1. Multiples et diviseurs : le vocabulaire

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : divisible ou pas ?**

(a) $96 = 8 \times 12 + 0$: le reste est 0, donc 96 est divisible par 8.

(b) $79 = 6 \times 13 + 1$: le reste est 1, donc 79 n'est pas un multiple de 6.

(c) $143 = 11 \times 13 + 0$: le reste est 0, donc 11 est un diviseur de 143.

(d) $15 = 45 \times 0 + 15$: le reste est 15, donc 15 n'est pas divisible par 45. C'est 45 qui est divisible par 15.

(e) $0 = 9 \times 0 + 0$: le reste est 0, donc 9 est un diviseur de 0 (0 est un multiple de 9).

(f) $37 = 37 \times 1 + 0$: le reste est 0, donc 37 est un multiple de lui-même.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : listes de multiples et de diviseurs**

(a) 0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48 ; 56.

(b) 0 ; 13 ; 26 ; 39 ; 52.

(c) $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$, donc : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.

(d) $17 = 1 \times 17$ et aucun autre produit ne convient, donc : 1 ; 17.

(e) $9 \times 12 = 108$, donc le multiple cherché est 108.

(f) $7 \times 12 = 84$ et $7 \times 13 = 91$, qui dépasse 90. Le nombre cherché est 84.

Ex. 3 ★★☆ **Une égalité, trois phrases**

(a) 112 est divisible par 7 ; 112 est un multiple de 7 ; 7 est un diviseur de 112.

(b) 112 est divisible par 16 ; 112 est un multiple de 16 ; 16 est un diviseur de 112.

(c) Non. Comme $112 = 7 \times 16$, c'est 112 qui est un multiple de 7, et 7 est un diviseur de 112. Multiple et diviseur vont en sens inverse.

(d) $112 = 16 \times 7 + 0$: le quotient est 7 et le reste est 0.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Vrai : $0 = 25 \times 0$, donc 0 est dans la table de 25.

(b) Faux : un nombre multiplié par 0 donne toujours 0, jamais 25. 0 n'est le diviseur d'aucun nombre.

(c) Vrai : $4\,519 = 1 \times 4\,519$. 1 est un diviseur de tous les nombres.

(d) Faux : $18 = 36 \times 0 + 18$. Le reste est 18, pas 0. C'est 36 qui est divisible par 18, car $36 = 18 \times 2$.

(e) Vrai : $53 = 53 \times 1$, donc 53 est un multiple de 53 et 53 est un diviseur de 53.

Ex. 5 ★★☆ **La liste de Yanis**

(a) $40 = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10 = 5 \times 8$. Les diviseurs de 40 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 40.

(b) Il a oublié 1 et 40, car $40 = 1 \times 40$: 1 et le nombre lui-même sont toujours des diviseurs.

(c) Il faut écrire : « 8 est un diviseur de 40 » ou « 40 est un multiple de 8 », car $40 = 8 \times 5$.

(d) $40 = 3 \times 13 + 1$: le reste est 1, pas 0.
Donc 3 n'est pas un diviseur de 40 : Yanis a raison.

Ex. 6 ★★★ **La copie de Théo**

(a) Le début est juste, la suite est fausse. $184 = 8 \times 23 + 0$: le reste est 0.
Donc 184 est un multiple de 23 ET de 8.

(b) Juste. $184 = 23 \times 8 + 0$: le reste est 0. « 23 est un diviseur de 184 » et « 184 est divisible par 23 » veulent dire la même chose.

(c) Le début est juste : $184 = 8 \times 23 + 0$. La suite est fausse : $184 = 16 \times 11 + 8$, le reste vaut 8, pas 0.
Donc 184 n'est pas divisible par 16.

(d) Le début est juste : $0 = 184 \times 0$, donc 0 est un multiple de 184. La suite est fausse : un nombre multiplié par 0 donne toujours 0, jamais 184.
Donc 0 n'est pas un diviseur de 184
(on ne divise jamais par 0).

(e) Le début est juste : $184 = 1 \times 184$, donc 1 est un diviseur de 184. La suite est fausse : $184 = 184 \times 1 + 0$, le reste est 0, donc 184 est un diviseur de 184. Un nombre est toujours un diviseur de lui-même.

Ex. 7 ★★★ **Les devinettes d'Inès**

(a) $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$. Les diviseurs de 45 sont 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45. Parmi eux, les multiples de 3 sont 3 ; 9 ; 15 ; 45. Un seul est compris entre 10 et 20 : c'est 15 ($15 = 3 \times 5$).

(b) Le nombre est un multiple de 9 : 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72. Diviseurs de 72 : $72 = 9 \times 8 = 18 \times 4 = 36 \times 2 = 72 \times 1$, mais $72 = 27 \times 2 + 18$ (et 45, 54, 63 ne conviennent pas non plus). Plus grands que 20 : il y a deux solutions, 36 et 72. Attention, 72 est un diviseur de lui-même.

(c) 0 convient, car $0 = 7 \times 0$, $0 = 2 \times 0 \ldots$: 0 est un multiple de tous les nombres. Aucun autre ne convient. Par exemple $1 = 2 \times 0 + 1$, donc 1 n'est pas un multiple de 2. De même, 2 et 4 ne sont pas des multiples de 3, et 3 n'est pas un multiple de 2. La seule réponse est 0.

