ **Résolution complète avec Bézout** — On considère l'équation (E) : $34x + 24y = 6$, d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Justifie que (E) admet des solutions et écris l'équation simplifiée (E') qui lui est équivalente.

(b) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouve une relation de Bézout entre 17 et 12, puis déduis-en une solution particulière de (E').

(c) Résous (E') dans $\mathbb{Z}^2$ en utilisant le théorème de Gauss.

(d) Détermine la solution de (E) telle que $0 \leqslant x < 12$.

(e) Léo propose $x = 15 + 17k$, $y = -21 - 12k$. Teste sa proposition avec $k = 1$ et explique son erreur.

Ex. 32 ★★☆ **Miel et confiture au marché** — Au marché de Colmar, Inès achète des pots de miel à 9 € et des pots de confiture à 7 €. Elle dépense exactement 100 €. On note x le nombre de pots de miel et y le nombre de pots de confiture.

(a) Justifie que l'équation $9x + 7y = 100$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$, puis trouve une solution particulière avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.

(b) Résous l'équation $9x + 7y = 100$ dans $\mathbb{Z}^2$.

(c) Déduis-en tous les achats possibles pour Inès.

(d) Inès a acheté au moins autant de pots de miel que de pots de confiture. Combien de pots de chaque sorte a-t-elle achetés ?

Ex. 33 ★★★ **Restes imposés (type bac)** — On cherche les entiers relatifs N dont la division euclidienne par 19 a pour reste 4, et dont la division euclidienne par 12 a pour reste 7.

(a) Démontre que N convient si et seulement si $N = 19x + 4 = 12y + 7$, où $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de (E) : $19x - 12y = 3$.

(b) Avec l'algorithme d'Euclide, trouve deux entiers u et v tels que $19u + 12v = 1$. Déduis-en une solution particulière de (E).

(c) Résous (E) dans $\mathbb{Z}^2$. Justifie l'usage du théorème de Gauss et vérifie la réciproque.

(d) Déduis-en l'expression des entiers N cherchés, puis le plus petit entier naturel qui convient.

(e) Détermine tous les entiers N qui conviennent et qui vérifient $1\,000 \leqslant N \leqslant 2\,000$.

Ex. 34 ★★★ **Billetterie du musée de Nantes** — Au musée de Nantes, un billet adulte coûte 14 € et un billet enfant coûte 8 €. Pour un groupe, on note x le nombre de billets adultes et y le nombre de billets enfants vendus.

(a) Un jour, la caissière annonce une recette de 225 € pour un groupe. Démontre qu'elle s'est trompée.

(b) Un autre groupe paie 222 €. Écris l'équation (E) vérifiée par $(x\,;y)$, puis une équation (E') équivalente dont les coefficients sont premiers entre eux.

(c) Résous (E') dans $\mathbb{Z}^2$: donne une solution particulière, applique le théorème de Gauss, puis vérifie la réciproque.

(d) Hugo affirme que les solutions de (E') sont les couples $(9 + 8k\,;12 - 14k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Détermine toutes les compositions possibles du groupe, puis celle où il y a plus d'adultes que d'enfants.

Ex. 35 ★★★ **Racines rationnelles d'un polynôme** — On considère l'équation (E) : $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$. On suppose qu'un rationnel $\frac{p}{q}$ est solution de (E), avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$.

(a) Démontre que $3p^3 + p^2q + pq^2 = 2q^3$. Déduis-en que $p \mid 2q^3$ et que $q \mid 3p^3$.

(b) En appliquant plusieurs fois le théorème de Gauss, démontre que $p \mid 2$ et que $q \mid 3$.

(c) Déduis-en la liste des rationnels qui peuvent être solutions de (E), puis détermine toutes les solutions rationnelles de (E).

(d) Écris une solution de (E) sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \nmid 2$. Explique quelle hypothèse du théorème de Gauss n'est alors plus vérifiée.

6. *Nombres premiers : test, infinité, décomposition, PGCD et PPCM*

À retenir : Premier : tester les p premiers tels que $p^2 \leqslant n$; 1 n'est pas premier. $n = p^a q^b$ a $(a+1)(b+1)$ diviseurs ($12 = 2^2 \times 3$: 6). PGCD : plus petits exposants (absent : 0) ; PPCM : plus grands ; PGCD × PPCM = ab.

Ex. 36 ★☆☆ **Tester la primalité, utiliser le crible** — Pour décider si un entier $n \geqslant 2$ est premier, il suffit de tester les nombres premiers p tels que $p^2 \leqslant n$.

(a) Le nombre 1 est-il premier ? Justifie.

(b) Encadre 263 entre deux carrés consécutifs, puis décide si 263 est premier.

(c) Écris 391 comme une différence de deux carrés, puis déduis-en si 391 est premier.

(d) Théo teste 527 avec 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Aucun ne divise 527, donc il conclut que 527 est premier. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 36 **(suite)**

(e) Inès dit : « Pour tester 409, je dois essayer tous les entiers jusqu'à 204. » Corrige sa méthode, puis décide si 409 est premier.