(d) $56 = 1 \times 56 = 2 \times 28 = 4 \times 14 = 7 \times 8$, donc les diviseurs de 56 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56. $28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$, donc les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28. Il reste 8 et 56 (par exemple $28 = 8 \times 3 + 4$). Plus petit que 50 : c'est 8.

(e) $35 = 1 \times 35 = 5 \times 7$, donc les diviseurs de 35 sont 1 ; 5 ; 7 ; 35. On les teste sur 58 : $58 = 5 \times 11 + 3$, $58 = 7 \times 8 + 2$ et $58 = 35 \times 1 + 23$. Seul 1 convient, car 1 est un diviseur de tous les nombres. La réponse est 1.

Ex. 8 ★★★ **Les chaises du spectacle**

(a) $80 = 1 \times 80 = 2 \times 40 = 4 \times 20 = 5 \times 16 = 8 \times 10$. 3, 6, 7 et 9 ne conviennent pas ($80 = 3 \times 26 + 2$, $80 = 6 \times 13 + 2$, $80 = 7 \times 11 + 3$, $80 = 9 \times 8 + 8$), et 10 est déjà trouvé. Diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 16 ; 20 ; 40 ; 80. Il y a donc 10 rangements possibles.

(b) Entre 12 et 18, le seul diviseur de 80 est 16. $80 = 16 \times 5$: Nora met 16 chaises par rangée et obtient 5 rangées.

(c) $87 = 16 \times 5 + 7$ (et $7 < 16$). On obtient 5 rangées complètes, et il reste 7 chaises.

(d) Le multiple de 16 qui suit 87 est $96 = 16 \times 6$. Il faut ajouter au moins $96 - 87 = 9$ chaises.

(e) Elle a tort. $87 = 1 \times 87$: on peut faire 1 rangée de 87 chaises, ou 87 rangées de 1 chaise. Et $87 = 3 \times 29$ (la division $87 \div 3$ donne 29, il reste 0) : 3 rangées de 29, ou 29 rangées de 3. Ne pas être divisible par 2 ni par 5 n'empêche pas d'avoir d'autres diviseurs.

2. *Trouver des multiples, trouver tous les diviseurs*

Ex. 9 ★☆☆ **Listes de multiples**

(a) 0 ; 11 ; 22 ; 33 ; 44
(la liste commence à $11 \times 0 = 0$).

(b) 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48
($12 \times 5 = 60$ n'est pas inférieur à 60).

(c) 56 ; 64 ; 72 ; 80 ; 88 ; 96
($8 \times 6 = 48$ est trop petit et $8 \times 13 = 104$ est trop grand).

(d) $25 \times 4 = 100$ est trop petit et $25 \times 9 = 225$ est trop grand. Les multiples sont 125 ; 150 ; 175 ; 200 : il y en a 4.

(e) $15 \times 6 = 90$ est trop petit et $15 \times 7 = 105$: la réponse est 105.

(f) Il en a une infinité : 13×0, 13×1, $13 \times 2 \ldots$ La liste ne s'arrête jamais.

Ex. 10 ★☆☆ **Tous les diviseurs d'un nombre**

(a) $28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$. Diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28.

(b) $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$.
Diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36
(6 écrit une seule fois).

(c) Seul $43 = 1 \times 43$ convient. Il a 2 diviseurs : 1 ; 43.

(d) $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$. Diviseurs : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45, soit 6 diviseurs.

(e) $50 = 1 \times 50 = 2 \times 25 = 5 \times 10$. Diviseurs : 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50.

Ex. 11 ★★☆ **Les listes des élèves**

(a) Inès a oublié 1 et 30 ($30 = 1 \times 30$). La bonne liste : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30, soit 8 diviseurs.

(b) Malo s'est arrêté trop tôt après 4 : il manque $40 = 5 \times 8$. La bonne liste : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 40.

(c) Lucie a compté 9 deux fois : 9×9 ne donne qu'un seul diviseur. La bonne liste : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81, soit 5 diviseurs.

(d) $44 = 22 \times 2$: 44 est un multiple de 22, pas un diviseur. La bonne liste des diviseurs de 22 : 1 ; 2 ; 11 ; 22.

(e) Elle retrouve 7, qu'elle avait déjà trouvé : elle peut s'arrêter là, la suite ne donne plus rien de nouveau. Diviseurs de 21 : 1 ; 3 ; 7 ; 21.

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Vrai : $0 = 17 \times 0$.
Donc 0 est un multiple de 17.

(b) Faux : $56 = 14 \times 4$. C'est 56 qui est un multiple de 14, et 14 est un diviseur de 56.

(c) Vrai : $253 = 1 \times 253$.
Donc 1 est un diviseur de 253, comme de tous les nombres.

(d) Faux : $54 = 1 \times 54 = 2 \times 27 = 3 \times 18 = 6 \times 9$.
Diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 ; 27 ; 54, soit 8 diviseurs.

(e) Vrai : $100 = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 10 \times 10$, donc 9 diviseurs. $99 = 1 \times 99 = 3 \times 33 = 9 \times 11$, donc 6 diviseurs.

Ex. 13 ★★☆ **Les rangées du gymnase**

(a) $32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$. Diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32.

(b) On enlève 1 et 32 : il reste 4 façons. Elle peut faire 2 rangées de 16, 4 rangées de 8, 8 rangées de 4 ou 16 rangées de 2.

(c) $33 = 1 \times 33 = 3 \times 11$, donc les diviseurs de 33 sont 1 ; 3 ; 11 ; 33. Il reste 2 façons : 3 rangées de 11 ou 11 rangées de 3.

(d) $33 = 5 \times 6 + 3$: le reste vaut 3, pas 0. Elle ne peut pas faire 5 rangées égales.

Ex. 14 ★★★ **Les bus d'Annecy**

(a) Non. $0 = 8 \times 0$, donc 0 est un multiple de 8 : le premier bus A passe à 8 h 00 (minute 0), puis à 8 h 08.

(b) $8 \times 12 = 96$ est trop petit et $8 \times 19 = 152$ est trop grand. Minutes du bus A : 104 ; 112 ; 120 ; 128 ; 136 ; 144.

(c) $12 \times 8 = 96$ est trop petit et $12 \times 13 = 156$ est trop grand. Minutes du bus B : 108 ; 120 ; 132 ; 144.

(d) Les nombres présents dans les deux listes sont 120 et 144. Les deux bus passent ensemble à la minute 120 (10 h 00) et à la minute 144
(10 h 24).

(e) $250 = 8 \times 31 + 2$. Le reste vaut 2, pas 0 : 250 n'est pas un multiple de 8, donc le bus A ne passe pas à la minute 250.

Ex. 15 ★★★ **Beaucoup ou peu de diviseurs**

(a) $144 = 1 \times 144 = 2 \times 72 = 3 \times 48 = 4 \times 36 = 6 \times 24 = 8 \times 18 = 9 \times 16 = 12 \times 12$. 5, 7, 10 et 11 ne conviennent pas ; après 12×12, je m'arrête. Diviseurs de 144 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16 ; 18 ; 24 ; 36 ; 48 ; 72 ; 144.

(b) 144 a 15 diviseurs. Chaque produit donne deux diviseurs, sauf 12×12, qui n'en donne qu'un seul : 12 s'écrit une seule fois.

(c) $37 = 1 \times 37$. $37 = 2 \times 18 + 1$; $37 = 3 \times 12 + 1$; $37 = 4 \times 9 + 1$; $37 = 5 \times 7 + 2$; $37 = 6 \times 6 + 1$. À partir de 7, le quotient serait plus petit que 7 : ces essais sont déjà faits. Diviseurs de 37 : 1 ; 37.

(d) $49 = 1 \times 49 = 7 \times 7$ (les nombres de 2 à 6 ne conviennent pas). Diviseurs de 49 : 1 ; 7 ; 49. 49 a 3 diviseurs, un nombre impair.

Ex. 16 ★★★ **Les crêpes de la kermesse**

(a) Hugo s'est arrêté trop tôt : $48 = 5 \times 9 + 3$, donc 5 ne convient pas, mais $48 = 6 \times 8$, et il a oublié 6 et 8. De plus, sa liste n'est pas rangée dans l'ordre croissant.

(b) Diviseurs de 48 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48. Il y en a 10.

(c) Non. Après 6×8, on essaie 7 : $48 = 7 \times 6 + 6$, il ne convient pas. Puis 8 est déjà trouvé : on s'arrête, les essais suivants donneraient des paires déjà écrites.

(d) Le nombre d'assiettes doit être un diviseur de 48 compris entre 5 et 10 : 6 ou 8. $48 = 6 \times 8$: 6 assiettes de 8 crêpes, ou 8 assiettes de 6 crêpes.

3. *Critère de divisibilité par 2 : nombres pairs et impairs*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : pair ou impair ?**

(a) 5 026 se termine par 6 : il est pair
(même s'il commence par 5).

(b) 70 se termine par 0, et 0 est pair : oui, 70 est divisible par 2.

(c) $4\,869 = 2 \times 2\,434 + 1$: le reste est 1
(4 869 est impair).

(d) 600 412 se termine par 2 : il est pair.

(e) $3\,058 = 2 \times 1\,529 + 0$: le quotient est 1 529 et le reste est 0.

(f) 195 207 se termine par 7 : il est impair, donc 2 n'est pas un diviseur de 195 207.

Ex. 18 ★★☆ **Automatismes : le chiffre manquant**

(a) Le chiffre des unités doit être 0, 2, 4, 6 ou 8 : $\square = 0$; 2 ; 4 ; 6 ; 8, soit cinq possibilités (470 ; 472 ; 474 ; 476 ; 478).

(b) Non : quel que soit $\square$, le chiffre des unités est 5, donc $6\square5$ est toujours impair.

(c) Le chiffre des unités doit être 1, 3, 5, 7 ou 9 : $\square = 1$; 3 ; 5 ; 7 ; 9.