(f) Tu appliques le crible d'Ératosthène aux entiers de 2 à 200. À partir de quel nombre commences-tu à barrer les multiples de 11 ? Justifie.

(g) Dans ce même crible jusqu'à 200, quel est le dernier nombre premier dont tu dois barrer les multiples ? Justifie.

Ex. 37 ★☆☆ **Décomposer, compter les diviseurs, carrés parfaits**

(a) Décompose 1 008 en produit de facteurs premiers.

(b) Déduis-en le nombre de diviseurs positifs de 1 008.

(c) Décompose 2 310 en facteurs premiers et donne son nombre de diviseurs positifs.

(d) Combien 1 008 a-t-il de diviseurs positifs impairs ? Donne-les.

(e) 1 008 est-il un carré parfait ? Justifie.

(f) Détermine le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $1\,008k$ soit un carré parfait, et précise de quel entier c'est le carré.

(g) Combien $1\,008k$ a-t-il de diviseurs positifs ? Explique pourquoi ce nombre est impair.

Ex. 38 ★★☆ **PGCD et PPCM par les décompositions** — On considère les entiers $a = 2\,200$ et $b = 480$.

(a) Décompose a et b en produits de facteurs premiers.

(b) Malik écrit : « $\text{PGCD}(a\,;b) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$, car je prends le plus petit exposant de chaque facteur qui apparaît. » Explique son erreur, puis calcule $\text{PGCD}(a\,;b)$.

(c) Déduis-en $\text{PPCM}(a\,;b)$ avec la relation entre PGCD, PPCM et ab. Contrôle ensuite ton résultat avec les décompositions.

(d) Détermine le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que $2\,200m$ soit un multiple de 480. Justifie.

(e) Combien a et b ont-ils de diviseurs positifs communs ? Donne-les.

Ex. 39 ★★☆ **Une infinité de nombres premiers** — On suppose, par l'absurde, qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers : $p_1, p_2, \ldots, p_k$. On pose $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$.

(a) Justifie que $N \geqslant 2$, puis que N admet au moins un diviseur premier p.

(b) Démontre que p n'est égal à aucun des p_i.

(c) Conclus le raisonnement par l'absurde.

(d) Lina affirme : « La preuve montre que $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$ est premier. » Calcule ce nombre et divise-le par 59. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 39 **(suite)**

(e) Démontre que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $n! + 1$ a un diviseur premier $p > n$. Vérifie-le pour $n = 5$.

Ex. 40 ★★★ **Expressions en n : premières ou non ?** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel.

(a) Factorise $n^2 - 1$. Déduis-en tous les entiers naturels n pour lesquels $n^2 - 1$ est premier.

(b) Démontre que $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.

(c) Démontre que $n^4 + 4$ est premier si et seulement si $n = 1$.

(d) Calcule $7^4 + 4$, puis donne sa décomposition en facteurs premiers. Justifie que chaque facteur obtenu est premier.

(e) Que renvoie `premier(1)` ? Corrige la fonction. Explique pourquoi il suffit de tester les `d` tels que `d * d <= n`, et pas tous les `d` jusqu'à `n // 2`.

```
def premier(n):
    d = 2
    while d * d <= n:
        if n % d == 0:
            return False
        d = d + 1
    return True
```

Ex. 41 ★★★ **Entiers à nombre de diviseurs imposé** — On rappelle que si $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_r^{a_r}$ (décomposition en facteurs premiers), alors n a $(a_1 + 1) \times \cdots \times (a_r + 1)$ diviseurs positifs.

(a) Yanis affirme : « $56 = 2^3 \times 7$ a $3 \times 1 = 3$ diviseurs positifs. » Corrige son erreur, puis donne la liste des diviseurs positifs de 56.

(b) Détermine toutes les formes possibles de la décomposition en facteurs premiers d'un entier qui a exactement 12 diviseurs positifs.

(c) Déduis-en le plus petit entier naturel qui a exactement 12 diviseurs positifs. Justifie.

(d) Détermine tous les entiers $n = 2^a \times 3^b$, avec a et b entiers naturels, qui ont exactement 9 diviseurs positifs. Justifie qu'ils sont tous des carrés parfaits.

(e) Démontre qu'un entier $n \geqslant 2$ a un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement si n est un carré parfait.

Ex. 42 ★★★ **Retrouver deux entiers à partir de leur PGCD et de leur PPCM** — On cherche des couples d'entiers naturels non nuls dont on connaît le PGCD et le PPCM.

(a) Soit $a = 2^4 \times 3 \times 7^2$ et $b = 2^2 \times 3^3 \times 5$. Calcule $\text{PGCD}(a\,;b)$ et $\text{PPCM}(a\,;b)$, en écrivant d'abord a et b avec les mêmes facteurs premiers.

(b) Démontre que pour tous entiers naturels non nuls a et b, on a $\text{PGCD}(a\,;b) \times \text{PPCM}(a\,;b) = ab$.

Ex. 42 **(suite)**

(c) On cherche $a \leqslant b$ tels que $\text{PGCD}(a\,;b) = 18$ et $\text{PPCM}(a\,;b) = 1\,260$. On pose $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Justifie que a' et b' sont premiers entre eux et calcule $a'b'$.