(d) Le chiffre des unités est 4 : le nombre est pair quel que soit $\square$. Comme le nombre a 4 chiffres, $\square$ ne peut pas valoir 0 : $\square = 1$; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

Ex. 19 ★★☆ **Le plus grand, le plus petit**

(a) Le seul chiffre pair est 0 : il va aux unités. On range les autres chiffres du plus grand au plus petit : 7 530.

(b) 0 va aux unités. On range 3 ; 5 ; 7 du plus petit au plus grand : 3 570.

(c) Non. On met 7 en premier. Aux unités, il faut un chiffre impair (5 ou 3). Pour avoir le plus grand nombre, on met le 5 aux centaines, puis 0, puis 3 : 7 503. Il est impair et plus grand que 7 305. Le plus grand nombre impair est 7 503.

(d) 9 421 se termine par 1 : il est impair. Il faut un 2 ou un 4 aux unités : on obtient 9 214 ou 9 412. Le plus grand nombre pair est 9 412.

Ex. 20 ★★☆ **Des nombres pairs qui se suivent**

(a) On ajoute 2 à chaque fois : 2 000 ; 2 002 ; 2 004. Attention, 2 000 se termine par 0 : il est bien pair.

(b) On enlève 2 : $50\,000 - 2 = 49\,998$, qui se termine par 8. C'est le nombre pair juste avant 50 000.

(c) $146 \div 2 = 73$: les deux nombres sont de part et d'autre de 73. Ce sont 72 et 74, car $72 + 74 = 146$.

(d) Les nombres pairs sont 390 ; 392 ; 394 ; 396 ; 398 ; 400. Il y en a 6.

Ex. 21 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux : 80 est pair (car $80 = 2 \times 40$), mais il se termine par 0. Le chiffre 0 est pair lui aussi.

(b) Faux : c'est le chiffre des unités qui compte. 8 053 se termine par 3, donc il est impair.

(c) Faux : 40 507 contient deux fois le chiffre 0, mais il se termine par 7 : il est impair. Le 0 ne compte que s'il est le chiffre des unités.

Ex. 21 (suite)

(d) Vrai : le reste est plus petit que 2, donc c'est 0 ou 1. Si le reste était 0, le nombre serait divisible par 2. Exemple : $37 = 2 \times 18 + 1$.

(e) Vrai : un nombre impair se termine par 1, 3, 5, 7 ou 9. Le nombre suivant se termine alors par 2, 4, 6, 8 ou 0 : il est pair.

Ex. 22 ★★★ **Le nombre mystère à six chiffres**

(a) Non. C'est le chiffre des unités qui compte, pas le premier chiffre. Ici, le chiffre des unités est caché : 784 032 est pair (il se termine par 2) et 714 031 est impair (il se termine par 1). Hugo ne peut donc pas savoir.

(b) Les chiffres plus grands que 6 sont 7, 8 et 9. Le nombre est pair, donc son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Le seul qui convient est 8.

(c) Les trois chiffres cachés sont égaux au chiffre des unités, 8. Le nombre mystère est 784 088.

(d) Les nombres pairs qui se suivent ont 2 d'écart. Juste avant : $784\,088 - 2 = 784\,086$. Juste après : $784\,088 + 2 = 784\,090$, qui est pair car il se termine par 0.

Ex. 23 ★★★ **Chiffres cachés : combien de possibilités ?**

(a) Non. Le chiffre des unités de $4\square6$ est toujours 6, qui est pair : le nombre est pair quel que soit $\square$. Par exemple, 416 et 496 sont pairs, alors que 1 et 9 sont impairs.

(b) Pour être pair, il faut $\square = 0$, 2, 4, 6 ou 8. Pour être divisible par 10, il faudrait $\square = 0$: on retire donc 0. Il reste $\square = 2$; 4 ; 6 ; 8, soit 4 valeurs (262 ; 264 ; 266 ; 268).

(c) Ce sont les nombres pairs de 800 à 898 : 800 ; 802 ; … ; 898. Pour chaque chiffre des dizaines (10 choix), il y a 5 chiffres des unités pairs. Il y a donc $10 \times 5 = 50$ nombres pairs.

(d) Le chiffre des unités est aussi celui des centaines. Il doit être pair (0, 2, 4, 6 ou 8) et le nombre doit dépasser 500, donc il faut 6 ou 8. Les possibilités sont 636 et 838.

Ex. 24 ★★★ **Les dossards du semi-marathon**

(a) Non. C'est le chiffre des unités qui compte, pas le premier. 4 107 se termine par 7 : il est impair. Sofiane part à 9 h 15.

(b) 5 270 se termine par 0, et 0 est un chiffre pair : le dossard est pair. Clara part à 9 h.

Ex. 24 **(suite)**

(c) De 1 à 9 000, les nombres sont impair, pair, impair, pair… en alternance. On peut les grouper par deux (1 et 2, 3 et 4, …) : il y a autant de pairs que d'impairs. $9\,000 \div 2 = 4\,500$.
Donc 4 500 coureurs partent à 9 h.

(d) Le numéro du milieu a 2 de plus que le premier et 2 de moins que le troisième. La somme vaut donc trois fois le numéro du milieu : $7\,230 \div 3 = 2\,410$. Les dossards sont 2 408 ; 2 410 ; 2 412
(vérification : $2\,408 + 2\,410 + 2\,412 = 7\,230$).

4. *Critères de divisibilité par 5 et par 10*

Ex. 25 ★☆☆ **Le chiffre des unités décide**

(a) Non : son chiffre des unités est 5, pas 0. Il est divisible par 5, mais pas par 10.

(b) Non : il commence par 5, mais son chiffre des unités est 3.

(c) Oui, il est divisible par 5 (chiffre des unités 0). Il n'est pas impair : 0 est un chiffre pair, donc 8 470 est pair.

(d) Divisible par 5 : oui (chiffre des unités 5). Divisible par 10 : non
(chiffre des unités différent de 0).

(e) Oui : son chiffre des unités est 0.

(f) Non : son chiffre des unités est 2
(le 5 et le 0 ne sont pas à la place des unités).

Ex. 26 ★☆☆ **Diviser par 10 : quotient et reste**

(a) $5\,829 = 10 \times 582 + 9$: quotient 582, reste 9.

(b) $908 = 10 \times 90 + 8$: quotient 90, reste 8.

(c) Le reste est 6, le chiffre des unités :
$72\,316 = 10 \times 7\,231 + 6$.

(d) Le reste est 0 : $31\,250 = 10 \times 3\,125 + 0$.
Donc 31 250 est divisible par 10.

(e) Non : $10 \times 600 + 4 = 6\,004$, pas 60 004. La bonne division est $60\,004 = 10 \times 6\,000 + 4$: quotient 6 000, reste 4.

(f) $10 \times 86 + 3 = 863$. Le nombre est 863.

Ex. 27 ★★☆ **Tableau à double condition**

(a)

Nombre	6 315	2 490	9 562	40 005
Divisible par 2	non	oui	oui	non
Divisible par 5	oui	oui	non	oui
Divisible par 10	non	oui	non	non

(b) 6 315 et 40 005 : ils se terminent par 5, donc ils sont divisibles par 5 mais pas par 10.

(c) Non : 2 490 se termine par 0, qui est un chiffre pair. Il est divisible par 5 et il est pair.

(d) Divisible par 2 : unités 0, 2, 4, 6 ou 8. Divisible par 5 : unités 0 ou 5. Le seul chiffre commun est 0 : le nombre est donc divisible par 10.

Ex. 28 ★★☆ **Chiffre manquant**

(a) Divisible par 5 : $\square = 0$ ou 5. Pas par 2 : il doit être impair, donc $\square = 5$. Le nombre est 735.

(b) Le chiffre des unités est déjà 0 : le nombre est divisible par 10 quel que soit $\square$. Tous les chiffres de 0 à 9 conviennent
(500 ; 510 ; … ; 590).

(c) Divisible par 2 et par 5, donc par 10 : $\square = 0$. Le nombre est 1 840.

(d) Impossible : le chiffre des unités est 5, pas 0. Aucun chiffre ne convient.

Ex. 29 ★★☆ **Les tickets de la tombola**

(a) Le premier nombre qui se termine par 0 à partir de 40 987 est 40 990.

(b) Les multiples de 10 vont de 40 990 à 41 060 : 40 990 ; 41 000 ; 41 010 ; … ; 41 060. Cela fait 8 tickets.

(c) Ils se terminent par 5 : 40 995 ; 41 005 ; 41 015 ; … ; 41 055. Cela fait 7 tickets.

(d) Non : seul le dernier chiffre compte, et c'est 5. 41 005 est divisible par 5 mais pas par 10 : Tom gagne une peluche.

Ex. 30 ★★★ **Les affirmations de Yanis**

(a) Faux. Le chiffre des unités de 6 015 est 5, pas 0 : $6\,015 = 10 \times 601 + 5$. Il est divisible par 5, mais pas par 10.

(b) Faux. C'est le dernier chiffre qui compte, pas le premier : le chiffre des unités de 50 213 est 3, ni 0 ni 5. Donc 50 213 n'est pas divisible par 5 : $50\,213 = 5 \times 10\,042 + 3$.

Ex. 30 **(suite)**

(c) Faux. Seul le chiffre des unités compte. 9 050 se termine par 0 : $9\,050 = 10 \times 905$, il est divisible par 10. 9 505 se termine par 5 : $9\,505 = 10 \times 950 + 5$, il est divisible par 5 mais pas par 10.

(d) Vrai. Le chiffre des unités de 46 800 est 0.
Donc $46\,800 = 10 \times 4\,680$: 10 est un diviseur de 46 800.
Et $46\,800 = 5 \times 9\,360$: 46 800 est un multiple de 5.

(e) Faux. Un reste doit être plus petit que le diviseur 5, donc 6 est impossible. On a $80\,346 = 5 \times 16\,069 + 1$: le reste est 1. C'est dans la division par 10 que le reste est 6 : $80\,346 = 10 \times 8\,034 + 6$.

Ex. 31 ★★★ **Quatre chiffres, quatre défis**

(a) Pour être divisible par 10, le chiffre des unités doit être 0. On range les autres chiffres du plus grand au plus petit : 8 530. Le plus grand nombre divisible par 10 est 8 530.