(d) Déduis-en tous les couples $(a\,;b)$ cherchés.

(e) Nora affirme : « Il existe deux entiers de PGCD 18 et de PPCM 1 000. » A-t-elle raison ? Justifie.

7. *Petit théorème de Fermat*

À retenir : Si p est premier et $p \nmid a$: $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$; pour tout a : $a^p \equiv a\ [p]$. On divise l'exposant par $p-1$: $2^{45} \equiv 2^5\ [11]$. Module non premier : le théorème ne s'applique pas. Réciproque fausse.

Ex. 43 ★☆☆ **Restes de grandes puissances** — Vérifie les hypothèses du petit théorème de Fermat, puis détermine le reste de la division euclidienne.

(a) Reste de 2^{150} modulo 13.

(b) Reste de 5^{243} modulo 11.

(c) Reste de 2^{500} modulo 17.

(d) Reste de 6^{2026} modulo 19.

(e) Reste de 3^{1000} modulo 23.

Ex. 44 ★☆☆ **Le théorème s'applique-t-il ?** — Pour chaque calcul, dis si le petit théorème de Fermat s'applique et sous quelle forme. Justifie, puis donne le reste.

(a) Reste de 4^{16} modulo 17.

(b) Reste de 10^{14} modulo 15.

(c) Reste de 22^{10} modulo 11.

(d) Reste de 5^{23} modulo 23.

(e) Reste de 2^{20} modulo 21.

(f) Reste de 9^{28} modulo 29.

Ex. 45 ★★☆ **Trois élèves, trois affirmations** — Pour chaque élève, repère l'éventuelle erreur, justifie, puis donne une conclusion correcte.

(a) Pour le reste de 3^{200} modulo 11, Léa écrit : « $200 = 11 \times 18 + 2$, donc $3^{200} \equiv 3^2 = 9\ [11]$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Sachant que $2^{560} \equiv 1\ [561]$, Malik conclut que 561 est premier. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Nora affirme : « 11 est premier, donc pour tout entier n, $n^{10} \equiv 1\ [11]$. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Un diviseur commun à tous les $n^7 - n$** — Soit n un entier. On étudie la divisibilité de $N = n^7 - n$.

(a) Démontre que 7 divise N pour tout entier n.

(b) En utilisant $n^3 \equiv n\ [3]$, démontre que 3 divise N pour tout entier n.

(c) Démontre que 2 divise N pour tout entier n.

(d) Déduis-en un entier $d > 7$ qui divise N pour tout entier n. Vérifie avec $n = 2$ et $n = 3$.

Ex. 47 ★★★ **Un faux premier : 341** — On dit qu'un entier a est un témoin pour n si $n \nmid a$ et si $a^{n-1} \not\equiv 1\ [n]$. Un témoin prouve que n n'est pas premier.

(a) Décompose 341 en facteurs premiers.

(b) Calcule 2^{10}, puis le reste de la division euclidienne de 2^{10} par 341.

(c) Déduis-en le reste de la division euclidienne de 2^{340} par 341.

(d) Hugo a trouvé ce reste. Il affirme : « D'après le petit théorème de Fermat, 341 est donc premier. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Avec le petit théorème de Fermat modulo 31, calcule le reste de 3^{340} modulo 31. Déduis-en que 3 est un témoin pour 341.

Ex. 48 ★★★ **Les diviseurs de $n^{17} - n$** — Pour tout entier naturel n, on pose $N = n^{17} - n$.

(a) Démontre que $17 \mid N$ pour tout entier naturel n, y compris lorsque $17 \mid n$.

(b) Soit $p \in \{2\,;3\,;5\}$. Démontre que $p \mid N$: traite d'abord le cas $p \nmid n$, puis le cas $p \mid n$.

(c) Déduis-en un entier d supérieur à 17 qui divise N pour tout entier naturel n. Justifie.

(d) Calcule N pour $n = 2$. Déduis-en que 4 ne divise pas N pour tout entier naturel n.

(e) Ana affirme : « Par le même raisonnement, $7 \mid N$ pour tout entier naturel n. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 49 ★★★ **Quels premiers divisent $2^p + 1$?** — On cherche les nombres premiers p tels que $p \mid 2^p + 1$. Inès écrit ce programme :

```
def premier(n):
    if n < 2:
        return False
    d = 2
    while d * d <= n:
        if n % d == 0:
            return False
        d = d + 1
    return True

for p in range(2, 60):
    if premier(p) and (2**p + 1) % p == 0:
        print(p)
```

(a) Explique pourquoi la fonction `premier` peut s'arrêter dès que `d * d > n`.

Ex. 49 **(suite)**

(b) Soit p un nombre premier. Démontre que $p \mid 2^p + 1$ si et seulement si $p \mid 3$.

(c) Déduis-en tous les nombres premiers p tels que $p \mid 2^p + 1$, puis ce qu'affiche le programme.

(d) Mila remplace le test par `(3**p + 5) % p == 0`. Elle pense que l'affichage ne change pas. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Tom affirme : « Pour tout nombre premier p, $p \mid 2^{p-1} - 1$. » Vrai ou faux ? Justifie.