(b) Divisible par 5 mais pas par 10 : le chiffre des unités doit être 5 (pas 0). Le premier chiffre ne peut pas être 0, donc on met le plus petit autre chiffre, 3, puis 0, puis 8 : 3 085. Le nombre cherché est 3 085.

(c) Pair mais pas divisible par 5 : le chiffre des unités est pair sans être 0, donc c'est 8. On range les autres chiffres du plus grand au plus petit : 5 308. Attention, il commence par 5 mais n'est pas divisible par 5 : $5\,308 = 5 \times 1\,061 + 3$.

(d) Le chiffre des unités est 0 ; les chiffres 3, 5 et 8 se placent devant de $3 \times 2 \times 1 = 6$ façons : 3 580 ; 3 850 ; 5 380 ; 5 830 ; 8 350 ; 8 530. On peut écrire 6 nombres divisibles par 10.

Ex. 32 ★★★ **La coopérative d'œufs de Rodez**

(a) $3\,746 = 10 \times 374 + 6$ avec $6 < 10$. Elle obtient 374 boîtes pleines et il reste 6 œufs
(le reste est le chiffre des unités).

(b) Le plus petit multiple de 10 après 3 746 est 3 750, et $3\,750 - 3\,746 = 4$. Il faut ajouter au minimum 4 œufs.

(c) $3\,746 = 5 \times 749 + 1$ avec $1 < 5$. Elle obtient 749 boîtes pleines et il reste 1 œuf. Ici, le reste n'est pas le chiffre des unités : 6 n'est pas plus petit que 5.

(d) Non : le chiffre des unités de 3 746 est 6, il est pair, donc 3 746 est divisible par 2. Il ne reste aucun œuf.

Ex. 32 **(suite)**

(e) Divisible par 2 et par 5, donc par 10 : le chiffre des unités est 0. Le chiffre des dizaines est 6, et le nombre est entre 3 746 et 3 790 : c'est 3 760. Elle a reçu 3 760 œufs.

5. *Utiliser la division euclidienne pour tester une divisibilité*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : quotient et reste**

(a) $59 = 6 \times 9 + 5$.

(b) $86 = 7 \times 12 + 2$.

(c) $140 = 12 \times 11 + 8$: quotient 11, reste 8.

(d) $15 \times 6 + 4 = 90 + 4 = 94$.

(e) $213 = 25 \times 8 + 13$: le reste est 13.

(f) Non : le reste est toujours plus petit que 8, il vaut au plus 7. Avec un reste de 8, on pourrait encore faire un paquet de 8.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : je lis le reste**

(a) $126 = 7 \times 18 + 0$: le reste est 0, donc oui.

(b) $156 = 8 \times 19 + 4$: le reste n'est pas 0, donc non.

(c) $225 = 15 \times 15 + 0$: le reste est 0, donc oui.

(d) $192 = 12 \times 16 + 0$: le reste est 0, donc oui.

(e) $340 = 25 \times 13 + 15$: le reste n'est pas 0, donc non (finir par 0 ne suffit pas).

(f) $98 = 14 \times 7 + 0$: c'est 98 qui est un multiple de 14, et 14 est un diviseur de 98. 14 est plus petit que 98, ce n'est pas un multiple de 98 : la réponse est non.

Ex. 35 ★★☆ **Repère et corrige l'erreur**

(a) Non : le reste 13 est plus grand que 7, on peut encore faire un paquet de 7. La bonne égalité est $83 = 7 \times 11 + 6$.

(b) Oui. $165 = 15 \times 11 + 0$: le reste est 0, donc 165 est divisible par 15. $165 = 25 \times 6 + 15$: le reste est 15, donc 165 n'est pas divisible par 25.

(c) Non : on pose la division euclidienne à la main : $203 = 7 \times 29 + 0$. Le reste est 0, donc 203 est divisible par 7.

(d) Non : pour savoir si 9 divise 171, on divise 171 par 9 (et pas l'inverse). $171 = 9 \times 19 + 0$: le reste est 0, donc 9 est un diviseur de 171.

Ex. 36 ★★☆ **Le reste pour trouver un multiple**

(a) $130 = 9 \times 14 + 4$. Les multiples de 9 autour sont 126 (à 4) et 135 (à 5). Le plus proche est 126.

(b) $250 = 7 \times 35 + 5$. On retire le reste 5 : $250 - 5 = 245 = 7 \times 35$, multiple de 7.

(c) $410 = 12 \times 34 + 2$. Il manque $12 - 2 = 10$ pour un paquet de plus : $410 + 10 = 420 = 12 \times 35$, multiple de 12.

(d) $610 = 9 \times 67 + 7$. Les multiples autour sont 603 (à 7) et 612 (à 2). Le plus proche est 612.

Ex. 37 ★★☆ **Ça tombe juste ?**

(a) $234 = 12 \times 19 + 6$: on remplit 19 boîtes et il reste 6 œufs. Les œufs ne remplissent pas toutes les boîtes.

(b) $161 = 7 \times 23 + 0$: le reste est 0, donc il y a 23 rangées, toutes complètes.

(c) $100 = 8 \times 12 + 4$: chaque joueur reçoit 12 cartes et il en reste 4.

(d) $200 = 15 \times 13 + 5$: le reste n'est pas 0, 200 n'est pas un multiple de 15. Le bus ne repassera pas au dépôt à la minute 200.

Ex. 38 ★★★ **Les règles inventées**

(a) $147 = 7 \times 21 + 0$: reste 0, 147 est divisible par 7. Mais $257 = 7 \times 36 + 5$: reste 5, 257 n'est pas divisible par 7. La règle de Léo est fausse.

(b) $315 = 15 \times 21 + 0$: 315 est divisible par 15. Mais $215 = 15 \times 14 + 5$: reste 5, 215 n'est pas divisible par 15. La règle de Zoé est fausse.

(c) $96 = 12 \times 8 + 0$: reste 0, donc 96 est divisible par 12, et pourtant il se termine par 6. La règle de Nathan est fausse.

(d) Elle a tort. $70 = 12 \times 5 + 10$: le reste est 10, pas 0. 70 est bien divisible par 2 et par 10, mais il n'est pas divisible par 12 : on ne peut pas inventer un critère pour 12.

(e) Non : pour 7, il n'existe pas de critère avec le chiffre des unités, on pose la division. $175 = 7 \times 25 + 0$: le reste est 0, donc 7 est un diviseur de 175 (et 175 est un multiple de 7).

Ex. 39 ★★★ **La fête du sport à Quimper**

(a) $500 = 15 \times 33 + 5$. Le reste est 5, pas 0 : on forme 33 rangées complètes et 5 élèves restent seuls. 500 n'est pas divisible par 15.

Ex. 39 **(suite)**

(b) Non. L'égalité est juste ($15 \times 32 + 20 = 500$), mais le reste 20 est plus grand que le diviseur 15 : on peut encore former une rangée. La division euclidienne est $500 = 15 \times 33 + 5$.

(c) On retire le reste : $500 - 5 = 495$ et $495 = 15 \times 33 + 0$. Il faut retirer 5 élèves.

(d) Il manque $15 - 5 = 10$ élèves pour une rangée de plus : $500 + 10 = 510$ et $510 = 15 \times 34 + 0$. Il faut ajouter 10 élèves.

(e) $500 = 25 \times 20 + 0$: le reste est 0, donc 500 est divisible par 25. On forme 20 rangées complètes de 25 élèves.

Ex. 40 ★★★ **Le nombre mystère de Ben**

(a) Nombre $= 9 \times 47 + 6 = 423 + 6 = 429$. Le nombre de Ben est 429.

(b) $429 = 9 \times 47 + 6$: le reste est 6, pas 0. Donc 429 n'est pas divisible par 9.

(c) Non : $429 + 6 = 435$ et $435 = 9 \times 48 + 3$, le reste est 3, ce n'est pas un multiple de 9. Le reste, on le retire : $429 - 6 = 423 = 9 \times 47$. Pour ajouter, il faut $9 - 6 = 3$: $429 + 3 = 432 = 9 \times 48$.

(d) Le reste est plus petit que 9 : il va de 0 à 8. Plus petit : $9 \times 47 + 0 = 423$. Plus grand : $9 \times 47 + 8 = 431$. ($432 = 9 \times 48 + 0$ a un quotient de 48.)

(e) Multiples de 25 : 100 ; 125 ; 150 ; 175 ; 200 ; 225 ; 250 ; 275 ; 300. Un multiple de 12 est pair, donc on écarte 125 ; 175 ; 225 ; 275. $100 = 12 \times 8 + 4$; $150 = 12 \times 12 + 6$; $200 = 12 \times 16 + 8$; $250 = 12 \times 20 + 10$; $300 = 12 \times 25 + 0$. Le nombre cherché est 300.

6. *Problèmes de multiples et de diviseurs*

Ex. 41 ★☆☆ **Paquet de plus ou objets laissés ?**

(a) $50 = 6 \times 8 + 2$: il y a 8 boîtes pleines (et 2 œufs restent).

(b) $75 = 8 \times 9 + 3$: 9 minibus ne suffisent pas, il reste 3 élèves. Il faut 10 minibus.

(c) $100 = 7 \times 14 + 2$: chaque joueur a 14 cartes et il reste 2 cartes.

(d) $45 = 4 \times 11 + 1$: 11 tables ne suffisent pas, il faut 12 tables, soit 48 places. Il reste $48 - 45 = 3$ places vides.

(e) $63 = 9 \times 7 + 0$: le reste est 0, donc pas de page en plus. Il faut 7 pages.

Ex. 41 **(suite)**

(f) $125 = 12 \times 10 + 5$: il y a 10 caisses complètes (et 5 bouteilles restent).

Ex. 42 ★☆☆ **Qui suis-je ?**

(a) Multiples de 5 impairs entre 60 et 90 : 65 ; 75 ; 85. Sommes des chiffres : 11 ; 12 ; 13. Je suis 85.

(b) Multiples de 9 entre 40 et 60 : 45 ; 54. Le nombre pair est 54.

(c) Diviseurs de 36 plus grands que 10 : 12 ; 18 ; 36. $12 = 4 \times 3$ et $36 = 4 \times 9$ sont des multiples de 4. Je suis 18.

(d) Candidats : 400 ; 410 ; … ; 490. Seul $440 = 11 \times 40$ est divisible par 11. Je suis 440.

Ex. 43 ★★☆ **La chorale en rangées**

(a) $48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$. Diviseurs de 48 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48.

(b) On élimine 1 rangée, ainsi que 24 rangées de 2 et 48 rangées de 1. Il reste 7 possibilités : 2 rangées de 24, 3 de 16, 4 de 12, 6 de 8, 8 de 6, 12 de 4, 16 de 3 élèves.

(c) $48 = 10 \times 4 + 8$: le reste n'est pas 0. Elle ne peut pas faire des rangées de 10 élèves.

(d) Il y a 49 élèves. $49 = 1 \times 49 = 7 \times 7$: diviseurs 1 ; 7 ; 49. Il reste 1 seule possibilité : 7 rangées de 7 élèves.

Ex. 44 ★★☆ **La piscine d'Annecy**

(a) Multiples de 6 : 0 ; 6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30 ; 36 ; 42 ; 48.

(b) Multiples de 8 : 0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48.

(c) Le premier nombre commun (après 0) est 24. Les deux retombent le même jour dans 24 jours, le $3 + 24 = 27$ mars.

(d) Elle n'a pas raison : ça retombe bien le même jour au bout de 48 jours, mais c'est déjà arrivé avant, au bout de 24 jours ($24 = 6 \times 4 = 8 \times 3$).

Ex. 45 ★★☆ **Le tournoi de Valence**

(a) $90 = 4 \times 22 + 2$: le reste n'est pas 0, il resterait 2 enfants. On ne peut pas faire des équipes de 4.

(b) Hugo a tort : $90 = 6 \times 15$, le reste est 0. On peut faire 15 équipes de 6 enfants (un nombre peut être multiple de 10 et de 6).

(c) $90 = 5 \times 18$: avec 5 équipes, il y a 18 enfants par équipe. Avec 5 enfants par équipe, on forme 18 équipes.

Ex. 45 **(suite)**

(d) Il reste 88 enfants. 88 se termine par 8, pas par 0 : $88 = 10 \times 8 + 8$. On ne peut plus faire des équipes de 10 enfants.

Ex. 46 ★★★ **La sortie au musée de Brest**

(a) Il y a $138 + 6 = 144$ personnes. $144 = 50 \times 2 + 44 : 2$ cars ne suffisent pas, car il reste 44 personnes. Il faut réserver 3 cars.

(b) $144 = 14 \times 10 + 4$: le reste n'est pas 0, donc 144 n'est pas divisible par 14. Lou a tort : 4 personnes resteraient sans groupe.

(c) $144 = 1 \times 144 = 2 \times 72 = 3 \times 48 = 4 \times 36 = 6 \times 24 = 8 \times 18 = 9 \times 16 = 12 \times 12$. Les nombres 5, 7, 10 et 11 ne conviennent pas. Après 12, on retombe sur des diviseurs déjà trouvés. Diviseurs de 144 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16 ; 18 ; 24 ; 36 ; 48 ; 72 ; 144.

(d) Entre 10 et 20, les diviseurs de 144 sont 12, 16 et 18. Il y a donc trois cas possibles : 12 groupes de 12 personnes ($12 \times 12 = 144$), 9 groupes de 16 personnes ($9 \times 16 = 144$) ou 8 groupes de 18 personnes ($8 \times 18 = 144$).

Ex. 47 ★★★ **Les trains de la gare de Tours**

(a) Multiples de 15 : 0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ; 120. Multiples de 20 : 0 ; 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 ; 120.

(b) Le plus petit nombre non nul présent dans les deux listes est 60 ($15 \times 4 = 60$ et $20 \times 3 = 60$). Les deux trains repartent ensemble 60 minutes après 6 h 00, c'est-à-dire à 7 h 00.

(c) $90 = 20 \times 4 + 10$: le reste n'est pas 0, donc 90 n'est pas un multiple de 20. Sami a tort : à 7 h 30, seul le train d'Orléans part.

(d) De 6 h 00 à 9 h 10, il s'écoule $3 \times 60 + 10 = 190$ minutes. $190 = 15 \times 12 + 10$: le reste n'est pas 0, donc aucun train d'Orléans ne part à 9 h 10.

(e) Le train suivant part $15 \times 13 = 195$ minutes après 6 h 00, c'est-à-dire à 9 h 15. Léa attend $195 - 190 = 5$ minutes.

Ex. 48 ★★★ **Les cartes de Yanis**

(a) Diviser par 10, c'est compter les dizaines : le reste est le chiffre des unités. Comme il reste 4 cartes, le nombre se termine par 4.

(b) Ce sont les nombres entre 80 et 130 qui se terminent par 4 : 84 ; 94 ; 104 ; 114 ; 124.

Ex. 48 **(suite)**

(c) $84 = 7 \times 12$ (reste 0) ; $94 = 7 \times 13 + 3$; $104 = 7 \times 14 + 6$; $114 = 7 \times 16 + 2$; $124 = 7 \times 17 + 5$. Seul 84 est divisible par 7 : Yanis a 84 cartes.

(d) $84 = 5 \times 16 + 4$. Yanis obtient 16 paquets complets, et 4 cartes restent hors des paquets.